Профессор, доктор физико-математических наук **Я. Л. Геронимус**

ОБ ОДНОМ ПРОСТОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГУЛЬДЕНА

Рассмотрим плоскую фигуру S и вычислим объём V, описанный ею при любом её перемещении в пространстве; при этом будем считать положительным объём, описанный одной стороной S, и отрицательным — описанный другой стороной.

Найдём сперва дифференциал объёма dV при бесконечно-малом перемещении фигуры S (см. рис. 1); если выбрать за полюс центр тяжести C фигуры S, считая её однородной, то элементарное перемещение фигуры можно разложить

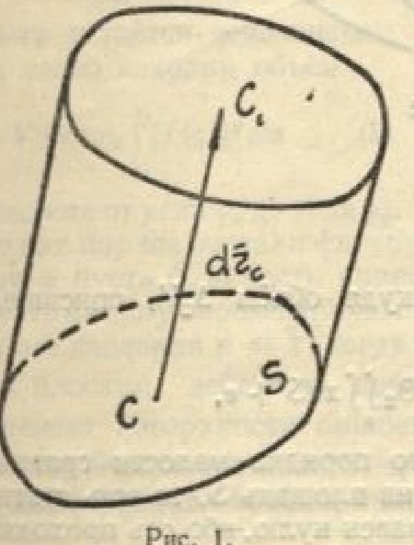

Рис. 1.

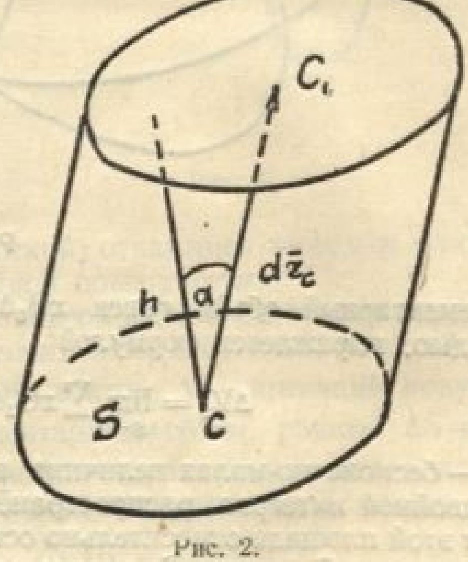

Рис. 2.

на поступательное перемещение, характеризуемое вектором $d\bar{r}_c$, и на поворот вокруг оси, проходящей через точку C, характеризуемый вектором бесконечно-малого поворота $\bar{\Theta}$.

Объём тела, описанного при поступательном перемещении (см. рис. 2), — это объём наклонного цилиндра с основанием S и высотой $d\bar{r}_c$; этот объём, как легко видеть, равен

$$\Delta_1 V = Sh = Sdr_c \cos\alpha; \tag{1}$$

если ввести нормальный вектор $\bar{S}$, равный по модулю площади фигуры, направленный по нормали к ней и проходящий через центр тяжести C, то, очевидно, имеем

$$\Delta_1 V = \bar{S} \cdot d\bar{r}_c. \tag{2}$$

Вектор поворота $\bar{\Theta}$ разложим на две составляющие

$$\bar{\Theta} = \bar{\Theta}_1 + \bar{\Theta}_2, \tag{3}$$

причём вектор $\bar{\Theta}_2$ лежит в плоскости фигуры S, а вектор $\bar{\Theta}_1$ перпендикулярен к ней (см. рис. 3). При вращении, характеризуемом вектором $\bar{\Theta}_1$, фигура S

не опишет никакого объёма; при вращении вокруг оси ACB, характеризуемом вектором $\bar{\Theta}_2$, часть S_1 площади S опишет элементарный положительный объём, а часть S_2 — отрицательный. Докажем, что их алгебраическая сумма равна нулю.

Действительно, вводя координатные оси $Cxyz$, видим, что элементарная площадка ΔS опишет элементарный объём $z\Delta S$, причём $z = x \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол поворота фигуры S. Так как $\alpha = \Theta_2$ является бесконечно-малой величиной,

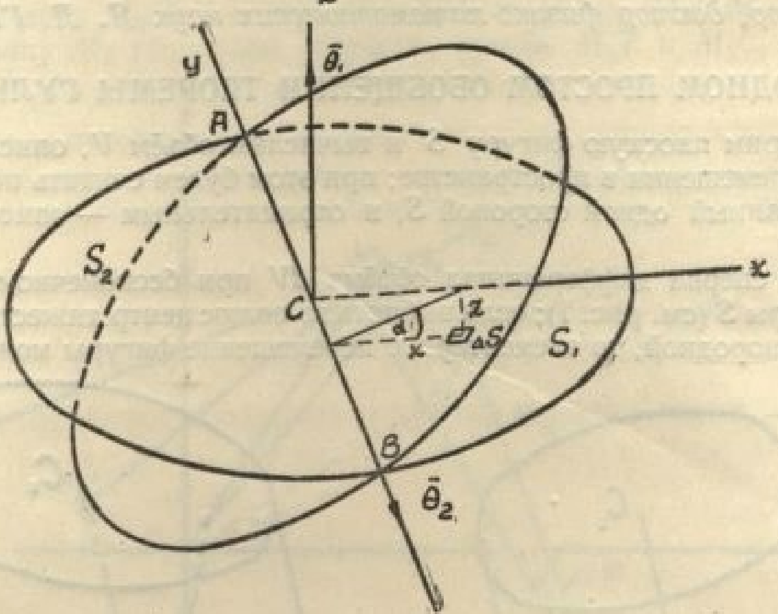

Рис. 3.

то элементарный объём равен $x\Theta_2\Delta S$, откуда объём $\Delta_2 V$, описанный всей площадью, выражается формулой

$$\Delta V_2 = \lim_{\Delta S \to 0} \sum x\Theta_2\Delta S = \Theta_2 \iint_s x dS + \varepsilon, \tag{4}$$

где ε — бесконечно-малая величина высшего порядка малости сравнительно с Θ_2; двойной интеграл, распространённый на площадь S, то есть статический момент этой площади относительно оси Cy, равен нулю, ибо ось проходит через центр тяжести C фигуры S; окончательно элементарный объём ΔV, описанный фигурой S, таков:

$$\Delta V = \Delta_1 V + \Delta_2 V = \bar{S} \cdot d\bar{r}_c + \varepsilon.$$

Мы находим искомый дифференциал объёма в такой форме:

$$dV = \bar{S} \cdot d\bar{r}_c. \tag{5}$$

Таким образом, объём, описанный плоской фигурой S при любом её перемещении в пространстве, равен работе нормального вектора S на перемещении его точки приложения (то есть на перемещении центра тяжести фигуры). При бесконечно-малом перемещении фигуры берём элементарную работу, при конечном перемещении — полную работу.

Доказательство сразу вытекает из формулы (5), первая часть которой равна элементарной работе вектора $\bar{S}$ на перемещении $d\bar{r}_c$[1]).

---

[1]) Если рассмотреть прямоугольник, одна сторона которого a движется в данной плоскости P, а плоскость его всё время остаётся перпендикулярной плоскости P, то из полученного результата легко найти величину площади, описанной отрезком a в плоскости P, то есть получить формулу, лежащую в основе теории полярного планиметра.

Так как вектор $\bar{S}$ имеет постоянный модуль, то для вычисления этой работы, то есть величины описанного объёма, надо только знать траекторию центра тяжести фигуры, а также угол вектора, нормального к плоской фигуре, с этой траекторией в любой её точке.

Формула (5) для дифференциала объёма сохраняет свою силу и в том, более общем, случае, когда площадь S фигуры меняется в процессе её перемещения; при вычислении полной работы надо только знать закон изменения площади.

Пусть, например, круг движется винтовым движением вокруг оси, лежащей с ним в одной плоскости, причём радиус круга задан в функции угла поворота φ вокруг оси вращения (см. рис. 4)

$$r = f(\varphi). \tag{6}$$

Если угол винтовой линии с её осью равен β, то имеем

$$S = \pi r^2 = \pi [f(\varphi)]^2,$$

$$\bar{S} \cdot d\bar{r}_c = \pi [f(\varphi)]^2 \, dr_c \sin\beta = \pi r_0 [f(\varphi)]^2 \, d\varphi, \tag{7}$$

причём r_0 остаётся неизменным; отсюда легко находим объём

$$V = \pi r_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [f(\varphi)]^2 \, d\varphi \tag{8}$$

при повороте от угла φ_1 до угла φ_2.

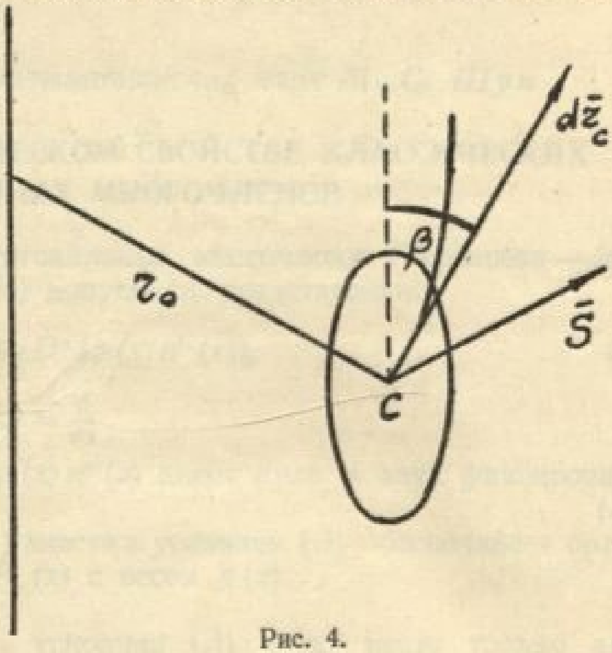

Рис. 4.

До сих пор мы считали фигуру S плоской; откажемся теперь от этого ограничения и пусть S — часть криволинейной поверхности.

Пусть на одну определённую сторону поверхности S действуют нормальные единичные давления $p = 1$; тогда на элемент поверхности ΔS, который можно считать плоским, действует нормальный вектор $\Delta\bar{S}$, имеющий модуль ΔS; этот элемент поверхности опишет элементарный объём, равный $\Delta\bar{S} \cdot d\bar{r}$, где $d\bar{r}$ — вектор бесконечно-малого перемещения точки, взятой в пределах этого элемента; дифференциал объёма, описанного всей поверхностью S, таков:

$$dV = \iint (\bar{n} \cdot d\bar{r}) \, dS, \tag{9}$$

где интеграл взят по поверхности, а n — орт нормали к ней. Приходим к следующему результату, являющемуся обобщением теоремы Гульдена: объём, описанный поверхностью S при её перемещении в пространстве, равен сумме работ нормальных единичных давлений, приложенных к этой поверхности.