Профессор, доктор физико-математических наук ***Я. Л. Геронимус***

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВИЖЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Если рассмотреть движение точки в плоскости Oxy под действием центральной силы F и ввести полярные координаты (r, φ), то по закону площадей имеем:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C; \tag{1}$$

вводя обозначение $u = \frac{1}{r}$, можем исключить время, пользуясь (1)

$$dt = \frac{d\varphi}{Cu^2}. \tag{2}$$

Если штрихами обозначить производные по аргументу φ, то проекции скорости на радиус-вектор v_r и на перпендикуляр к нему v_s выразятся следующим образом:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} = -Cu',$$

$$v_s = r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \cdot C = Cu. \tag{3}$$

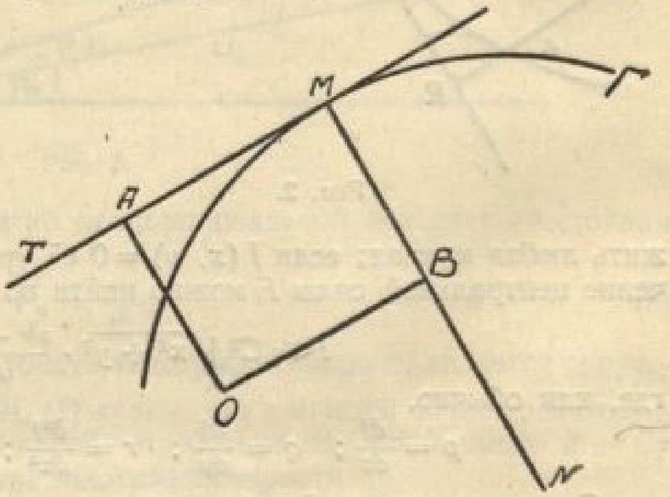

Рис. 1.

Если построить кривую Γ, являющуюся годографом скорости (см. рис. 1), и построить в некоторой точке M касательную MT и нормаль MN к годографу, то очевидно, что касательная параллельна ускорению w, то есть параллельна радиус-вектору и поэтому образует с полярной осью угол φ.

Мы имеем:

$$v_r = -Cu' = OB \cdot \beta = AM \cdot \beta, \quad v_s = Cu = BM \cdot \beta = OA \cdot \beta, \tag{4}$$

если годограф скорости построен в масштабе

$$1\ см - \beta \frac{мт}{сек}.$$

Точка A является проекцией полюса O на касательную MT к кривой Γ; геометрическое место таких точек называется подерой кривой Γ относительно полюса O.

Если траектория характеризовалась уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

то новая кривая с уравнением

$$r_1 = u = \frac{1}{f(\varphi)}$$

является инверсией траектории относительно единичной окружности с центром в O; таким образом, видим, что в центральном движении подера годографа скорости относительно полюса подобна инверсии траектории относительно центра сил и повернута относительно неё на 90°.

Отметим, что в известном руководстве по механике Г. Ламба[1]) это утверждение сформулировано неверно, ибо в нём говорится о самом годографе, а не о его подере.

Рассмотрим теперь траекторию Γ_0 нашей точки (см. рис. 2); по закону площадей имеем:

$$hv = C,$$

где $h = OR$ — длина перпендикуляра из O на касательную; геометрическим местом точек R является подера траектории относительно центра сил. Если построить инверсию этой подеры, то получим кривую, в которой точка, соответствующая полярному углу $\varphi - \frac{\pi}{2}$, имеет радиус-вектор $\frac{1}{h} = \frac{v}{c}$; итак, повернув на 90° инверсию подеры траектории, получим годограф скорости.

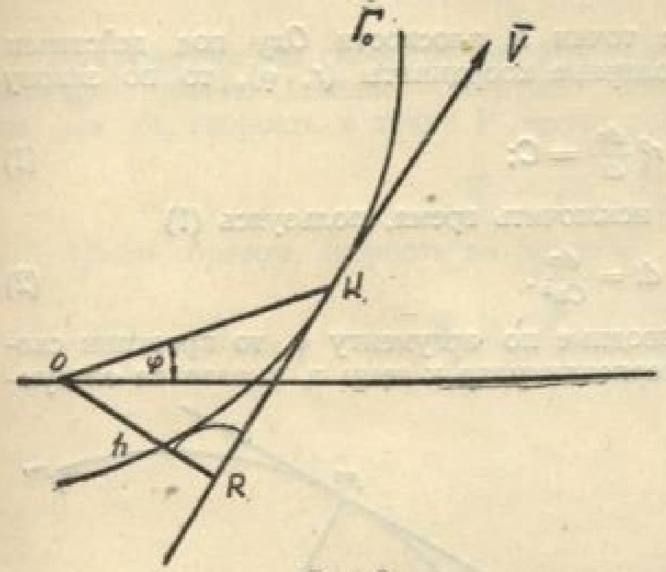

Рис. 2.

Таким образом, соотношение между траекторией Γ_0 и годографом скорости Γ взаимное — каждая из этих двух кривых может быть получена из другой следующим построением: надо построить подеру другой, найти инверсию этой подеры и повернуть полученную таким образом кривую на 90°.

Известно, что траекторией плоского движения может служить любая кривая; если $f(x, y) = 0$ её уравнение, то соответствующее значение центральной силы F можно найти по формуле:[2])

$$F = C^2 \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{q^2 r - 2pqs + p^2 t}{(px + qy)^3}, \tag{5}$$

где, как обычно,

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Следовательно, любая плоская кривая в результате двукратного применения указанного построения переходит сама в себя (вплоть до преобразования подобия).

Этот результат, полученный обходным путём, является частным случаем общего геометрического предложения; именно — проделаем следующее преобразование любой заданной поверхности S: спроектируем данную точку O на плоскости, касательные к S, и построим новую поверхность S', являющуюся геометрическим местом этих проекций, а затем построим поверхность S'', являющуюся инверсией поверхности S относительно единичной сферы, с центром в O. Если к поверхности S'', полученной в результате указанного преобразования, снова применить это же преобразование, то получим исходную поверхность.

Это предложение нетрудно доказать прямым путём, однако на этом не будем останавливаться.

[1]) Г. Ламб. Теоретическая механика, том 2, стр. 243. 1935.
[2]) См., напр., Е. Т. Уиттекер. Аналитичеокая динамика, стр. 94. 1937.

Найдём теперь радиус кривизны ρ годографа скорости; имеем

$$\rho = \frac{d\sigma}{d\varepsilon},$$

где $d\sigma$ — элемент дуги годографа, а $d\varepsilon$ — соответствующий угол смежности; так как

$$d\sigma = w dt, \quad d\varepsilon = d\varphi,$$

то, пользуясь (2), легко находим

$$\rho = \frac{w}{Cu^2}, \tag{6}$$

откуда

$$F = mw = \frac{C\rho m}{r^2}. \tag{7}$$

В самом общем случае плоского движения радиус кривизны годографа скорости зависит от третьих производных координат по времени, то есть для его нахождения недостаточно знать силу в данном положении точки, а необходимо ещё знать, как сила изменяется.

Характеризуя положение точки в плоскости координатами (u, φ), находим элементарную работу центральной силы F

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = Fdr = -F\frac{du}{u^2} = -Cm\rho du, \tag{8}$$

то есть в центральном движении радиус кривизны годографа скорости пропорционален обобщённой силе, соответствующей координате u.

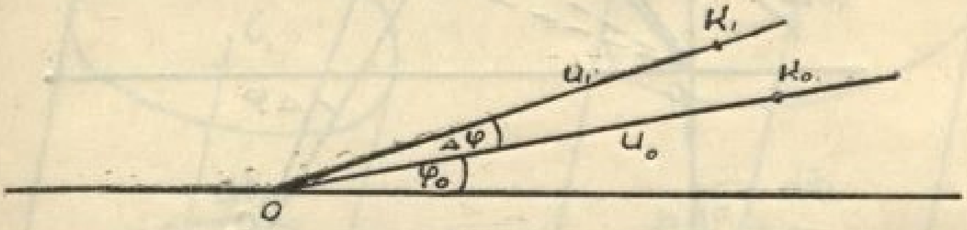

Рис. 3.

Для центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния (Ньютонианской силы),

$$F_0 = \frac{\kappa m}{r^2}; \tag{9}$$

имеем, очевидно, $\rho_0 = \frac{\kappa}{C} = \text{const}$, то есть годографом скорости является окружность; из сопоставления формул (9), (7) видим, что в каждой точке траектории можем считать силу F Ньютонианской силой, причём постоянная $k = C\rho$ пропорциональна радиусу кривизны годографа скорости.

Рассмотрим в заключение метод графического построения траектории центрального движения в том общем случае, когда сила F является заданной функцией координат и проекций скорости движущейся точки.

Пользуясь формулами (3), видим, что можно считать F известной функцией аргументов φ, u, u',

$$F = F(\varphi, u, u'). \tag{10}$$

Покажем, как, зная величины

$$u = u_0, \quad u' = u_0'$$

при заданном значении аргумента $\varphi = \varphi_0$, найти приближённые значения

$$u = u_1, \quad u' = u_1'$$

при новом значении аргумента $\varphi = \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — малая величина.

Зная (u_0, φ_0), построим точку K_0 (см. рис. 3), лежащую на инверсии нашей траектории; зная также u_0', можем найти по (3) проекции скорости, построить точку M_0 годографа (см. рис. 4), а также касательную M_0T_0 и нормаль M_0N_0 к нему. Зная величины (φ_0, u_0, u_0'), можем по (10) найти значение силы, а по (7) — величину радиуса кривизны ρ_0 в точке M_0

$$\rho_0 = \frac{F(\varphi_0, u_0, u_0')}{Cmu_0^2}.$$

Пусть C_0 — центр кривизны, то есть $C_0M_0 = \rho_0$.

Описывая дугу M_0M_1 с центром в C_0 и с углом $M_0C_0M_1 = \Delta\varphi$, получим новую точку M_1 годографа скорости, причём M_1T и M_1C_0 — новые на-

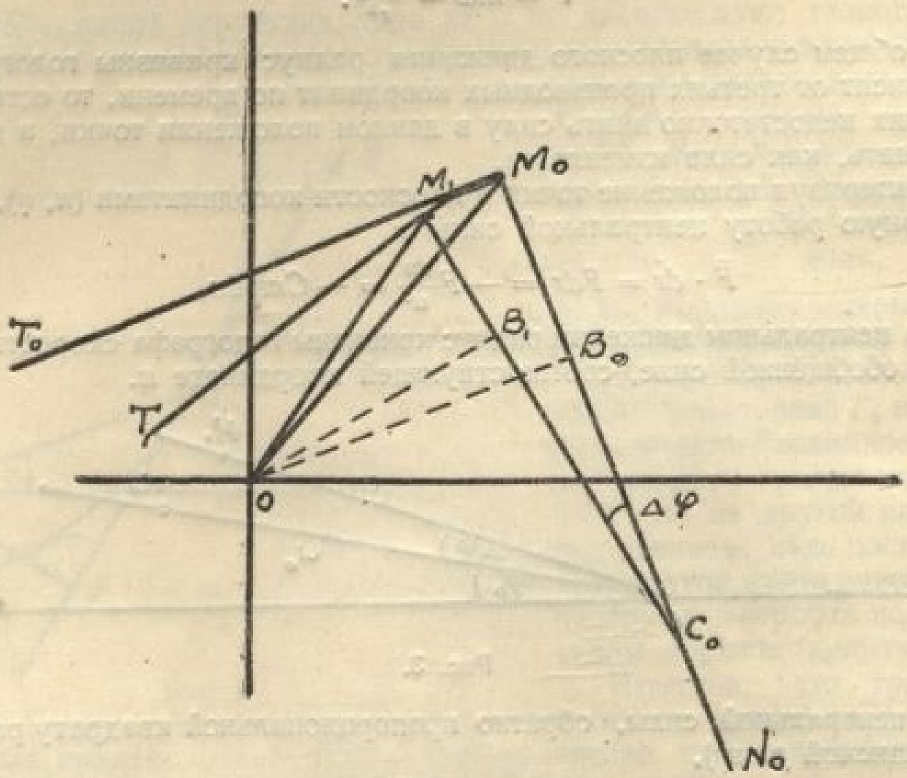

Рис. 4.

правления касательной и нормали; опуская из точки O перпендикуляр OB_1 на нормаль M_1C_0, найдём по (3)

$$u_1 = \frac{B_1M_1}{C}\cdot\beta, \quad u_1' = -\frac{OB_1}{C}\cdot\beta; \tag{11}$$

зная $\Delta\varphi$ и u_1, строим новую точку K_1, лежащую на инверсии траектории.

Если точка K_0 соответствовала моменту времени t_0, то по (2) приближённо имеем

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta\varphi}{Cu_0^2},$$

то есть точка K_1 соответствует моменту времени

$$t_1 = t_0 + \Delta t_0 = t_0 + \frac{\Delta\varphi}{Cu_0^2}. \tag{12}$$

Повторяя это построение, одновременно выстраиваем по точкам годограф скорости, инверсию траектории и находим моменты времени, соответствующие каждой точке; зная инверсию траектории, легко построить по точкам саму траекторию.