УДК 539.3 А.И. Соловьев, канд.физ.-мат. наук

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ И ДВЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ЖЕСТКИЕ ПЛАСТИНКИ

Предлагается аналитический метод решения плоских краевых задач теории упругости для неограниченного тела, содержащего цилиндрическую полость и две неподвижные жесткие пластинки (две плоские трещины). Этот метод основан на применении векторных соотношений между базисными решениями уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах и приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными элементами, что позволяет провести эффективные асимптотический и численный анализы напряженно-деформированного состояний рассматриваемого тела.

Распределение напряжений вблизи полостей, включений и трещин носит отчетливо выраженный локальный характер. Это позволяет распространить ряд результатов для неограниченных тел на тела конечных размеров. Аналитические решения плоских задач для тел с дефектами и включениями находят применение в инженерных методах расчетов на прочность пространственных тел для получения приближенных и интерполяционных оценок.

Начала реализуемого в статье подхода (обобщенного метода Фурье) заложены в работах [1-4], в которых получены формулы разложения скалярных и векторных решений уравнений равновесия упругого тела в различных парах канонических криволинейных координатных систем и на их основе решен ряд плоских и пространственных задач механики деформируемого твердого тела.

Рассмотрена задача о равновесии упругого пространства, содержащего туннельную цилиндрическую полость и две полубесконечные жесткие пластинки, лежащие в одной плоскости.

Разложением по малому геометрическому параметру получены простые формулы, характеризующие распределение нормальных напряжений вблизи ребер пластинок.

Пусть x, y; x_1, y_1; ρ_1, φ_1; α, β; α, σ – декартовы, полярные и биполярные координаты, определяемые равенствами

$$x = x_1 + d,\ y = y_1;\ x_1 = \rho_1\cos\varphi_1,\ y_1 = \rho_1\sin\varphi_1;$$

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha + \cos\beta},\ y = \frac{a\sin\beta}{\mathrm{ch}\alpha + \cos\beta};\ x = \frac{a\,\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\sigma},\ y = \frac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\alpha - \cos\sigma}$$

$$\left(a > 0;\ d \ge 0, -\pi \le \beta, \sigma \le \pi,\ -\infty < \alpha < \infty\right).$$

Уравнение β=const (σ=const) определяет семейство дуг окружностей, проходящих через точки $x=\pm a$, $y=0$. Величина β (σ) измеряется углом между касательной к дуге в точке $x=a$, $y=0$ и отрезком $[-a, a]$ (лучом $((a, \infty))$ оси x [5]).

Однородные уравнения равновесия в перемещениях в случае изотропного упругого тела сводятся к векторному уравнению Ламе

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+(1-2\nu)\Delta\vec{u}=0 \tag{1}$$

($\vec{u}$ – вектор упругих перемещений; ν– коэффициент Пуассона).

Базисные решения уравнения (1) в полярных и биполярных координатах представим в виде вектор-функций

$$\begin{cases} \vec{u}_1(\alpha,\beta;\tau)=\operatorname{ch}\tau\beta e^{i\tau\alpha}\vec{e}_x-i\operatorname{sh}\tau\beta e^{i\tau\alpha}\vec{e}_y; \\ \vec{u}_2(\alpha,\beta;\tau)=(y\operatorname{grad}-\varkappa\vec{e}_y)(\operatorname{sh}\tau\beta e^{i\tau\alpha}); \\ \vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)=(\operatorname{ch}\tau\sigma e^{i\tau\alpha}-1)\vec{e}_x+i\operatorname{sh}\tau\sigma e^{i\tau\alpha}\vec{e}_y; \\ \vec{u}_4(\alpha,\sigma;\tau)=2(y\operatorname{grad}-\varkappa\vec{e}_y)(\operatorname{sh}\tau\sigma e^{i\tau\alpha}); \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1)=\rho_1^{n-1}[\cos(n-1)\varphi_1\vec{e}_x-\sin(n-1)\varphi_1\vec{e}_y]; \\ \vec{u}_{2,n}(\rho_1,\varphi_1)=(y\operatorname{grad}-\varkappa\vec{e}_y)[2\rho_1^{n+1}\sin(n+1)\varphi_1]+(n+1-\varkappa)\vec{u}_{1,n+2}(\rho_1,\varphi_1); \\ \vec{u}_{3,n}(\rho_1,\varphi_1)=\rho_1^{-(n+1)}[\cos(n+1)\varphi_1\vec{e}_x+\sin(n+1)\varphi_1\vec{e}_y]; \\ \vec{u}_{4,n}(\rho_1,\varphi_1)=(y\operatorname{grad}-\varkappa\vec{e}_y)[2\rho_1^{-(n-1)}\sin(n-1)\varphi_1]+(n-1+\varkappa)\vec{u}_{3,n-2}(\rho_1,\varphi_1); \end{cases} \tag{3}$$

($\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ – орты декартовой системы координат, $\varkappa=3-4\nu$).

Решения (2), (3) связаны соотношениями

$$\vec{u}_1(\alpha,\beta;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}D_{n-1}(\tau)(a-d)^{-(n-1)}\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1);$$

$$\vec{u}_2(\alpha,\beta;\tau)=-\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}D_{n+1}(\tau)(a-d)^{-(n+1)}\vec{u}_{2,n}(\rho_1,\varphi_1)+$$

$$+\frac{i}{2}\sum_{n=2}^{\infty}D_{n-1}(\tau)(a-d)^{-(n-1)}(n-1-\varkappa)\vec{u}_{1,n}(\rho_1,\varphi_1); \tag{4}$$

$$\vec{u}_{3,n}(\rho_1,\varphi_1)=(a-d)^{-(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}C_{n+1}(\tau)\vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)d\tau;$$

$$\vec{u}_{4,n}(\rho_1,\varphi_1)=i(a-d)^{-(n-1)}\int_{-\infty}^{\infty}C_{n-1}(\tau)[\vec{u}_4(\alpha,\sigma;\tau)-i(n-1+\varkappa)\vec{u}_3(\alpha,\sigma;\tau)]d\tau.$$

Здесь

$$D_0(\tau)=e^{i\tau\gamma},\ D_n(\tau)=\frac{2ia\tau}{a+d}e^{i\tau\gamma}F\left(1-n,1-i\tau;2;\frac{2a}{a+d}\right);$$

$$C_n(\tau)=-\frac{ina}{a+d}\frac{e^{i\tau\gamma}}{\operatorname{sh}\pi\tau}F\left(1-n,1+i\tau;2;\frac{2a}{a+d}\right)\quad (n=1,2,\ldots);$$

$\gamma = \ln\dfrac{a+d}{a-d}$; $F(-m,b;c;z) = \sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{(-m)_k(b)_k}{(c)_k k!}z^k$ – гипергеометрический полином [6], $(a)_k = \dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = (-1)^k\dfrac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-k)}$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

При выводе соотношений (4) использованы разложения базисных решений уравнения Лапласа в полярных и биполярных координатах [4]

$$e^{\pm\tau\beta}e^{i\tau\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\tau)\left(\frac{\rho_1}{a-d}\right)^n e^{\mp in\varphi_1} \qquad (\rho_1 < a-d),$$

$$\left(\frac{\rho_1}{a-d}\right)^n e^{\mp in\varphi_1} = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)\left(e^{\pm\tau\sigma}e^{i\tau\alpha}-1\right)d\tau \qquad \left(|\sigma|<\pi;\ n=1, 2, \ldots\right).$$

Применим соотношения (4) к решению задачи о напряженном состоянии упругого пространства, содержащего цилиндрическую полость $0\le\rho_1<R$, $-\infty<z<\infty$ и две неподвижные полубесконечные жесткие пластинки $|x|>a$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$. Пусть пластинки сцеплены с пространством, а поверхность полости $\rho_1=R$ находится под воздействием гидростатического давления интенсивностью $\sigma_0>0$. Тогда граничные условия на поверхности $\rho_1=R$ и условия сцепления вдоль полуплоскостей $|x|>a$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$ $(\beta=\pm\pi)$ имеют вид

$$\sigma_{\rho_1} = -\sigma_0,\ \tau_{\rho_1\varphi_1} = 0\ \ (\rho_1 = R);\ u_x = 0, u_y = 0\ \ (\beta = \pm\pi) \tag{5}$$

(u_x, u_y – компоненты вектора перемещений в декартовых координатах; σ_{ρ_1}, $\tau_{\rho_1\varphi_1}$ – компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах).

С учетом симметрии задачи по координате $y(\beta)$ общее решение уравнения (1) представим в следующей форме:

$$\begin{aligned}\vec{u} = {} & \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau)\,\vec{u}_1(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\tau)\,\vec{u}_2(\alpha,\beta;\tau)d\tau + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}\vec{u}_{3,n}(\rho_1,\varphi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(2)}\vec{u}_{4,n}(\rho_1,\varphi_1).\end{aligned} \tag{6}$$

Удовлетворяя условиям (5) на основе общего решения (6) и соотношений (4), после ряда простых преобразований получаем систему интегро-алгебраических уравнений

$$b_0^{(1)} = -\varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\tau) D_1(\tau) d\tau + 1, \quad \varepsilon = \frac{R}{a} < 1;$$

$$b_n^{(1)}(n+1) + b_n^{(2)} n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2-4\nu)\varepsilon^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\tau) D_{n-1}(\tau) d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} n(n+1)\varepsilon^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\tau) D_{n+1}(\tau) d\tau \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{7}$$

$$b_n^{(1)}(n+1) + b_n^{(2)}(n+2) = -\frac{1}{2}(n-1)(n+2-4\nu)\varepsilon^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\tau) D_{n-1}(\tau) d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}(n+1)(n-2)\varepsilon^{n+1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\tau) D_{n+1}(\tau) d\tau \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$A(\tau) = \frac{1}{(3-4\nu)\operatorname{ch}\pi\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \left[b_k^{(1)} + \frac{k+4-4\nu}{k+1} b_{k+2}^{(2)} \right] \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(\tau).$$

Здесь

$$A(\tau) = \frac{2G}{i\sigma_0 R} A_2(\tau); \; b_n^{(1)} = \frac{2G}{\sigma_0} B_n^{(1)} R^{-(n+2)}; \; b_n^{(2)} = \frac{2G}{\sigma_0}(n-1) B_n^{(2)} R^{-n};$$

G – модуль сдвига.

Полагая

$$x_m = b_m^{(1)} + \frac{m+4-4\nu}{m+1} b_{m+2}^{(2)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

и учитывая, что

$$A(\tau) = \frac{1}{(3-4\nu)\operatorname{ch}\pi\tau} \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^{k+1} C_{k+1}(\tau),$$

систему интегро-алгебраических уравнений (7) сводим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно величин x_n

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} x_k + f_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{8}$$

$$d_{0k} = \frac{1}{3-4\nu} \left\{ -\left[1 + 8(1-\nu)^2 \right] I_{0,k} + 6(1-\nu)\varepsilon^2 I_{2,k} \right\} \varepsilon^{k+2};$$

$$d_{1k} = \frac{1}{2(3-4\nu)} \left\{ -\left[1 + (5-4\nu)^2 \right] I_{1,k} + 4(5-4\nu)\varepsilon^2 I_{3,k} \right\} \varepsilon^{k+3};$$

$$d_{nk} = \frac{1}{2(3-4\nu)} \left\{ (n-1)(n+2-4\nu) I_{n-2,k} - \left[n^2 + (n+4-4\nu)^2 \right] \varepsilon^2 I_{n,k} + \right.$$

$$\left. +(n+4-4\nu)(n+3)\varepsilon^4 I_{n+2,k} \right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$f_0 = 1; \; f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$I_{m,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{m+1}(\tau) C_{k+1}(\tau) \frac{d\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}.$$

Существенно, что величина (аналог коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности ребра трещины)

$$K^{\pm} = \lim_{x\to\pm a}\left[\sigma_y\Big|_{\beta=0}\sqrt{2|a\mp x|}\right]$$

находится непосредственно через решение системы (8):

$$K^{\pm} = \frac{\sigma_0 R\sqrt{a}}{a+d}\frac{1-2\nu}{3-4\nu}e^{\pm\frac{\gamma}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\varepsilon^{k+1}x_k F\left(-k;1\mp\tfrac{1}{2};2;\frac{2a}{a+d}\right).$$

Используя равенство [7]

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\pi\tau} = \frac{1}{\pi\tau}\Gamma(1-i\tau)\Gamma(1+i\tau);\quad \frac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau} = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right);$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds = 2\pi i\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)};$$

$$\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s ds = 2\pi i\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$

для вычисления величин $I_{m,k}$ получаем простую формулу

$$I_{m,k} = \frac{k+1}{(1+\omega)^2}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!\,(2)_j}\left(\frac{2}{1+\omega}\right)^j\sum_{s=0}^{k}\frac{(-k)_s\left(\frac{3}{2}\right)^s}{s!\,(2)_s(j+s+2)}\left(\frac{2}{1+\omega}\right)^s\quad\left(\omega=\frac{d}{a}\right).$$

Из легко проверяемого интегрального представления

$$I_{m,k} = \frac{k+1}{(1+\omega)^2}\int_0^1 xF\left(-m,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+\omega}\right)F\left(-k,\frac{3}{2};2;\frac{2x}{1+\omega}\right)dx$$

следует, что

$$|I_{m,k}| \le \frac{k+1}{2(1+\omega)^2},\ |d_{ok}| \le \frac{1}{3-4\nu}\frac{k+1}{2(1+\omega)^2}\left[1+8(1-\nu)^2+6(1-\nu)\varepsilon^2\right]\varepsilon^{k+2};$$

$$|d_{nk}| \le \frac{1}{2(3-4\nu)}\frac{k+1}{2(1+\omega)^2}\Big\{(n-1)(n+2-4\nu)+\left[n^2+(n+4-4\nu)^2\right]\varepsilon^2+$$
$$+(n+4-4\nu)(n+3)\varepsilon^4\Big\}\quad(n=1,2,\ldots),$$

и поэтому

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty}|d_{nk}| \to 0\quad(n\to\infty;\ 0<\varepsilon<1).$$

Из условия (9) вытекает квазирегулярность бесконечной системы (8) для любого $\varepsilon\in(0;1)$, а из неравенства $S_n \le 1-\theta$ ($0<\theta<1$), $n=0,1,2,\ldots$; $0<\varepsilon\le 0{,}5$ – ее полная регулярность при $0<\varepsilon\le 0{,}5$.

Решая бесконечную систему (8) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка ε^4, для величины $K^{\pm}$ и нормальных напряжений вблизи ребер пластинок получаем простые асимптотические формулы

$$K^{\pm}=\frac{1-2\nu}{3-4\nu}\frac{\sigma_0 R}{\sqrt{a}}\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^{\pm\frac{1}{2}}\left[\frac{\delta_0\varepsilon}{1+\omega}-\frac{\delta_1\varepsilon^3}{(1+\omega)^3}+\frac{\delta_2\varepsilon^5}{(1+\omega)^5}\right]+O\left(\varepsilon^7\right);$$

$$\sigma_y^{\pm}\approx\frac{1-2\nu}{2(3-4\nu)}\frac{\sigma_0 R}{a+d}\left[\frac{(1+\omega)(a+x)}{(1-\omega)(a-x)}\right]^{\pm\frac{1}{2}}\left[x_0\varepsilon+x_1\varepsilon^2\frac{2\omega\pm 1}{1+\omega}+\right.$$

$$\left.+3x_2\varepsilon^3\frac{1\pm 2\omega+2\omega^2}{2(1+\omega)^2}\right]\qquad (y=0,\ x\to\pm a);$$

$$\delta_0=1,\ \delta_1=\frac{1+8(1-\nu)^2}{2(3-4\nu)},\ \delta_2^{\pm}=\delta_1^2+\frac{9(1-\nu)}{4(3-4\nu)}\mp\frac{7-14\nu+8\nu^2}{2(3-4\nu)}\omega-\frac{37-65\nu+32\nu^2}{4(3-4\nu)}\omega^2;$$

$$x_0=1+\bar{d}_{00}^{(1)}\varepsilon^2+\left[\left(\bar{d}_{00}^{(1)}\right)^2+\bar{d}_{00}^{(2)}\right]\varepsilon^4,\ x_1=\bar{d}_{10}^{(1)}\varepsilon^3,\ x_2=\bar{d}_{20}^{(1)}\varepsilon^2;$$

$$\bar{d}_{00}^{(1)}=-\frac{\delta_1}{(1+\omega)^2},\ \bar{d}_{00}^{(2)}=\frac{3(1-\nu)}{4(3-4\nu)}\frac{1+\omega^2}{(1+\omega)^4},\ \bar{d}_{10}^{(1)}=-\frac{1+(5-4\nu)^2}{4(3-4\nu)}\frac{\omega}{(1+\omega)^3};$$

$$\bar{d}_{20}^{(1)}=\frac{1-\nu}{3-4\nu}\frac{1}{(1+\omega)^2};\ \varepsilon=\frac{R}{a}<1,\ \ \omega=\frac{d}{a}<1.$$

Список использованных источников

1. Проценко В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости / В.С. Проценко, А.И. Соловьев //Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, №6. – С. 973-982.

2. Проценко В.С. Кручение упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат / В.С. Проценко, А.И. Соловьев, В.В. Цымбалюк //Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, №3. – С. 415-425.

3. Соловьев А.И. Упругое равновесие круговых кусочно-однородных сред с диаметральной трещиной / А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, №5. – С. 853-857.

4. Соловьев А.И. О равновесии плоскости, ослабленной отверстием и двумя трещинами / А.И. Соловьев, В.В. Цымбалюк // Прикладная механика. – Т. 25, №8. – С. 105-111.

5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 367 с.

6. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.

7. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Поступила в редакцию 27.02.2009.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет

им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков