

Доцент, кандидат технических наук Л. П. Винокуров

ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИСКРИВЛЁННЫХ ПЛИТ

Переход от задачи двухмерной к одномерной в плитах, имеющих малое начальное искривление

Уравнение срединной поверхности плоской плиты, как известно, получается в результате интегрирования бигармонического уравнения

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

В отличие от этого, дифференциальное уравнение срединной поверхности для плиты с начальным малым искривлением¹⁾ представляется в следующем виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q + N_x \frac{\partial^2 (W_k + W)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (W_k + W)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (W_k + W)}{\partial x \cdot \partial y}, \quad (2)$$

где:

W_k — уравнение заданной поверхности искривлённой поверхности пластины;

W — уравнение срединной поверхности, которое получено исключительно за счёт деформации пластины.

Если заданную пластину заменить системой искривлённых прямоугольных полос введением параллельных кривых линий n , $n-1$, $n-2$, $n+1$, $n+2$ на равных расстояниях d , то уравнение (2) применительно к линии \bar{n} запишется в следующем виде:

$$\frac{1}{d^4} (W_{\bar{n}-2} - 4W_{\bar{n}-1} + 6W_{\bar{n}} - 4W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}) + \frac{2}{d^2} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) + \frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dy^4} = \frac{1}{D} \left\{ N_x^{(\bar{n})} \frac{(W_{\bar{n}-1} + W_{k(\bar{n}-1)}) - 2(W_{\bar{n}} + W_{k(\bar{n})}) + (W_{\bar{n}+1} + W_{k(\bar{n}+1)})}{d^2} + N_y^{(\bar{n})} \frac{d^2 (W_{\bar{n}} + W_{k(\bar{n})})}{dy^2} + \frac{1}{d} N_{xy}^{(\bar{n})} \frac{d}{dy} [(W_{\bar{n}+1} + W_{k(\bar{n}+1)}) - (W_{\bar{n}-1} + W_{k(\bar{n}-1)})] \right\} + \frac{q}{D}, \quad (3)$$

где:

$N_x^{(\bar{n})}$, $N_y^{(\bar{n})}$, $N_{xy}^{(\bar{n})}$ — значения сил N_x , N_y , N_{xy} в точках на линии \bar{n} ;

$W_{k(\bar{n})}$ — уравнение кривой линии \bar{n} , полученной в результате пересечения криволинейной плиты вертикальной плоскостью yz .

Если уравнение начально-искривлённой поверхности плиты задано в аналитической форме, то влияние искривления поверхности плиты в правой части

¹⁾ Искривление настолько мало, что оно может быть соизмеримо с искривлением от деформации соответствующей плоской плиты.

уравнения (3) может быть выражено аналитически и в таком случае уравнение (3) заменяется нижеприводимым уравнением:

$$\frac{1}{d^4} (W_{\bar{n}-2} - 4W_{\bar{n}-1} + 6W_{\bar{n}} - 4W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}) + \frac{2}{d^2} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) + \frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dy^4} = \frac{1}{D} \left\{ N_x^{(\bar{n})} \left(\frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} + \frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial x^2} \right) + N_y^{(\bar{n})} \left(\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial y^2} \right) + 2N_{xy}^{(\bar{n})} \left[\frac{1}{2d} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) + \frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \frac{q}{D}, \quad (4)$$

где:

$\frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 W_{h(\bar{n})}}{\partial x \partial y}$ — значения производных уравнений искривлённой поверхности плиты W_h в точках на линии \bar{n} . Уравнения, подобные уравнению (3) или уравнению (4), составляются для каждой линии, разделяющей плиту на полосы. В результате получается система обыкновенных линейных уравнений, заменяющая собой одно дифференциальное уравнение (2) в частных производных. Таким образом совершается переход от задачи двухмерной к задаче одномерной.

Определение напряжений, усилий в искривлённой плите и реакций на шарнирной опоре

Напряжения и усилия в искривлённой плите определяются по тем же формулам, что и в плоской плите, поскольку эти величины зависят от уравнения срединной поверхности плиты, возникшей исключительно за счёт её деформации.

Обращаясь к известным выражениям напряжений и усилий в плите, отнесённым к прямоугольным координатам и к формулам производных в конечных разностях только по оси X , получаем следующие уравнения напряжений и усилий в плите, в точках линии \bar{n} , когда плита разделена подобными линиями на полосы равной ширины:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(\bar{n})} &= -\frac{E_z}{1-\nu^2} \left(\frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} + \nu \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} \right) \dots \dots \dots (a) \\ \sigma_y^{(\bar{n})} &= -\frac{E_z}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \nu \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} \right) \dots \dots \dots (b) \\ \tau_{xy}^{(\bar{n})} &= -\frac{E_z}{1+\nu} \cdot \frac{1}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \dots \dots \dots (в) \\ \tau_{xz}^{(\bar{n})} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \left[\frac{-W_{\bar{n}-2} + 2W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{2d^3} + \frac{1}{2d} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] (г) \\ \tau_{yz}^{(\bar{n})} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{1}{d^2} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] \dots \dots \dots (д) \\ M_x^{(\bar{n})} &= -D \left(\frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} + \nu \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} \right) \dots \dots \dots (a) \\ M_y^{(\bar{n})} &= -D \left(\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \nu \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} \right) \dots \dots \dots (b) \\ H^{(\bar{n})} &= -D(1-\nu) \frac{1}{2d} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \dots \dots \dots (в) \\ V_{xz}^{(\bar{n})} &= -D \left[\frac{-W_{\bar{n}-2} + 2W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{d^3} + \frac{1}{2d} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] \dots (г) \\ V_{yz}^{(\bar{n})} &= -D \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{1}{d^2} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] \dots \dots \dots (д) \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{xz}^{(\bar{n})} &= D \left[\frac{-W_{\bar{n}-2} + 2W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{2d^2} + \frac{2-\nu}{2d} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] \cdot (a) \\ Q_{yz}^{(\bar{n})} &= D \left[\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{2-\nu}{d^2} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] \dots \dots \dots (b) \\ Q_0 &= D \frac{1-\nu}{d} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \dots \dots \dots (в) \end{aligned} \right\} (7)$$

В равенствах (6) и (7)

$M_x^{(\bar{n})}$ и $M_y^{(\bar{n})}$ — изгибающие моменты в точках на линии \bar{n} , соответствующие нормальным напряжениям $\sigma_x^{(\bar{n})}$ и $\sigma_y^{(\bar{n})}$.

$H^{(\bar{n})}$ — крутящий момент в точках на линии \bar{n} , соответствующий касательному напряжению $\tau_{xy}^{(\bar{n})}$;

$V_{xz}^{(\bar{n})}$ и $V_{yz}^{(\bar{n})}$ — перерезывающие усилия в точках на линии \bar{n} , соответствующие касательным напряжениям $\tau_{xz}^{(\bar{n})}$ и $\tau_{yz}^{(\bar{n})}$;

$Q_{xz}^{(\bar{n})}$ и $Q_{yz}^{(\bar{n})}$ — реакция на шарнирной опоре ребра на линии \bar{n} ;

Q_0 — реакция в углу плиты.

Удовлетворение условиям на контуре искривлённых плит с прямоугольным и непрямоугольным очертанием в плане

Контурные условия для искривлённой плиты выражаются через уравнение срединной поверхности W так же, как и контурные условия для плоской плиты, поскольку они содержат то уравнение срединной поверхности W , которое получается исключительно в результате деформации плиты.

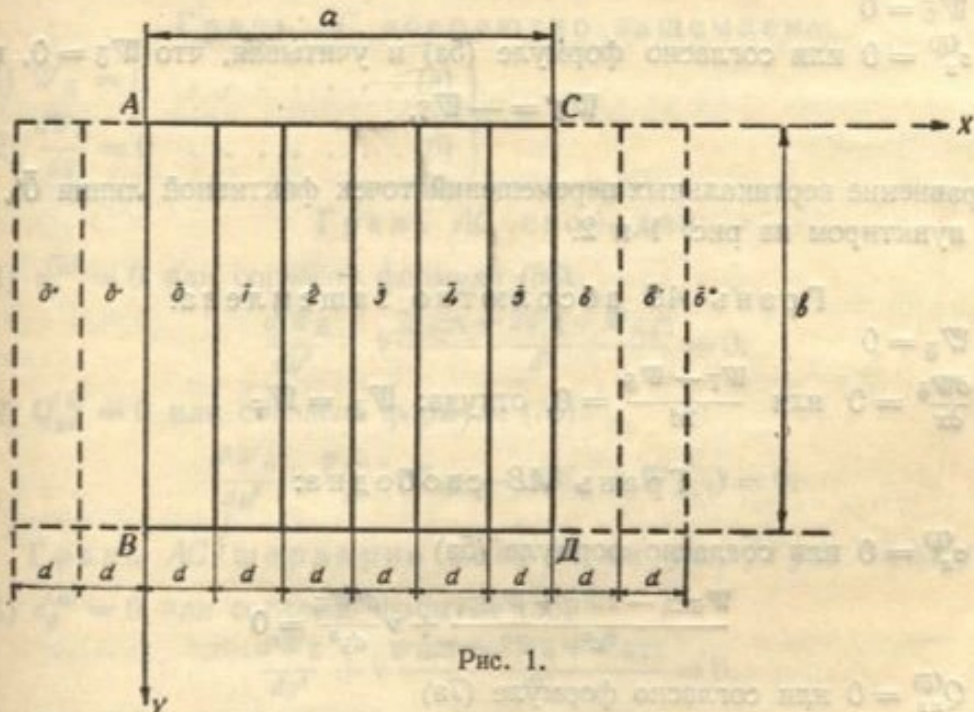


Рис. 1.

Будем относить свои рассуждения к плите, имеющей прямоугольное очертание в плане (рис. 1), и к плите, имеющей непрямоугольное очертание в плане, например, трапецевидное (рис. 2).

Условия на контуре неодинаково удовлетворяются на границах плиты, параллельных линиям, разделяющим плиту на полосы (границы AB и CD),

и на гранях плиты, пересекающихся с ними (грани AC и BD). На первых гранях условия удовлетворяются сплошь по всей длине грани, а на вторых — условия удовлетворяются в отдельных точках, где грань пересекается с линиями n .

Для плиты прямоугольной и трапецевидной в плане условия на грани AB (и аналогично на грани CD), параллельной линиям \bar{n} , в зависимости от способа её опирания выражаются следующим образом:

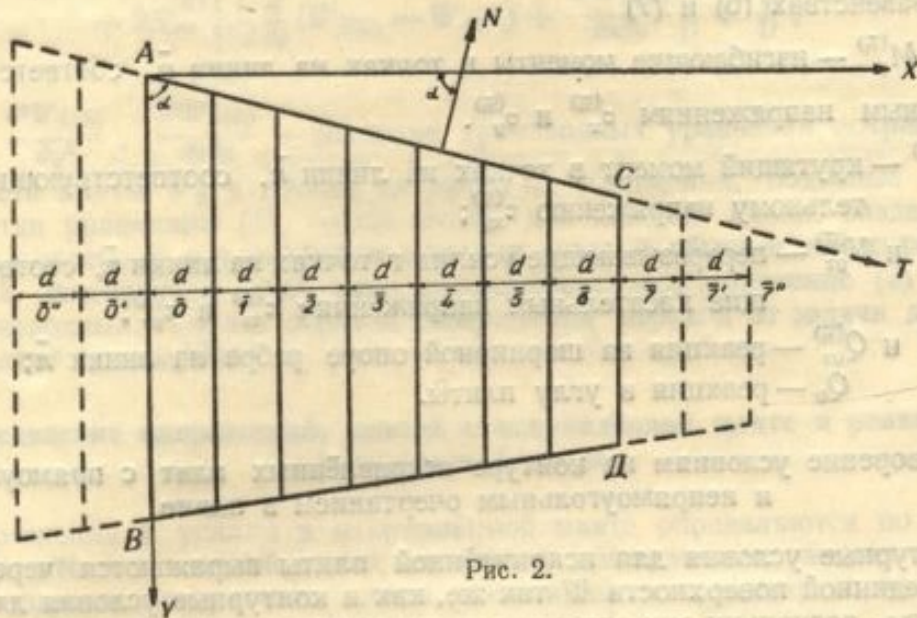


Рис. 2.

Грань AB шарнирно оперта:

$$1) W_{\bar{0}} = 0 \quad (8)$$

$$2) \sigma_x^{(\bar{0})} = 0 \text{ или согласно формуле (5а) и учитывая, что } W_{\bar{0}} = 0, \text{ имеем:}$$

$$W_{\bar{0}'} = -W_{\bar{1}}, \quad (9)$$

где:

$W_{\bar{0}}$ — уравнение вертикальных перемещений точек фиктивной линии $\bar{0}'$, показанной пунктиром на рис. 1 и 2.

Грань AB абсолютно защемлена:

$$1) W_{\bar{0}} = 0 \quad (10)$$

$$2) \frac{\partial W_{\bar{0}}}{\partial x} = 0 \text{ или } \frac{W_{\bar{1}} - W_{\bar{0}'}}{2d} = 0, \text{ откуда: } W_{\bar{0}'} = W_{\bar{1}} \quad (11)$$

Грань AB свободна:

$$1) \sigma_x^{(\bar{0})} = 0 \text{ или согласно формуле (5а)}$$

$$\frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} + \nu \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} = 0 \quad (12)$$

$$2) Q_{xz}^{(\bar{0})} = 0 \text{ или согласно формуле (7а)}$$

$$-W_{\bar{0}'} + 2W_{\bar{0}''} - 2W_{\bar{1}'} + W_{\bar{2}'} + \frac{2-\nu}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{1}} - W_{\bar{0}'}) = 0, \quad (13)$$

где:

$W_{\bar{0}'}$ — уравнение вертикальных перемещений точек второй фиктивной линии $\bar{0}''$, показанной пунктиром на рис. 1 и 2.

Грань AB шарнирно оперта на упругую балку:

1) $\sigma_x^{(\bar{0})} = 0$ или согласно формуле (5а)

$$\frac{W_{\bar{0}'} - 2W_{\bar{0}} + W_{\bar{1}}}{d^2} + \nu \frac{d^2 W_{\bar{0}}}{dy^2} = 0 \quad (14)$$

2) $Q_{xz}^{(\bar{0})} = (EI)_{\bar{0}} \frac{d^4 W_{\bar{0}}}{dy^4}$ или согласно формуле (7а)

$$(EI)_{\bar{0}} \frac{d^4 W_{\bar{0}}}{dy^4} = \frac{-W_{\bar{0}'} + 2W_{\bar{0}} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}}{2d^3} + \frac{2-\nu}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{1}} - W_{\bar{0}}'), \quad (15)$$

где:

$(EI)_{\bar{0}}$ — жёсткость на изгиб опорной балки;

$W_{\bar{0}}$ — уравнение вертикальных перемещений точек грани AB и одновременно точек опорной балки, на которую грань AB опирается.

Переходим к рассмотрению условий на грани AC (и аналогично на грани BD), полагая, что она совпадает с линией \bar{n} . Поскольку эти условия различны для плиты прямоугольного очертания в плане и для плиты трапецевидного очертания в плане, то для каждой из этих плит они будут рассмотрены отдельно.

А. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛИТА

Грань AC шарнирно оперта:

1) $W_{\bar{n}} = 0$ (16)

2) $\sigma_y^{(\bar{n})} = 0$ или согласно формуле (5б) и учитывая, что на грани AC

$$W = 0, \text{ имеем: } \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} = 0. \quad (17)$$

Грань AC абсолютно защемлена:

$$\left. \begin{array}{l} 1) W_{\bar{n}} = 0 \quad \dots \dots \dots (a) \\ 2) \frac{dW_{\bar{n}}}{dy} = 0 \quad \dots \dots \dots (б) \end{array} \right\} \quad (18)$$

Грань AC свободна:

1) $\sigma_y^{(\bar{n})} = 0$ или согласно формуле (5б)

$$\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \nu \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} = 0. \quad (19)$$

2) $Q_{yz}^{(\bar{n})} = 0$ или согласно формуле (7б)

$$\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{2-\nu}{d^2} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) = 0. \quad (20)$$

Грань AC шарнирно оперта на упругую балку:

1) $\sigma_y^{(\bar{n})} = 0$ или согласно формуле (5б)

$$\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \nu \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} = 0. \quad (21)$$

2) $Q_{yz}^{(\bar{n})} = (EI)_{\bar{0}} \frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dx^4}$ (\bar{n}) или согласно формуле (7б)¹⁾

$$\frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dy^4} + \frac{2-\nu}{d^2} \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) = (EI)_{\bar{0}} \frac{W_{\bar{n}-2} - 4W_{\bar{n}-1} + 6W_{\bar{n}} - 4W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{d^2} \quad (21')$$

¹⁾ И при выражении $\frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dx^4}$ в конечных разностях по переменной x .

Б. ТРАПЕЦЕВИДНАЯ ПЛИТА

Контурные условия будем рассматривать на грани AC (рис. 2). На этой грани намечаем две оси: ось T , совпадающая со срединной линией грани AC , и ось N нормальная к этой линии. Оси T и N лежат в плоскости осей X, Y , то есть в плоскости плана плиты $ABCD$.

Ось Z в системе осей T, N, Z , как и в системе осей X, Y, Z , направлена вниз.

Введём обозначения, относящиеся к направлениям и силам на грани AC :

σ_N — нормальное напряжение, направленное параллельно оси N .

Этим нормальным напряжениям соответствует изгибающий момент M_N .

σ_T — нормальное напряжение, направленное параллельно оси T .

Этим напряжениям соответствует изгибающий момент M_T .

τ_{NT} — касательное напряжение, направленное параллельно оси T . Этим касательным напряжениям соответствует крутящий момент H_{NT} .

Q_{NZ} — вертикально направленная реакция на шарнирной опоре.

Между напряжениями и силами в системе координат N, T, Z и в системе координат X, Y, Z существуют следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha & (a) \\ \tau_{NT} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha & (б) \\ M_N &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + H \sin 2\alpha & (в) \\ H_{NT} &= \frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + H \cos 2\alpha & (г) \\ Q_{NZ} &= Q_{xz} \cos \alpha + Q_{yz} \sin \alpha. & (д) \end{aligned} \right\} (21^*)$$

При применении формул (5), (6) и (7) уравнения (21^{*}) представляются в следующем виде:

$$\sigma_N = - \left[(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}}{d^2} + (\nu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{d^2 W_n}{dy^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n+1} - W_{n-1}) \right] \frac{Ez}{1 - \nu^2} \quad (22)$$

$$\tau_{NT} = - \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}}{d^2} - \frac{d^2 W_n}{dy^2} \right) \frac{Ez}{1 + \nu} - \frac{Ez}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{2d} \frac{d}{dy} (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos 2\alpha \quad (23)$$

$$M_N = -D \left[(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}}{d^2} + (\nu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{d^2 W_n}{dy^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n+1} - W_{n-1}) \right] \quad (24)$$

$$H_{NT} = -D \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}}{d^2} - \frac{d^2 W_n}{dy^2} \right) + \frac{1}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n+1} - W_{n-1}) \cos 2\alpha \right] (1 - \nu) \quad (25)$$

$$Q_{NZ} = D \left\{ \left[\frac{-W_{n-2} + 2W_{n-1} - 2W_{n+1} + W_{n+2}}{2d^2} + \frac{2 - \nu}{2d} \frac{d^2}{dy^2} (W_{n+1} - W_{n-1}) \right] \cos \alpha + \left[\frac{d^2 W_n}{dy^2} - \frac{2 - \nu}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) \right] \sin \alpha \right\} \quad (26)$$

Угол поворота Θ_T любой вертикальной линии грани AC вокруг оси T может быть разложен на углы поворота Θ_X и Θ_Y вокруг осей X и Y , и в таком случае упомянутый угол поворота представляется в виде:

$$\Theta_T = \Theta_X \sin \alpha + \Theta_Y \cos \alpha. \quad (27)$$

Так как в точках на линии \bar{n}

$$\Theta_X = \frac{W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}}{2d} \quad \text{и} \quad \Theta_Y = \frac{dW_{\bar{n}}}{dy}, \quad \text{то}$$

$$\Theta_T = \frac{W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}}{2d} \sin \alpha + \frac{dW_{\bar{n}}}{dy} \cos \alpha. \quad (28)$$

Остановимся на составлении контурных условий для случаев, когда грань AC трапецевидной плиты свободна и когда она шарнирно связана с упругой балкой.

Грань AC свободна:

$$1) \sigma_x = 0 \quad \text{или} \quad (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} +$$

$$+ (\nu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) = 0. \quad (29)$$

$$2) Q_{NZ} = 0 \quad \text{или} \quad \left[\frac{-W_{\bar{n}-2} + 2W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{2d^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2-\nu}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] \cos \alpha +$$

$$+ \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{2-\nu}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] \sin \alpha = 0. \quad (30)$$

Грань AC шарнирно опёрта на упругую балку:

$$1) \sigma_N = 0 \quad \text{или} \quad (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}}{d^2} +$$

$$+ (\nu \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) = 0 \quad (31)$$

$$2) Q_{NZ} = (EI)_{\text{балки}} \frac{d^4 W}{dT^4} \quad \text{или} \quad Q_{NZ} = (EI)_{\text{балки}} \frac{d^4 W}{dx^4} \cdot \sin \alpha,$$

откуда при применении формулы (26) и конечных разностей по переменной x имеем:

$$\left[\frac{-W_{\bar{n}-2} + 2W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}}{2d^3} + \frac{2-\nu}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] \cdot \cos \alpha +$$

$$+ \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{2-\nu}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{(EI)_6 \cdot \sin \alpha}{Dd^4} (W_{\bar{n}-2} - 4W_{\bar{n}-1} + 6W_{\bar{n}} - 4W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2}) \quad (32)$$

Решение некоторых примеров и особенности искривлённых плит

Пример 1. Поверхность искривлённой плиты выражается уравнением:

$$W_k = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Плита нагружена нагрузкой $q = \text{const}$, $N_x = \text{const}$ и по контуру шарнирно опёрта.

Требуется найти уравнение W .

Вводим одно упругое ребро $\bar{1}$ в два фиктивных ребра $\bar{0}'$ и $\bar{2}'$ (рис. 3). Тогда уравнение (3) применительно к ребру $\bar{1}$ представится в следующем виде; учитывая, что $N_y = 0$ и $N_{xy} = 0$:

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} (W_{\bar{0}'} - 4W_{\bar{0}} + 6W_{\bar{1}} - 4W_{\bar{2}} + W_{\bar{2}'}) + \frac{2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{0}'} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}) + \frac{d^4 W}{dy^4} = \frac{1}{D} \left\{ -N_x \left[\frac{W_{\bar{0}'} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - A \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin \frac{\pi x y}{b} \right] + q \right\}. \quad (33)$$

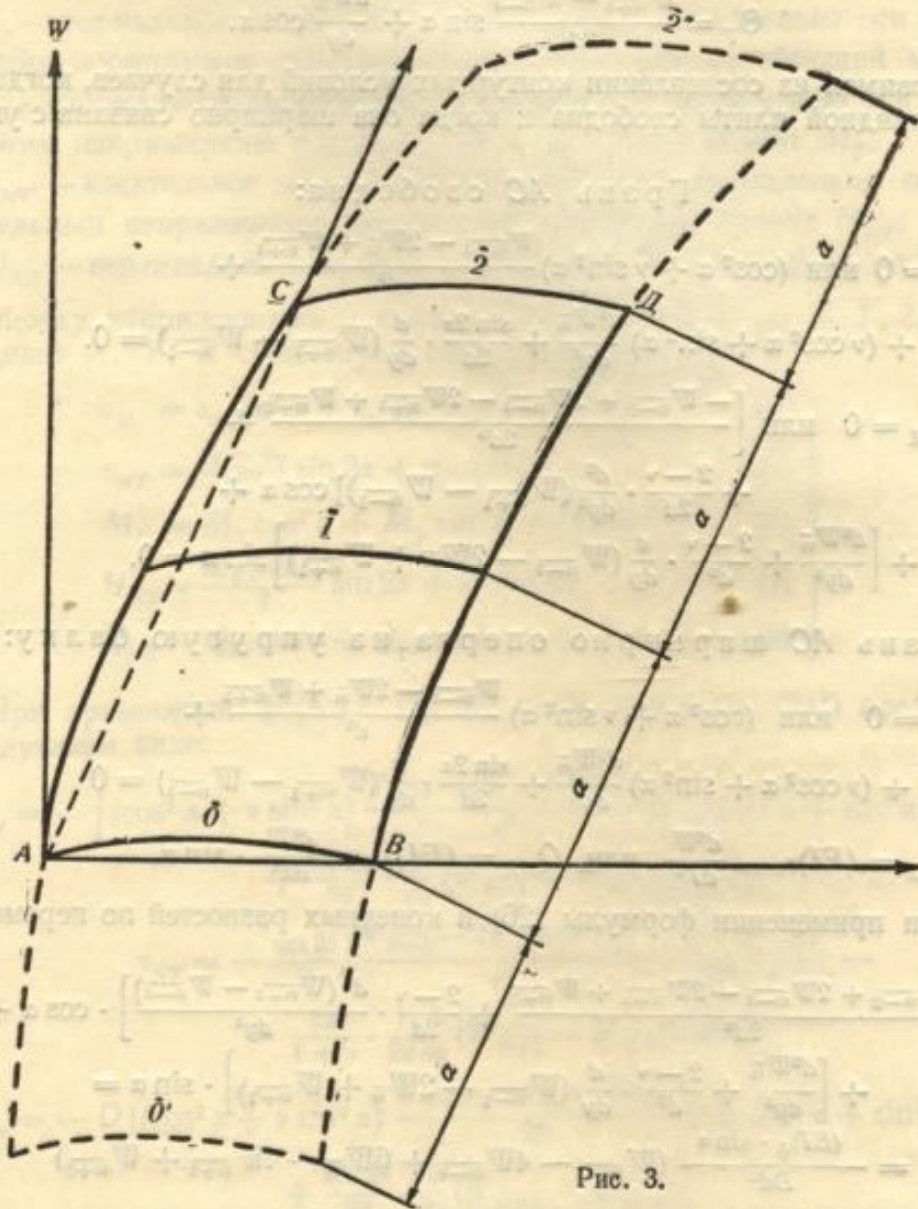


Рис. 3.

Условия на гранях AB и CD :

$$W_{\bar{0}} = W_{\bar{2}} = 0 \quad \text{и} \quad W_{\bar{0}'} = W_{\bar{2}'} = W_{\bar{1}}.$$

При таких условиях уравнение (33) заменяется уравнением:

$$\frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} - \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} + \left[\frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} - 2 \frac{N_x}{D \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right] W_{\bar{1}} = A \frac{N_x \cdot \pi^2}{a^2 D} \sin \frac{\pi x y}{b} + \frac{q}{D}. \quad (34)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (34), ищем в виде: $W_{\bar{1}} = \bar{B} \cdot e^{s\nu}$, (35)

где: s — определяется из характеристического уравнения:

$$s^4 - \frac{16}{a^2} s^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D} \right) = 0,$$

откуда

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{8}{a^2} + \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}} = \pm \alpha,$$

$$s_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{8}{a^2} - \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}} =$$

$$= \pm \sqrt{-\left(-\frac{8}{a^2} + \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}\right)} = \pm i \sqrt{-\frac{8}{a^2} + \sqrt{\frac{8N_x}{a^2 D}}} = \pm \beta i,$$

где:

α — всегда действительное число;

β — действительное число тогда, когда $\frac{N_x}{D} \geq \frac{8}{a^2}$,

то есть, когда сила N_x равна или больше своего критического значения.

Следовательно, в тех случаях, когда имеется в виду прочность плиты и сила $N_x < \frac{8}{a^2}$, то β есть мнимое число, а $s_{3,4}$ выражается действительными числами.

Поэтому, когда сила N_x меньше своего критического значения, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (34), представляется в виде:

$$W_{\bar{1}} = B_1 Chxy + B_2 Shxy + B_3 Ch\beta y + B_4 Sh\beta y. \quad (36)$$

Как легко убедиться, частное решение уравнения (34) имеет следующее выражение

$$W_{\bar{1}}^{(частн)} = \frac{q}{D} \cdot \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} + A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin \frac{m\pi y}{b}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)}. \quad (37)$$

Сумма решений (36) и (37) представляет полное решение уравнения (34).

$$W_{\bar{1}} = B_1 Chxy + B_2 Shxy + B_3 Ch\beta y + B_4 Sh\beta y +$$

$$+ \frac{q}{D} \cdot \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} + A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin \frac{m\pi y}{b}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)}. \quad (38)$$

Постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 определяем из условий опирания граней AC и BD :

$$1) \text{ при } y = 0; \quad W_{\bar{1}} = 0$$

$$\text{или} \quad B_1 + B_3 + \frac{q}{D} \cdot \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} = 0; \quad (39)$$

$$2) \text{ при } y = 0; \quad \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} = 0$$

$$\text{или} \quad \alpha^2 B_1 + \beta^2 B_3 = 0; \quad (40)$$

$$3) \text{ при } y = b; \quad W_{\bar{1}} = 0$$

или (38) $B_1 Ch2b + B_2 Shzb + B_3 Ch\beta b + B_4 Sh\beta b +$
 $+ \frac{q}{D} \cdot \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} + A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin m\pi}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)} = 0;$ (41)

4) при $y = b$; $\frac{d^2 W_I}{dy^2} = 0$

или $\alpha^2 B_1 Chzb + \alpha^2 B_2 Shzb + \beta^2 B_3 Ch\beta b + \beta^2 B_4 Sh\beta b -$
 $- A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \sin m\pi}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)} = 0.$ (42)

В результате совместного решения уравнений (39—42) получаем:

$$B_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{q}{D} \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}}. \quad (43)$$

$$B_3 = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{q}{D} \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}}. \quad (44)$$

$$B_2 = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2) Shab} \left\{ A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin m\pi}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)} \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \beta^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \beta^2 \frac{q}{D} \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} \left[\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} (\beta^2 Chab - \alpha^2 Ch\beta b) + 1 \right] \right\}. \quad (45)$$

$$B_4 = -\frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2) Sh\beta b} \left\{ A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin m\pi}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)} \left[\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \alpha^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \alpha^2 \frac{q}{D} \frac{1}{\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}} \left[\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} (\beta^2 Chab - \alpha^2 Ch\beta b) + 1 \right] \right\}. \quad (46)$$

Проанализируем полученный результат, сравнивая его с соответствующим результатом для плоских плит в следующих случаях:

1. $q = 0$; $N_x \neq 0$.

Поскольку поперечная нагрузка отсутствует ($q = 0$), то коэффициенты B_1 и B_3 обращаются в нуль (см. равенства 43 и 44).

Оставшиеся два коэффициента B_2 и B_4 зависят не только от q , но и от N_x и $\sin m\pi$.

Поэтому, хотя $N_x \neq 0$, но если $\sin m\pi = 0$, то коэффициенты B_2 и B_4 обращаются в нуль, поскольку $q = 0$, если же $\sin m\pi \neq 0$, то коэффициенты B_2 и B_4 не обращаются в нуль и выражаются через N_x . Когда $\sin m\pi = 0$, то это означает, что уравнение W_k удовлетворяет условиям опирания на гранях AC и BD .

Следовательно, для искривлённых плит решение будет получаться разное в зависимости от того, удовлетворяет ли уравнение W_k (уравнение первоначальной искривлённой поверхности плиты) условиям опирания на гранях AC и BD или оно этим условиям не удовлетворяет.

В первом случае (имея в виду, что $q = 0$) все коэффициенты B_1, B_2, B_3 и B_4 равны нулю и W_1 равно только частному решению (см. равенство 38).

Во втором случае только коэффициенты B_1 и B_3 равны нулю, а остальные два коэффициента B_2 и B_4 не равны нулю, поэтому W_1 выражается полным решением уравнения (34). Следовательно, в отличие от плоской плиты искривлённая изгибается не только от поперечной нагрузки q , но и от продольной нагрузки N_x и независимо от того, учитывается или не учитывается деформированное состояние плиты.

Приведенные рассуждения относятся к решению задачи прочности.

Если решается задача устойчивости, то сила N_x является не заданной величиной, а искомой, так как ищется наименьшее критическое значение этой силы.

Обращаясь к уравнениям (39), (40), (41) и (42), видим, что в рассматриваемом случае эти уравнения обращаются в однородные (имея в виду, что $q = 0$), если $\sin m\pi = 0$, т. е. если уравнение W_k удовлетворяет условиям опирания на гранях AC и BD .

Тогда из условия равенства нулю детерминанта уравнений (39), (40), (41) и (42) и учитывая, что в задачах устойчивости β действительная величина, получаем уравнение для определения критического значения сжимающей силы N_x . При этом, как легко убедиться, эта сила в точности совпадает с соответствующей силой для плоской плиты.

Кроме того в криволинейной плите возможно появление критической силы, отличной от соответствующей критической силы для плоской плиты. Указанная критическая сила находится применением частного решения (37) (при $q = 0$), которое в случае наступления потери устойчивости должно обратиться в бесконечность, что возможно,

когда
$$\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2D}\right) = 0, \quad (47)$$

откуда находится критическое значение N_x .

Если $\sin m\pi \neq 0$, т. е. если уравнение W_k не удовлетворяет условиям опирания граней AC и BD , то уравнения (39), (40), (41) и (42) не обращаются в однородные (несмотря на то, что $q = 0$), что свидетельствует об отсутствии потери устойчивости первого рода.

В таком случае может быть рассмотрена потеря устойчивости второго рода, о начале которой судят по наступлению бесконечных перемещений.

Такие перемещения наступят тогда, когда знаменатель в члене:

$$A \frac{\frac{N_x \pi^2}{a^2 D} \sin m\pi}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{4m\pi}{ab}\right)^2 + \left(\frac{64}{a^4} - \frac{8N_x}{a^2 D}\right)},$$

содержащемся в уравнениях (41) и (42), обратится в нуль, что приведёт к уравнению (47), или когда детерминант уравнений (39—42) обратится в нуль.

Следовательно, в данном случае придем к таким же результатам, как в уже выше рассмотренном случае потери устойчивости первого рода.

II. $q \neq 0$; $N_x = 0$.

В этом случае уравнение (33) совпадает с соответствующим уравнением для плоской плиты, следовательно, изгиб искривлённой плиты поперечной нагрузкой не отличается от изгиба плоской плиты такой же нагрузкой при прочих равных условиях.

III. $q \neq 0$; $N_x \neq 0$.

Из равенств (38), (43), (44), (45) и (46) вытекает, что, независимо от того равно ли нулю $\sin m\pi$ или отлично от нуля, выражение W_1 нелинейно зависит от силы N_x .

Это имеет место потому, что при составлении уравнения (3), из которого затем вытекает уравнение (4) и уравнение (33), учитывалась деформация срединной поверхности плиты.

Если эту деформацию не учитывать, то уравнение $W_{\bar{1}}$ будет линейно зависеть от q и от N_x .

При этом та часть решения, которая выражает зависимость $W_{\bar{1}}$ от q , будет совпадать с соответствующим решением плоской плиты.

Помимо изложенного, необходимо обратить внимание на то, что, если плита в направлении оси X не искривлена, если плита, например, имеет цилиндрическую поверхность, то член $A\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}$ в уравнении (33) будет отсутствовать, так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$.

Тогда это уравнение совпадёт с соответствующим уравнением для плоской плиты. Отсюда вытекает, что в цилиндрических плитах силы N_x , действующие вдоль образующей, не оказывают влияние на изгиб плиты¹⁾.

Интерес представляет сравнение уравнения (38) с аналогичным уравнением, полученным С. П. Тимошенко²⁾.

Из этого сравнения вытекает, что С. П. Тимошенко получил не полное решение, а частное решение, т. е. решение (37) при $q = 0$, и это произошло по той причине, что уравнение начальноискривлённой поверхности плиты, представленное С. П. Тимошенко в виде синусоид по X и по Y , удовлетворяет всем условиям опирания плиты. Следовательно, при применении метода С. П. Тимошенко теряется возможность найти полное решение задачи изгиба криволинейных плит.

Пример 2. Попрежнему, как и в примере 1, рассматриваем плиту (рис. 3), нагруженную поперечной нагрузкой q , но, в отличие от плиты в примере 1, нагруженную не силами N_x , а силами $N_y = \text{const}$ на гранях AC и BD .

Уравнение (4) применительно к ребру $\bar{1}$ при $N_x = N_{xy} = 0$ и при заданных условиях на гранях $\bar{0}$ и $\bar{2}$ представляется в следующем виде:

$$\frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} W_{\bar{1}} - \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} + \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} = \frac{N_y}{D} \left[\frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} - A \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi y}{b} \right] + \frac{q}{D}$$

или

$$\frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} - \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} \left[\frac{N_y}{D} + \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right] + \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} W_{\bar{1}} = -A \frac{N_y}{D} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} + \frac{q}{D}. \quad (48)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (48), ищем в форме (35), при этом S определяется из характеристического уравнения:

$$S^4 - \left[\frac{N_y}{D} + \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right] S^2 + \frac{4}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} = 0,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} S_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{N_y}{D} + \frac{16}{a^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{N_y}{D} + \frac{16}{a^2} \right)^2 - \frac{64}{a^4}} \dots \dots \dots (a)} \\ S_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{N_y}{D} + \frac{16}{a^2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{N_y}{D} + \frac{16}{a^2} \right)^2 - \frac{64}{a^4}} \dots \dots \dots (b)} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

¹⁾ В пределах малых деформаций.

²⁾ С. П. Тимошенко. «Курс теории упругости», ч. II, § 58 «Влияние начальных искривлений на изгиб пластинок», 1916.

или
$$S_{1,2} = \pm \frac{2}{a} \sqrt{2(1+k) + 2\sqrt{(1+k)^2 - 1}},$$

$$S_{3,4} = \pm \frac{2}{a} \sqrt{2(1+k) - 2\sqrt{(1+k)^2 - 1}}, \text{ где } k = \frac{N_y a^2}{16D}.$$

Корни $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ могут быть действительными или мнимыми числами в зависимости от знака и величины силы N_y .

Если N_y сила растягивающая и, следовательно, её значение положительное, то корни $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ представляют действительные числа, и тогда общий интеграл однородного уравнения, соответствующего уравнению (48), имеет выражение:

$$\bar{W}_1 = B_1 Ch\bar{\alpha}y + B_2 Sh\bar{\alpha}y + B_3 Ch\bar{\beta}y + B_4 Sh\bar{\beta}y, \quad (50)$$

где: $\bar{\alpha} = |S_{1,2}|$; $\bar{\beta} = |S_{3,4}|$.

Если N_y — сила сжимающая и, следовательно, её значение отрицательное, то для того, чтобы корни $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ были действительными, необходимо выполнение двух неравенств $\frac{N_y}{D} \geq \frac{32}{a^2}$ и $\frac{N_y}{D} \leq \frac{16}{a^2}$ или $k \geq 2$ и $k \leq 1$.

Так как эти два неравенства противоречивы, то остаётся заключить, что корни $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ в случае сжимающей силы N_y не могут быть действительными, а будут комплексными числами: $S_{1,2} = \pm(\alpha_1 + \beta_1 i)$; $S_{3,4} = \pm(\alpha_1 - \beta_1 i)$.

Тогда в случае сжимающей силы N_y общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (48), представится в виде:

$$\bar{W}_1 = \bar{B}_1 Ch\alpha_1 y \cos \beta_1 y + \bar{B}_2 Sh\alpha_1 y \cos \beta_1 y + \bar{B}_3 Sh\alpha_1 y \sin \beta_1 y + \bar{B}_4 Ch\alpha_1 y \sin \beta_1 y. \quad (51)$$

Помимо общего решения (50) или (51) уравнение (48) имеет частное решение:

$$W_1^{(\text{частн})} = \frac{q}{D} \cdot \frac{a^4}{64} - A \frac{\frac{N_y}{D} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{N_y}{D} + \frac{16}{a^2}\right) + \frac{64}{a^2}}$$

или

$$W_1^{(\text{частн})} = \frac{q}{D} \cdot \frac{a^4}{64} - A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (52)$$

Полное решение уравнения (48) получается суммированием решений (50) и (52) или решений (51) и (52).

Следовательно, в первом случае, т. е. когда N_y — сила растягивающая:

$$W_1 = B_1 Ch\bar{\alpha}y + B_2 Sh\bar{\alpha}y + B_3 Ch\bar{\beta}y + B_4 Sh\bar{\beta}y + \frac{qa^4}{64D} - A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (53)$$

Во втором случае, т. е. когда N_y — сила сжимающая:

$$W_1 = \bar{B}_1 Ch\alpha_1 y \cdot \cos \beta_1 y + \bar{B}_2 Sh\alpha_1 y \cos \beta_1 y + \bar{B}_3 Sh\alpha_1 y \cdot \sin \beta_1 y + \bar{B}_4 Ch\alpha_1 y \cdot \sin \beta_1 y + \frac{qa^4}{64D} - A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (54)$$

Постоянные интегрирования \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 , \bar{B}_4 определяются из условий опирания граней AC и BD .

В этой связи рассмотрим два случая опирания граней AC и BD :

Грани AC и BD шарнирно оперты

В этом случае:

1) при $y = 0$; $W_{\bar{i}} = 0$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} B_1 + B_2 + \frac{qa^4}{64D} &= 0 \dots\dots (a) \\ \bar{B}_1 + \frac{qa^4}{64D} &= 0 \dots\dots (б) \end{aligned} \right\}; \quad (55)$$

2) при $y = 0$; $\frac{d^2 W_{\bar{i}}}{dy^2} = 0$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \alpha^2 B_1 + \beta^2 B_2 &= 0 \dots\dots (a) \\ (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \bar{B}_1 + 2\alpha_1 \beta_1 \bar{B}_2 &= 0 \dots\dots (б) \end{aligned} \right\}; \quad (56)$$

3) при $y = b$; $W_{\bar{i}} = 0$

$$\text{или} \quad B_1 Ch \bar{\alpha} b + B_2 Sh \bar{\alpha} b + B_3 Ch \bar{\beta} b + B_4 Sh \bar{\beta} b + \frac{qa^4}{64D} - A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0 \quad (57a)$$

$$\bar{B}_1 Ch \alpha_1 b \cos \beta_1 b + \bar{B}_2 Sh \alpha_1 b \cos \beta_1 b + \bar{B}_3 Sh \alpha_1 b \sin \beta_1 b + \bar{B}_4 Ch \alpha_1 b \sin \beta_1 b + \frac{qa^4}{64D} - A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0; \quad (57б)$$

4) при $y = b$; $\frac{d^2 W_{\bar{i}}}{dy^2} = 0$

$$\text{или} \quad \alpha^2 B_1 Ch \bar{\alpha} b + \alpha^2 B_2 Sh \bar{\alpha} b + \beta^2 B_3 Ch \bar{\beta} b + \beta^2 B_4 Sh \bar{\beta} b + A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^4}{b^2} \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2}; \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} &\bar{B}_1 [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) Ch \alpha_1 b \cos \beta_1 b - 2\alpha_1 \beta_1 Sh \alpha_1 b \sin \beta_1 b] + \bar{B}_2 [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) Sh \alpha_1 b \cos \beta_1 b - \\ &- 2\alpha_1 \beta_1 Ch \alpha_1 b \sin \beta_1 b] + \bar{B}_3 [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) Sh \alpha_1 b \sin \beta_1 b + 2\alpha_1 \beta_1 Ch \alpha_1 b \cos \beta_1 b] + \\ &+ \bar{B}_4 [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) Ch \alpha_1 b \sin \beta_1 b + 2\alpha_1 \beta_1 Sh \alpha_1 b \cos \beta_1 b] + \\ &+ A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^4}{b^2} \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \end{aligned} \quad (58б)$$

Уравнения (55a), (56a), (57a), (58a) относятся к случаю действия на плиту растягивающей силы N_y , уравнения (55б), (56б), (57б), (58б) относятся к случаю действия на плиту сжимающей силы N_y .

Результаты решения системы уравнений (55), (56), (57), (58):

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{qa^4}{64D} \quad (a) \\ B_2 &= -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{qa^4}{64D} \quad (б) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_2 &= \frac{qa^4}{64D} \left(\frac{\bar{\beta}^2}{a^2 - \bar{\beta}^2} \cdot \frac{1}{Sh\bar{\alpha}b} - ctg h\bar{\alpha}b \right) - \\
 &- \frac{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \bar{\beta}^2}{a^2 - \bar{\beta}^2} \cdot A \cdot \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi \cdot \frac{1}{Sh\bar{\alpha}b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \dots \dots \dots (B) \\
 B_4 &= - \frac{\bar{\alpha}^2}{a^2 - \bar{\beta}^2} \cdot \frac{qa^4}{64D} \left(1 + \frac{1}{Sh\bar{\beta}b} \right) + \\
 &+ \frac{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \bar{\alpha}^2}{a^2 - \bar{\beta}^2} \cdot A \cdot \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi \cdot \frac{1}{Sh\bar{\beta}b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \dots \dots \dots (Г) \\
 \bar{B}_1 &= - \frac{qa^4}{64D} \dots \dots \dots (a) \\
 \bar{B}_3 &= \frac{2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} \cdot \frac{qa^4}{64D} \dots \dots \dots (б) \\
 \bar{B}_2 &= A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{R_A}{R} + \frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{R_q}{R} \dots \dots \dots (B) \\
 \bar{B}_4 &= -A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{R'_A}{R} - \frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{R'_q}{R} \dots \dots \dots (Г)
 \end{aligned} \right\} (59)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{B}_2 &= A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{R_A}{R} + \frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{R_q}{R} \dots \dots \dots (B) \\
 \bar{B}_4 &= -A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{R'_A}{R} - \frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{R'_q}{R} \dots \dots \dots (Г)
 \end{aligned} \right\} (60)$$

где:

$$\begin{aligned}
 R_A &= \left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot Ch\alpha_1b \sin \beta_1b + 2\alpha_1\beta_1 Sh\alpha_1b \cos \beta_1b; \\
 R_q &= -(\alpha_1^2 - \beta_1^2) Ch\alpha_1b \sin \beta_1b - 2\alpha_1\beta_1 Sh\alpha_1b \cos \beta_1b (1 - Ch\alpha_1b \cos \beta_1b) + \\
 &+ 2\alpha_1\beta_1 Sh\alpha_1b Ch\alpha_1b \sin^2 \beta_1b + \frac{4\alpha_1^2\beta_1^2}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} \sin \beta_1b \cos \beta_1b (Ch^2\alpha_1b - Sh^2\alpha_1b); \\
 R'_A &= \left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] Sh\alpha_1b \cos \beta_1b - 2\alpha_1\beta_1 Ch\alpha_1b \sin \beta_1b; \\
 R'_q &= -2\alpha_1\beta_1 \sin \beta_1b \cos \beta_1b (Ch^2\alpha_1b - Sh^2\alpha_1b) + \frac{4\alpha_1^2\beta_1^2}{\alpha_1^2 - \beta_1^2} Sh\alpha_1b Ch\alpha_1b; \\
 R &= 2\alpha_1\beta_1 (Sh^2\alpha_1b \cos^2 \beta_1b + Ch^2\alpha_1b \sin^2 \beta_1b).
 \end{aligned}$$

Анализируя выражения (59) и (60), приходим к выводам, подобным выводам в примере (1).

Пользование формулами (59) и (60) может быть значительно облегчено при наличии таблицы, в которой даны значения R, R_A, R_q, R'_A, R'_q и

$$R_k = \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

соответственно значениям m и k .

Если $m = 1$, то $R_k = 0$, и коэффициенты B_k и $\bar{\beta}_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) получаются такими же, как и для плоской плиты. В этом случае уравнение W_1 для криволинейной плиты отличается от соответствующего уравнения W_1 для плоской плиты наличием частного решения:

$$A \frac{k 16 (m\pi)^2 \sin \frac{m\pi y}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1+k) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (\text{см. равенство 52}).$$

Потеря устойчивости криволинейной плиты, когда уравнение поверхности её удовлетворяет её условиям опирания (т. е. когда, например, в случае шарнирного опирания плиты, $\sin \frac{m\pi y}{b}$ обращается в нуль при $y = 0$ и $y = b$), будет отлична от потери устойчивости плоской плиты и наступит при

$$(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16(m\pi)^2(1+k) + 64\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0, \quad (61)$$

откуда находится критическое значение k при замене его на $-k$, поскольку при решении задач устойчивости речь идёт о сжимающей силе N_y .

Уравнение (61) по своему смыслу аналогично уравнению (47).

Грани AC и BD абсолютно защемлены

Поскольку в данном случае так же, как и в предыдущем, соблюдаются условия: при $y = 0$ $W_1^- = 0$ и при $y = b$ $W_1^- = 0$, то сохраняются соответствующие им уравнения (55) и (57). Изменению подлежат уравнения (56) и (58), которые заменяются уравнениями, вытекающими из условий:

1) при $y = 0$ $\frac{dW_1^-}{dy} = 0$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}B_2 - \bar{\beta}B_4 - A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^2}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16(m\pi)^2(1+k) + 64\left(\frac{b}{a}\right)^2} &= 0 \dots \dots (a) \\ \alpha_1 \bar{B}_2 + \beta_1 \bar{B}_4 - A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^2}{b}}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16(m\pi)^2(1+k) + 64\left(\frac{b}{a}\right)^2} &= 0 \dots \dots (b) \end{aligned} \right\} (62)$$

2) при $y = b$; $\frac{dW_1^-}{dy} = 0$ или $B_1 \bar{\alpha} Sh \bar{x} b + B_2 \bar{\alpha} Ch \bar{x} b + B_3 \bar{\beta} Sh \bar{\beta} b + B_4 \bar{\beta} Ch \bar{\beta} b -$

$$- A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^2}{b} \cos m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16(m\pi)^2(1+k) + 64\left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0. \quad (63)$$

$$\bar{B}_1 (-\beta_1 Ch \alpha_1 b \sin \beta_1 b + \alpha_1 Sh \alpha_1 b \cos \beta_1 b) + \bar{B}_2 (-\beta_1 Sh \alpha_1 b \sin \beta_1 b + \alpha_1 Ch \alpha_1 b \cos \beta_1 b) +$$

$$+ \bar{B}_3 (\beta_1 Sh \alpha_1 b \cos \beta_1 b + \alpha_1 Ch \alpha_1 b \sin \beta_1 b) + \bar{B}_4 (\beta_1 Ch \alpha_1 b \cos \beta_1 b + \alpha_1 Sh \alpha_1 b \sin \beta_1 b) -$$

$$- A \frac{k 16 \frac{(m\pi)^2}{b} \cos m\pi}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16(m\pi)^2(1+k) + 64\left(\frac{b}{a}\right)^2} = 0. \quad (63a)$$

Совместное решение уравнений (55), (57), (62a) и (63) относительно коэффициентов B_n ($n = 1, 2, 3, 4$) приводит к следующим результатам:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{qa^4}{64D} R_{1,q} + A \cdot r_k \cdot R_{1,A} \right) \dots \dots \dots (a) \\ B_2 &= \frac{1}{R_2} \left(\frac{qa^4}{64D} R_{2,q} + A \cdot r_k \cdot R_{2,A} \right) \dots \dots \dots (b) \\ B_3 &= -\frac{qa^4}{64D} \left(1 + \frac{R_{1,q}}{R_1} \right) - A \cdot r_k \frac{R_{1,A}}{R_1} \dots \dots \dots (в) \\ B_4 &= -\frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \cdot \frac{R_{2,q}}{R_2} + A \cdot r_k \left(\frac{m\pi}{\bar{\beta}b} - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \cdot \frac{R_{2,A}}{R_2} \right) \dots \dots \dots (г) \end{aligned} \right\} (64)$$

где:

$$R_1 = \bar{\alpha} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b)^2 - (\alpha Sh\bar{\alpha}b - \bar{\beta} Sh\bar{\beta}b) \left(Sh\bar{\alpha}b - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} Sh\bar{\beta}b \right)$$

$$R_{1,q} = (Ch\bar{\beta}b - 1) \bar{\alpha} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) - (\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b) Sh\bar{\beta}b$$

$$R_{1,A} = \left(\sin m\pi - \frac{m\pi}{\bar{\beta}b} \right) \bar{\alpha} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) - \frac{m\pi}{\bar{\beta}b} (\cos m\pi - Ch\bar{\beta}b) (\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b)$$

$$r_k = \frac{k \cdot 16 (m\pi)^2}{(m\pi)^4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 16 (m\pi)^2 (1 + k) + 64 \left(\frac{b}{a} \right)^2}$$

$$R_2 = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) (\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b) \left[(\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b) \frac{1}{\bar{\beta}} (\bar{\alpha} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\beta} Sh\bar{\beta}b) - \bar{\alpha} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b)^2 \right]$$

$$R_{2,q} = \bar{\alpha} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) (\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b) \left[(Ch\bar{\beta}b - 1) \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} Sh\bar{\alpha}b - Sh\bar{\beta}b \right) - (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) Sh\bar{\beta}b \right]$$

$$R_{2,A} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) (\bar{\beta} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\alpha} Sh\bar{\beta}b) \left[\left(\sin m\pi - \frac{m\pi}{\bar{\beta}b} \right) (\bar{\alpha} Sh\bar{\alpha}b - \bar{\beta} Sh\bar{\beta}b) - \frac{m\pi}{b} (\cos m\pi - Ch\bar{\beta}b) (Ch\bar{\alpha}b - Ch\bar{\beta}b) \right]$$

Пример 3. Поверхность искривлённой плиты по предыдущему задана уравнением:

$$W_k = A \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Нагрузка $q = \text{const}$.

Плита шарнирно опёрта по всему контуру, при этом опирание на гранях AB и CD таково, что невозможны поступательные перемещения v точек этих граней вдоль оси y .

В таком случае на гранях AB и CD возникают горизонтальные составляющие реакции — распоры N_y , которые, в отличие от сил N_y , в примере 2 являются силами неизвестными. Наша цель — определить эти силы.

Вводим одну линию деления \bar{I} (рис. 3). Распор на конечных точках этой линии обозначаем $N_y^{(i)}$.

Поскольку искомым распор $N_y^{(i)}$ является силой сжатия, то прогибы точек линии \bar{I} выражаются уравнением (54), в котором постоянные интегрирования B_n ($n = 1, 2, 3, 4$) определяются равенствами (60), так как рассматриваемая плита шарнирно опёрта на гранях AC и BD .

В уравнениях (54) и (60) неизвестным является коэффициент k , необходимый для определения силы $N_y^{(i)}$. Дополнительное уравнение для определения этой силы составляется, исходя из следующих соображений: до деформации плиты разница между длиной изогнутой линии \bar{I} — (l_0) и длиной хорды этой линии b :

$$\delta l_0 = \frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dW_k^{(i)}}{dy} \right)^2 dy. \quad (65)$$

После деформации плиты разница между длиной изогнутой линии \bar{I} и её хордой b :

$$\delta l = \frac{1}{2} \int_0^b \left[\frac{dW_k^{(i)} + W_{\bar{I}}}{dy} \right]^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^b \left[\left(\frac{dW_k^{(i)}}{dy} \right)^2 + 2 \frac{dW_k^{(i)}}{dy} \cdot \frac{dW_{\bar{I}}}{dy} + \left(\frac{dW_{\bar{I}}}{dy} \right)^2 \right] dy. \quad (66)$$

Следовательно, сближение концов линии 1 за счёт упругого изгиба первоначальноискривлённой плиты:

$$\delta l_1 = \delta l - \delta l_0 = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^b \left[\left(\frac{dW_k^{(i)}}{dy} \right)^2 + 2 \frac{dW_k^{(i)}}{dy} \cdot \frac{dW_{\bar{i}}}{dy} + \left(\frac{dW_{\bar{i}}}{dy} \right)^2 \right] dy - \int_0^b \left(\frac{dW_k^{(i)}}{dy} \right)^2 dy \right\}$$

или

$$\delta l_1 = \frac{1}{2} \int_0^b \left[\left(\frac{dW_{\bar{i}}}{dy} \right)^2 + 2 \frac{dW_k^{(i)}}{dy} \cdot \frac{dW_{\bar{i}}}{dy} \right] dy. \quad (67)^1$$

Подставив в (67) вместо W_k его выражения (54) и вместо $W_{\bar{i}} - A \sin \frac{\pi y}{b}$ и приняв $\delta l_1 = 0$, поскольку отсутствует сближение концов линии, получим уравнение относительно k или, что то же, относительно $N_y^{(i)}$.

Это уравнение представляет собой сложное трансцендентное уравнение относительно k , которое может быть решено применением последовательных попыток.

Определение k можно значительно упростить, если прибегнуть к нижеприводимому приближенному решению уравнения (48).

Предположим, что линия \bar{i} , деформируясь, изогнётся по кривой

$$W_{\bar{i}} = A_{\bar{i}} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (68)$$

удовлетворяющей условиям опирания линии \bar{i} .

Нагрузку q на линии \bar{i} разложим в ряд Фурье по синусам. Тогда, остановившись на первом члене этого ряда, будем иметь

$$q = C_1 \sin \frac{\pi y}{b},$$

где

$$C_1 = \frac{2}{b} \int_0^b q \sin \frac{\pi y}{b} dy = -\frac{2}{b} q \frac{b}{\pi} (-2) \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{4q}{\pi}.$$

Подставив в уравнение (48) выражения $W_{\bar{i}}$ и q и положив в правой части этого уравнения $m = 1$, получаем:

$$A_1 \left[\left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{16}{a^2} (k+1) + \frac{64}{a^4} \right] = -Ak \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{16}{a^2} + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D},$$

откуда:

$$A_1 = \frac{-Ak \left(\frac{4\pi}{ab} \right)^2 + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D}}{\left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \left(\frac{4\pi}{ab} \right)^2 (k+1) + \frac{64}{a^4}}; \quad \text{или} \quad A_1 = \frac{-Ak 16\pi^2 + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D} a^2 b^2}{\pi^4 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 16\pi^2 (k+1) + 64 \left(\frac{b}{a} \right)^2}. \quad (69)$$

Теперь, обращаясь к равенству (67) и полагая $\delta l_1 = 0$, получаем уравнение относительно k :

$$\int_0^b \left[\left(A_1 \frac{\pi}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \right)^2 + 2A A_1 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi y}{b} \right)^2 \right] dy = 0$$

или

$$\left(\frac{\pi}{b} \right)^2 A_1 (A_1 + 2A) \int_0^b \left(\cos \frac{\pi y}{b} \right)^2 dy = 0,$$

¹⁾ Данное уравнение подобно аналогичному уравнению в теории слегка искривлённых стержней — С. П. Тимошенко, «Курс теории упругости», ч. II, § 14, 1916.

откуда

$$A_1 = 0^1) \text{ или } A_1 + 2A = 0. \quad (70)$$

После подстановки (69) в (70) имеем:

$$\frac{-A k 16\pi^2 + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D} a^2 b^2}{\pi^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 16\pi^2 (k+1) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2} + 2A = 0$$

или

$$\pi^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 8\pi^2 (k+2) + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{2}{\pi} \frac{q}{D} \frac{a^2 b^2}{A} = 0,$$

откуда, при замене k на $-k$, находим

$$k = \left[\frac{2}{\pi} \frac{q}{D} \frac{a^2 b^2}{A} + (\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 64 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 16\pi^2 \right] \frac{1}{8\pi^2}. \quad (71)$$

Пример 4. Условия данного примера такие же, как условия примера 3, с тем лишь дополнением, что плита, кроме нагрузки $q = \text{const}$, несёт нагрузку $N_x = \text{const}$.

Уравнение (4) применительно к линии \bar{I} представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W_{\bar{I}}}{dy^4} - \frac{d^2 W_{\bar{I}}}{dy^2} (k_y + 1) \frac{16}{a^2} + \frac{64}{a^4} (1 - 2k_x) W_{\bar{I}} = \\ = A \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{D} \left[N_x + N_y \left(\frac{ma}{b}\right)^2 \right] \sin \frac{m\pi y}{b} + \frac{q}{D}, \end{aligned} \quad (72)$$

где:

$$k_y = \frac{N_y a^2}{16D}; \quad k_x = \frac{N_x a^2}{16D}.$$

Силы N_x, N_y предполагаются силами сжатия, поэтому величины k_x, k_y, N_x, N_y являются отрицательными.

Поскольку сила N_y является неизвестной силой, то, чтобы избежать сложного решения, целесообразно прибегнуть к приближенному решению уравнения (72).

Тогда, поступая так же, как и в примере 3, находим:

$$W_{\bar{I}} = A_1 \sin \frac{\pi y}{b} = \frac{A 16\pi^2 \left[k_x + k_y \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right] + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D} a^4}{\left(\frac{\pi a}{b}\right)^4 + 16 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2 (k_y + 1) + 64 (1 - 2k_x)} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (73)$$

Для определения k_y обращаемся к уравнению (70), которое после замены $W_{\bar{I}}$ его выражением (73) обращается в нижеприводимое уравнение относительно k_y :

$$\begin{aligned} A 16\pi^2 \left[k_x + k_y \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right] + \frac{4}{\pi} \frac{q}{D} + 2A \left[\left(\frac{\pi a}{b}\right)^4 + \right. \\ \left. + 16 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2 (k_y + 1) + 64 (1 - 2k_x) \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда, при замене k_y на $-k_y$,

$$k_y = \frac{k_x (16\pi^2 - 256)}{48 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2} + \frac{2 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^4 + 32 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2 + 128}{48 \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2} + \frac{qa^4}{DA} \frac{1}{12\pi \left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}. \quad (74)$$

¹⁾ Это уравнение неприемлемо, так как оно может быть удовлетворено только при положительном k , что противоречит смыслу задачи.

Изгиб искривлённых плит, подкреплённых рёбрами одного направления

Относим свои рассуждения к плите (рис. 4), подкреплённой тремя рёбрами 1, 2, 3 на взаимно равных расстояниях. Плита цилиндрическая и поверхность её выражается уравнением $W_k = A_k \cos \frac{\pi y}{b}$.

Она имеет нагрузку: $\frac{N_x}{q} = \text{const}$. Что касается опирания плиты, то здесь рассматриваются два варианта:

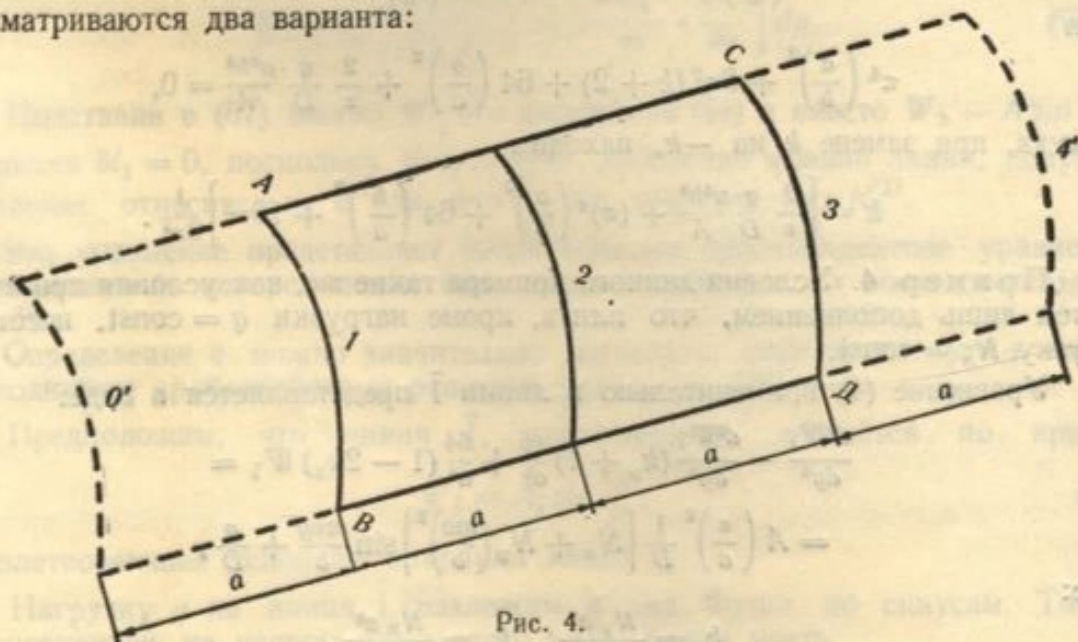


Рис. 4.

1. Плита шарнирно оперта по всему контуру.
 2. Плита абсолютно защемлена по всему контуру.
- Кроме того рассматриваем случаи безраспорной плиты ($N_v = 0$) и распорной ($N_v \neq 0$).

Вводим три линии $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, разделяющие плиту на полосы, расположенные над рёбрами 1, 2, 3, и две фиктивные линии $\bar{0}'$ и $\bar{4}'$.

Из условий симметрии вытекает $W_{\bar{1}} = W_{\bar{3}}$; $W_{\bar{0}'} = W_{\bar{4}'}$; из условий опирания плиты вытекает:

- а) для шарнирно опёртой плиты

$$W_{\bar{0}'} = W_{\bar{4}'} = -W_{\bar{1}}; \quad W_{\bar{0}} = W_{\bar{4}} = 0;$$

- б) для защемлённой плиты

$$W_{\bar{0}'} = W_{\bar{1}}; \quad W_{\bar{0}} = W_{\bar{4}} = 0.$$

На рёбрах подкрепления 1, 2 и 3 возникают реактивные нагрузки, величина которых на единицу площади равна на ребре 1 и 3:

$$q_1 = q_3 = \frac{B_1}{b_1} \cdot \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4}; \quad \text{на ребре 2: } q_2 = \frac{B_2}{b_2} \cdot \frac{d^4 W_{\bar{2}}}{dy^4},$$

где:

$B_1 = E_1 I_1$ — жёсткость ребра 1;

$B_2 = E_2 I_2$ — жёсткость ребра 2;

b_1 — ширина ребра 1;

b_2 — ширина ребра 2.

Для шарнирно опёртой плиты применением уравнения (4) к линиям $\bar{1}$ и $\bar{2}$ находим:

Линия $\bar{1}$

$$\frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} + \frac{2}{d^2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{0}} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}) + \frac{1}{d^4} (W_{\bar{0}}' - 4W_{\bar{0}} + 6W_{\bar{1}} - 4W_{\bar{2}} + W_{\bar{3}}) =$$

$$= \frac{1}{D} \left[N_x \frac{W_{\bar{0}} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}}{d^2} + N_y^{(1)} \left(\frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} - A_k \frac{\pi^2}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) - \frac{B_1}{b_1} \cdot \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} + q \right]$$

или, учитывая условия симметрии и условия опирания плиты и выполнив элементарные преобразования, имеем:

$$\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} - \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{N_y^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2} \right) \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} + \frac{2}{d^2} \cdot \frac{d^2 W_{\bar{2}}}{dy^2} + \frac{1}{d^4} \left[\left(6 + 2d^2 \frac{N_x}{D} \right) W_{\bar{1}} - \right.$$

$$\left. - \left(d^2 \frac{N_x}{D} + 4 \right) W_{\bar{2}} \right] = \frac{q}{D} - \frac{N_y^{(1)}}{D} A_k \frac{\pi^2}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad (75)$$

где $d = \frac{a}{4}$;

Линия $\bar{2}$

$$\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) \frac{d^4 W_{\bar{2}}}{dy^4} - \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{d^2 N_y^{(2)}}{2D} \right) \frac{d^2 W_{\bar{2}}}{dy^2} + \frac{4}{d^2} \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} + \frac{1}{d^4} \left[-W_{\bar{1}} \left(8 + 2 \frac{d^2 N_x}{D} \right) + \right.$$

$$\left. + W_{\bar{2}} \left(6 + 2 \frac{d^2 N_x}{D} \right) \right] = \frac{q}{D} - \frac{N_y^{(2)}}{D} A_k \frac{\pi^2}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (76)$$

Уравнения (75) и (76) относятся к распорной криволинейной плите.

Если плита безраспорная, то необходимо в этих уравнениях положить $N_y = 0$, и тогда они не будут отличаться от подобных уравнений для плоской плиты.

Решение однородных уравнений, соответствующих уравнениям (75) и (76), ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} W_{\bar{1}} &= A e^{s y} \dots \dots \dots (a) \\ W_{\bar{2}} &= B e^{s y} \dots \dots \dots (b) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

После подстановки в (75) и (76) получаем:

$$A \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) s^4 - \frac{2s^2}{d^2} \left(2 + \frac{N_y^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2} \right) + \frac{6 + 2d^2 \frac{N_x}{D}}{d^4} \right] + B \left(\frac{2s^2}{d^2} - \frac{d^2 \frac{N_x}{D} + 4}{d^4} \right) = 0, \quad (78)$$

$$A \left(\frac{4s^2}{d^2} - \frac{8 + \frac{2d^2 N_x}{D}}{d^4} \right) + B \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) s^4 - \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{d^2 N_y^{(2)}}{2D} \right) s^2 + \frac{6 + \frac{2d^2 N_x}{D}}{d^4} \right] = 0. \quad (79)$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы уравнений (78) и (79) вытекает:

$$\left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) s^4 - \frac{2s^2}{d^2} \left(2 + \frac{N_y^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2} \right) + \frac{6 + 2d^2 \frac{N_x}{D}}{d^4} \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) s^4 - \right.$$

$$\left. - \frac{2s^2}{d^2} \left(2 + \frac{N_y^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2} \right) + \frac{6 + \frac{2d^2 N_x}{D}}{d^4} \right] - \left(\frac{2s^2}{d^2} - \frac{4 + \frac{N_x d^2}{D}}{d^4} \right) \cdot 2 \left(\frac{2s^2}{d^2} - \frac{4 + \frac{N_x d^2}{D}}{d^4} \right) = 0. \quad (80)$$

Если заданы жёсткости B_1 , B_2 и силы N_x , $N_y^{(1)}$, $N_y^{(2)}$, то решение уравнения (80) относительно s не встречает затруднения.

Для рассматриваемой здесь плиты предполагаются заданными жёсткости B_1 , B_2 и сила N_x . Силы $N_y^{(1)}$ и $N_y^{(2)}$ являются силами распора и наперёд не заданы.

Прямой путь определения этих сил приведёт к сложным уравнениям, на что уже указывалось в примере 3, поэтому для определения сил $N_v^{(1)}$ и $N_v^{(2)}$ применим приближённый метод, использованный уже в решении примера 3. Нагрузку q раскладываем в ряд Фурье по $\cos \frac{m\pi y}{b}$, прогибы W_1 и W_2 ищем в виде тригонометрических рядов:

$$W_1 = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$W_2 = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi y}{b}.$$

Тогда, останавливаясь на первых членах упомянутых рядов, имеем

$$q = q_1 \cos \frac{\pi y}{b}, \quad (81)$$

где:

$$q_1 = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q \cos \frac{\pi y}{b} dy = \frac{2q}{b} \cdot \frac{b}{\pi} \left| \sin \frac{\pi y}{b} \right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{4q}{\pi}$$

$$W_1 = C_1 \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (82)$$

$$W_2 = D_1 \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (83)$$

Подставив (81), (82), (83) в (75) и (76), получаем:

$$\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 C_1 + \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{N_v^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 C_1 - \frac{2}{d^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + D_1 + \frac{1}{d^4} \left[\left(6 + 2d^2 \frac{N_x}{D}\right) C_1 - \left(d^2 \frac{N_x}{D} + 4\right) D_1 \right] = \frac{4q}{\pi D} - \frac{N_v^{(1)}}{D} A_k \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (84)$$

$$\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 D_1 + \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{d^2 N_v^{(2)}}{2D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 D_1 - \frac{4}{d^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 C_1 + \frac{1}{d^4} \left[-C_1 \left(8 + 2 \frac{d^2 N_x}{D}\right) + D_1 \left(6 + 2 \frac{d^2 N_x}{D}\right) \right] = \frac{4q}{\pi D} - \frac{N_v^{(2)}}{D} A_k \frac{\pi^2}{b^2}. \quad (85)$$

После элементарных преобразований уравнения (84) и (85) приводятся к следующему виду:

$$C_1 \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{N_v^{(1)}}{D} \cdot \frac{d^2}{2}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \frac{1}{d^4} \left(6 + 2d^2 \frac{N_x}{D}\right) \right] - D_1 \left[\frac{2}{d^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \frac{1}{d^4} \left(4 + d^2 \frac{N_x}{D}\right) \right] = \frac{4q}{\pi D} - \frac{N_v^{(1)}}{D} A_k \left(\frac{\pi}{b}\right)^2. \quad (86)$$

$$-C_1 \left[\frac{4}{d^2} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \frac{1}{d^4} \left(8 + 2 \frac{N_x d^2}{D}\right) \right] + D_1 \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2}{d^2} \left(2 + \frac{N_v^{(2)}}{2D} d^2\right) - \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{1}{d^4} \left(6 + 2 \frac{d^2 N_x}{D}\right) \right] = \frac{4q}{\pi D} - \frac{N_v^{(2)}}{D} A_k \left(\frac{\pi}{b}\right)^2. \quad (87)$$

В результате решения этих уравнений относительно коэффициентов C_1 и D_1 находим:

$$C_1 = \frac{\left(\frac{4q}{\pi D} - A_k \cdot k_v^{(1)} \frac{\pi^2}{b^2 d^2}\right) \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2\pi^2}{d^2 b^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_v^{(2)}\right) + \frac{1}{d^4} \left(6 + 2k_x\right) \right]}{\Delta} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{4q}{\pi D} - A_h \cdot \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(\bar{2})}\right) \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x)\right]}{\Delta} \quad (88)$$

$$D_1 = \frac{\left(\frac{4q}{\pi D} - A_h \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(\bar{2})}\right) \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2\pi^2}{d^2 b^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(\bar{1})}\right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x)\right]}{\Delta} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{4q}{\pi D} - A_h \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(\bar{1})}\right) \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x)\right]}{\Delta}, \quad (89)$$

где:

$$\Delta = \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2\pi^2}{d^2 b^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(\bar{1})}\right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x)\right] \cdot \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D}\right) \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 + \frac{2\pi^2}{d^2 b^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(\bar{2})}\right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x)\right] - \left[\frac{2\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (4 + k_x)\right] \cdot \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x)\right];$$

$$k_y^{(\bar{1})} = \frac{N_y^{(\bar{1})} d^2}{D}; \quad k_y^{(\bar{2})} = \frac{N_y^{(\bar{2})} d^2}{D}; \quad k_x = \frac{N_x d^2}{D}.$$

Коэффициенты C_1, D_1 , а следовательно, и уравнения прогибов $W_{\bar{1}}, W_{\bar{2}}$, содержат два неизвестных $k_y^{(\bar{1})}$ и $k_y^{(\bar{2})}$, которые определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} \delta I_{\bar{1}} &= 0 \\ \delta I_{\bar{2}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Из этих условий согласно (66) получаем следующие уравнения для определения $k_y^{(\bar{1})}$ и $k_y^{(\bar{2})}$:

$$\delta I_{\bar{1}} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left(\frac{dW_{\bar{1}}}{dy}\right)^2 + 2 \frac{dW_{\bar{1}}}{dy} \cdot \frac{dW_{\bar{1}}^{(\bar{1})}}{dy} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[C_1^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 + 2A_h C_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 \right] dy = 0$$

или

$$C_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 (C_1 + 2A_h) \int_{-b/2}^{b/2} \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 dy = 0,$$

откуда:

$$C_1 = 0 \quad (91)$$

или

$$C_1 + 2A_h = 0 \quad (92)$$

$$\delta I_{\bar{2}} = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\left(\frac{dW_{\bar{2}}}{dy}\right)^2 + 2 \frac{dW_{\bar{2}}}{dy} \cdot \frac{dW_{\bar{2}}^{(\bar{2})}}{dy} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \left[D_1^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 + 2A_h D_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 \right] dy = 0$$

или

$$D_1 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 (D_1 + 2A_h) \int_{-b/2}^{b/2} \left(\sin \frac{\pi y}{b}\right)^2 dy = 0,$$

откуда:

$$D_1 = 0 \quad (93)$$

или

$$D_1 + 2A_h = 0. \quad (94)$$

Так же, как и в примере 3, реальные результаты для $k_y^{(1)}$ и $k_y^{(2)}$ получаются, если решить уравнения (92) и (94). Подставив в эти уравнения вместо C_1 и D_1 их выражения (88) и (89) и полагая, что $\Delta \neq 0$, приходим к следующим уравнениям для определения $k_y^{(1)}$ и $k_y^{(2)}$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4q}{\pi D} - A_k \cdot k_y^{(1)} \frac{\pi^2}{b^2 d^2} \right) \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(2)} \right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] + \\ & + \left(\frac{4q}{\pi D} - A_k \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(2)} \right) \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x) \right] + \\ & + 2A_k \left\{ \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(1)} \right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(2)} \right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] - \left[\frac{2\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (4 + k_x) \right] \cdot \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4q}{\pi D} - A_k \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(2)} \right) \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(1)} \right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] + \\ & + \left(\frac{4q}{\pi D} - A_k \frac{\pi^2}{b^2 d^2} k_y^{(1)} \right) \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x) \right] + 2A_k \left\{ \left[\left(1 + \frac{B_1}{b_1 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \right. \right. \\ & + \left. \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(1)} \right) + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] \cdot \left[\left(1 + \frac{B_2}{b_2 D} \right) \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + \frac{2\pi^2}{b^2 d^2} \left(2 + \frac{1}{2} k_y^{(2)} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{d^4} (6 + 2k_x) \right] - \left[\frac{2\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (4 + k_x) \right] \left[\frac{4\pi^2}{b^2 d^2} + \frac{1}{d^4} (8 + 2k_x) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Анизотропные искривлённые плиты (случай ортотропности)

Когда оси упругости 1, 2, 3 совпадают с осями координат X, Y, Z , то дифференциальное уравнение срединной поверхности плиты, имеющей начальное искривление W_k , представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q + N_x \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial x^2} + \\ + N_y \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (97)$$

где:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}; \quad 2D_3 = D_1 \nu_{12} + D_2 \nu_{21} + 4(GI)_{12}.$$

Если оси упругости 1, 2, 3 направлены под углом в 45° к осям координат X, Y, Z , то уравнение (97) заменяется уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12} \left[\beta_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 4\beta_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 4\beta_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial y^3 \partial x} \right] = \\ = q + N_x \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (W + W_k)}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (98)$$

где:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{C_{11} \cdot C_{66} - C_{16}^2}{[C_{66}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{16}^2](C_{11} - C_{12})}$$

$$\beta_{12} = \frac{C_{12} \cdot C_{66} - C_{16}^2}{[C_{66}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{16}^2](C_{11} - C_{12})}$$

$$\beta_{16} = \beta_{26} = -\frac{C_{16}}{C_{66}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{16}^2}$$

$$\beta_{66} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{66}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{16}^2}$$

$$C_{11} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$C_{12} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$C_{16} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)$$

$$C_{66} = \frac{1}{E_1} + 2 \frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{1}{E_2}$$

E_1 — модуль упругости в направлении оси упругости 1;

E_2 — модуль упругости в направлении оси упругости 2;

G_{12} — модуль сдвига в плоскости 1—2;

ν_{21} — коэффициент Пуассона в направлении оси 1 для напряжений σ_y ;

ν_{12} — коэффициент Пуассона в направлении оси 2 для напряжений σ_x ; $\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}$.

После того как плита разделена на полосы линиями $\bar{1}, \bar{2}, \dots, n$ на взаимно равных расстояниях d уравнения (97) и (98) в частных производных заменяются системой дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, составляемых по типу нижеприводимого уравнения для линии n :

$$D_1 \frac{1}{d^4} [6W_{\bar{n}} - 4(W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}-1}) + (W_{\bar{n}-2} + W_{\bar{n}+2})] D_2 \frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dy^4} +$$

$$+ D_3 \frac{2}{d^2} \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}) = N_x^{(n)} \left[\left(\frac{d^2 W_h}{dx^2} \right)_{\bar{n}} + \frac{W_{\bar{n}+1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}}{d^2} \right] +$$

$$+ N_y^{(n)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_h}{\partial y^2} \right)_{\bar{n}} + \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} \right] + 2N_{xy}^{(n)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_h}{\partial x \partial y} \right)_{\bar{n}} + \frac{d}{dy} \left(\frac{W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}}{2d} \right) \right]. \quad (99)$$

$$\frac{h^3}{12} \left[\frac{\beta_{11}}{d^4} [6W_{\bar{n}} - 4(W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}-1}) + (W_{\bar{n}-2} + W_{\bar{n}+2})] + \frac{2(\beta_{12} + 2\beta_{66})}{d^2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{n}+1} -$$

$$- 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}) + \beta_{22} \frac{d^4 W_{\bar{n}}}{dy^4} + \frac{\beta_{16}}{d^2} \frac{d}{dy} [4W_{\bar{n}-1} + 2(-W_{\bar{n}-1} + W_{\bar{n}} - W_{\bar{n}+1} + W_{\bar{n}+2} -$$

$$- W_{\bar{n}-2})] + \frac{2\beta_{26}}{d} \frac{d^3}{dy^3} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}) \right] = N_x^{(n)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_h}{\partial x^2} \right)_{\bar{n}} + \frac{W_{\bar{n}+1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}}{d^2} \right] +$$

$$+ N_y^{(n)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_h}{\partial y^2} \right)_{\bar{n}} + \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} \right] + 2N_{xy}^{(n)} \left[\left(\frac{\partial^2 W_h}{\partial x \partial y} \right)_{\bar{n}} + \frac{d}{dy} \left(\frac{W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}}{2d} \right) \right]. \quad (100)$$

Уравнение (99) относится к ортотропной плите, в которой оси упругости совпадают с осями координат, а уравнение (100) относится к ортотропной плите, в которой оси упругости составляют с осями координат 45° .

Формулы для определения усилий и напряжений в точках линии n сохраняются такими же, как и для плоских плит, а именно для случая, когда направления осей x и y совмещены с главными осями, имеем:

$$\sigma_x = - \frac{E_1 z}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left(\frac{W_{\bar{n}+1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}}{d^2} + \nu_{21} \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} \right). \quad (101)$$

$$\sigma_y = - \frac{E_2 z}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left(\frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \nu_{12} \frac{W_{\bar{n}+1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}-1}}{d^2} \right). \quad (102)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{G_{12} \cdot z}{d} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}+1} - W_{\bar{n}-1}). \quad (103)$$

$$\tau_{xz} = - \frac{h^2 - 4z^2}{8} \left\{ \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left[\frac{-W_{\bar{n}-2} - 2(-W_{\bar{n}-1} + W_{\bar{n}+1}) + W_{\bar{n}+2}}{2d^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\nu_{12}}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (-W_{\bar{n}-1} + W_{\bar{n}+1}) \right] + \frac{G_{12}}{d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (-W_{\bar{n}-1} + W_{\bar{n}+1}) \right\}. \quad (104)$$

$$\tau_{yz} = - \frac{h^2 - 4z^2}{8} \left\{ \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{\nu_{12}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2G_{12}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{\bar{n}-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{\bar{n}+1}) \right\}. \quad (105)$$

$$Q_{xz} \frac{12}{h^3} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left[\frac{-W_{n-2} - 2(-W_{n-1} + W_{n+1}) + W_{n+2}}{2d^3} + \frac{\nu_{21}}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (-W_{n-1} + W_{n+1}) \right] + \frac{2G_{12}}{d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (-W_{n-1} + W_{n+1}). \quad (106)$$

$$Q_{yz} \frac{12}{h^3} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \left[\frac{d^3 W_{\bar{n}}}{dy^3} + \frac{\nu_{12}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{n+1}) \right] + \frac{4G_{12}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{n+1}). \quad (107)$$

Если оси упругости составляют с осями координат 45° , то:

$$\sigma_x = -z \left(B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right). \quad (108)$$

$$\sigma_y = -z \left(B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right). \quad (109)$$

$$\tau_{xy} = -z \left(B_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right). \quad (110)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{h^2 - 4z^2}{8} \left[B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right]. \quad (111)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{h^2 - 4z^2}{8} \left[B_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right]. \quad (112)$$

$$Q_{xz} = 4D_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}. \quad (113)$$

$$Q_{yz} = 2D_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3}. \quad (114)^1$$

где:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\Delta} (c_{22} \cdot c_{66} - c_{26}^2); & B_{22} &= \frac{1}{\Delta} (c_{11} \cdot c_{66} - c_{16}^2) \\ B_{12} &= \frac{1}{\Delta} (c_{16} \cdot c_{26} - c_{12} \cdot c_{66}); & B_{66} &= \frac{1}{\Delta} (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2) \\ B_{16} &= \frac{1}{\Delta} (c_{12} \cdot c_{26} - c_{22} \cdot c_{16}); & B_{26} &= \frac{1}{\Delta} (c_{12} \cdot c_{16} - c_{11} \cdot c_{26}) \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{vmatrix}.$$

Постоянные D_{ij} связаны с B_{ij} : $D_{ij} = B_{ij} \cdot \frac{h^3}{12}$.

При применении конечных разностей только по переменной x уравнения (108) — (114) заменяются нижеприводимыми уравнениями, составленными для линии n :

$$\sigma_x = -z \left[B_{11} \frac{W_{n-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{n+1}}{d^2} + B_{12} \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{B_{16}}{d} \cdot \frac{d(W_{n+1} - W_{n-1})}{dy} \right]. \quad (115)$$

$$\sigma_y = -z \left[B_{12} \frac{W_{n-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{n+1}}{d^2} + B_{22} \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{B_{26}}{d} \cdot \frac{d(W_{n+1} - W_{n-1})}{dy} \right]. \quad (116)$$

$$\tau_{xy} = -z \left[B_{16} \frac{W_{n-1} - 2W_{\bar{n}} + W_{n+1}}{d^2} + B_{26} \frac{d^2 W_{\bar{n}}}{dy^2} + \frac{B_{66}}{d} \cdot \frac{d(W_{n+1} - W_{n-1})}{dy} \right]. \quad (117)$$

¹⁾ Уравнения (108), (114) заимствованы у С. Г. Лехницкого «Анизотропные пластинки», 1947 г.

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & -\frac{h^2 - 4z^2}{8} \left[B_{11} \frac{-W_{n-2} - 2(-W_{n-1} + W_{n+1}) + W_{n+2}}{2d^3} + \right. \\ & + \frac{3B_{16}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) + \\ & \left. + \frac{B_{12} + 2B_{66}}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{n+1} - W_{n-1}) + B_{26} \frac{d^3 W_n}{dy^3} \right]. \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{h^2 - 4z^2}{8} \left[B_{16} \frac{-W_{n-2} - 2(-W_{n-1} + W_{n+1}) + W_{n+2}}{2d^3} + \right. \\ & + \frac{B_{12} + 2B_{66}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) + \\ & \left. + \frac{3B_{26}}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{n+1} - W_{n-1}) + B_{22} \frac{d^3 W_n}{dy^3} \right]. \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} Q_{xz} = & \frac{4D_{16}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) + 2D_{26} \frac{d^3 W_n}{dy^3} + \\ + & \frac{D_{12} + 4D_{66}}{2d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{n+1} - W_{n-1}) + D_{11} \frac{-W_{n-2} - 2(-W_{n-1} + W_{n+1}) + W_{n+2}}{2d^3}. \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} Q_{yz} = & D_{16} \frac{-W_{n-2} - 2(-W_{n-1} + W_{n+1}) + W_{n+2}}{d^3} + \\ & + \frac{D_{12} + 4D_{66}}{d^2} \cdot \frac{d}{dy} (W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) + \\ & + \frac{2D_{26}}{d} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{n+1} - W_{n-1}) + D_{22} \cdot \frac{d^3 W_n}{dy^3}. \end{aligned} \quad (121)$$

Условия на контуре выражаются через W , руководствуясь теми же соображениями, что и для изотропных искривлённых плит.

Пример 5. Искривлённая поверхность плиты размерами в плане $a \times b$ выражается уравнением $W_h = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}$; опирание по контуру шарнирное; нагрузка $q = \text{const}$; $N_x = \text{const}$.

Плита выполнена из ортотропной фанеры, оси упругости которой совпадают с осями X и Y .

Требуется определить уравнение W срединной поверхности плиты, возникающей в результате её деформации.

Вводим одну линию деления $\bar{1}$ по направлению оси Y . Для этой линии уравнение (99) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{\left(\frac{a}{2}\right)^4} [6W_{\bar{1}} - 4(W_{\bar{2}} + W_{\bar{0}}) + (W_{\bar{0}'} + W_{\bar{2}'})] + D_2 \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} + \frac{2D_3}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{d^2}{dy^2} (W_{\bar{2}} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{0}}) = \\ = N_x \left[-A \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi y}{b} + \frac{W_{\bar{0}} - 2W_{\bar{1}} + W_{\bar{2}}}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \right] + q. \end{aligned} \quad (122)$$

Так как из условий на контуре вытекает $W_{\bar{0}} = W_{\bar{2}} = 0$; $W_{\bar{0}'} = W_{\bar{2}'} = -W_{\bar{1}}$, то, внося это в уравнение (122), получаем:

$$a^4 \frac{d^4 W_{\bar{1}}}{dy^4} - 16 \frac{D_3}{D_2} a^2 \frac{d^2 W_{\bar{1}}}{dy^2} + \left(64 \frac{D_1}{D_2} + \frac{8N_x \cdot a^2}{D_2} \right) W_{\bar{1}} = -N_x \cdot A \frac{(\pi a)^2}{D_2} \sin \frac{m\pi y}{b} + \frac{qa^4}{D_2}. \quad (123)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (123), ищем в виде:

$$W_{\bar{1}} = Ce^{sy}, \quad (124)$$

где:

s определяется из характеристического уравнения:

$$a^4 s^4 - 16 \frac{D_3}{D_2} a^2 s^2 + \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right) = 0, \quad (125)$$

где:

$$k = \frac{N_x \cdot a^2}{D_2}.$$

Корни уравнения (125)

$$s_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{8 \frac{D_3}{D_2} \pm \sqrt{64 \left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 - \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right)}}.$$

Согласно (124) общий интеграл однородного уравнения, соответствующего уравнению (123), представляется в виде:

$$\bar{W}_I = C_1 e^{s_1 y} + C_2 e^{s_2 y} + C_3 e^{s_3 y} + C_4 e^{s_4 y}. \quad (126)$$

Функции e^{sy} могут быть заменены гиперболическими, тригонометрическими или гиперболотригонометрическими функциями в зависимости от значений корней s .

Частный интеграл уравнения (123) имеет следующее выражение:

$$W_I^{\text{частн}} = \frac{qa^4}{D_2 \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right)} - \frac{A\pi^2 k \sin \frac{m\pi y}{b}}{\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 + 16 \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right)}. \quad (127)$$

Сложив выражения (126) и (127) получаем полный интеграл W_I уравнения (123):

$$W_I = C_1 e^{s_1 y} + C_2 e^{s_2 y} + C_3 e^{s_3 y} + C_4 e^{s_4 y} + \frac{qa^4}{D_2 \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right)} - \frac{A\pi^2 k \sin \frac{m\pi y}{b}}{\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 + 16 \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right)}. \quad (128)$$

Если $\sin \frac{m\pi y}{b}$ не удовлетворяет условиям опирания искривлённой плиты, то потеря устойчивости возможна как потеря устойчивости второго рода даже при $q = 0$. При этом критическая сжимающая сила N_x определяется в результате решения уравнения:

$$\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4 + 16 \frac{D_3}{D_2} \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 + \left(64 \frac{D_1}{D_2} + 8k\right) = 0, \quad (129)^1$$

вытекающего из условия обращения W_I в бесконечность. Это условие будет выполнено, когда $W_I^{\text{частн}}$ обратится в бесконечность, для чего необходимо выполнение равенства (129).

¹⁾ В этом уравнении необходимо k заменить на $-k$, поскольку речь идет о сжимающих силах N_x .