

П. Н. КУЧЕР

**МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ****ВВЕДЕНИЕ**

Изучение пластического состояния материалов в настоящее время представляет интерес для многих отраслей науки и техники. При описании пластического напряженного состояния широко использовались поверхности скольжения, которые явились ценным средством для анализа распределения напряжений в пластической области тела.

Основным методом решения задач по определению напряжений в пластически деформируемом теле является метод решения дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности. Как уравнения равновесия, так и условие пластичности должны соответствовать виду напряженного состояния. Основное внимание исследователи обратили на плоское деформированное и плоское напряженное состояния с тем, чтобы в дальнейшем распространить найденные методы на решение объемных задач, при решении которых встречаются математические трудности, практически непреодолимые.

Советскими учеными С. А. Христиановичем, А. А. Ильюшиным, В. В. Соколовским, А. Д. Томленовым, К. Н. Шевченко и другими создан и развит наиболее математически строгий и весьма перспективный метод решения плоских задач по определению распределения напряжений в пластически деформируемом теле. Этот метод получил название метода характеристик.

Метод характеристик позволил дать математически строгое решение целого ряда задач: давление плоского штампа на полубесконечное тело [1], пластическое равновесие плоского клина [2], давление штампа на пластическое тело, сжатие пластической полосы между двумя жесткими параллельными плитами [3] и др. С успехом метод характеристик был применен для анализа процессов прокатки [4], для процессовковки и штамповки [5], для анализа внедрения клина в полубесконечное тело [6] и т. д.

Все указанные исследования проведены для пластического равновесия в момент перехода за предел упругости.

Несомненно, что исследование механизма пластической деформации в течение всего процесса деформирования вплоть до разрушения тел также представляет интерес. Поэтому экспериментальная часть исследований главным образом посвящена этому вопросу.

1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК

1. Линии скольжения. Уравнения характеристик. Интегралы пластичности.

При плоском деформированном состоянии компоненты напряжения $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а остальные компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ не зависят от координаты z ; компонента деформации $\epsilon_z = 0$.

В любой точке напряженного тела имеются два взаимно-перпендикулярных направления, по которым действуют главные нормальные напряжения. Под углом 45° к ним касательные напряжения достигают максимального значения, равного K .

Переходя непрерывно от точки к точке, мы получим две системы линий, касательные к которым совпадают с направлением главных касательных напряжений. Эти линии называются *линиями скольжения*. Расположение линий скольжения и траекторий главных нормальных напряжений показано на рис. 1, где угол между направлением главных касательных напряжений в каждой точке тела и положительным направлением оси x обозначен через φ . Линии скольжения могут быть найдены как теоретическим, так и опытным путем. Дифференциальные уравнения линий скольжения, как видно из рис. 1, имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (1)$$

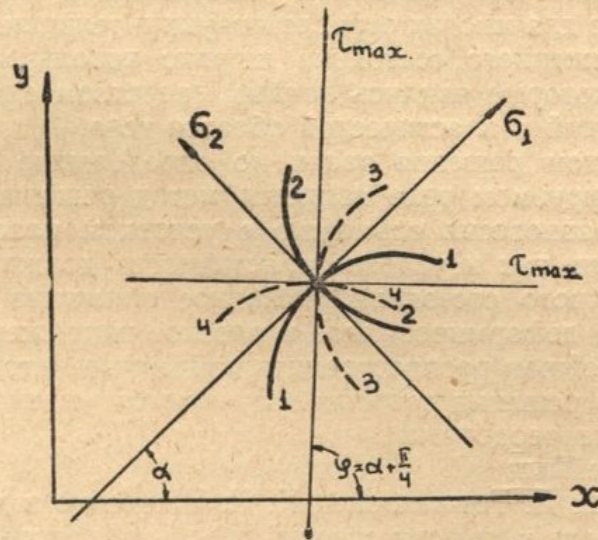


Рис. 1. 1—1, 2—2 — траектория главных нормальных напряжений, 3—3, 4—4 — линии скольжения.

Решение задачи пластичности плоского деформированного состояния тела сводится к интегрированию уравнений равновесия, в которых массовыми силами ввиду их малости по сравнению с другими силами, возникающими при деформации, пренебрегаем

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Компоненты напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} удовлетворяют условию пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение две функции σ и φ таким образом, чтобы удовлетворять условию пластичности (3):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma_0 + \sigma \pm K \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = -K \cos 2\varphi, \quad (4)$$

где σ_0 — любое заранее заданное напряжение;

$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ — гидростатическое давление;

φ — угол, образованный первым семейством линий скольжения с положительным направлением оси x .

Подстановка выражений (4) в уравнения (2), а затем решение полученной системы уравнений (решение задачи Коши), дают две системы уравнений, которые называются *дифференциальными уравнениями характеристик*:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{\sigma}{2\kappa} + \varphi = \operatorname{const}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi, \\ \frac{\sigma}{2\kappa} - \varphi = \operatorname{const}. \end{cases} \quad (6)$$

Из полученных уравнений следует, что оба семейства характеристик совпадают с семействами линий скольжения и обладают свойством ортогональности. Уравнения (5) определяют *первое* семейство характеристик, а уравнения (6) — *второе* семейство.

Таким образом, для того чтобы найти линии скольжения, достаточно определить характеристики дифференциальных уравнений пластического равновесия.

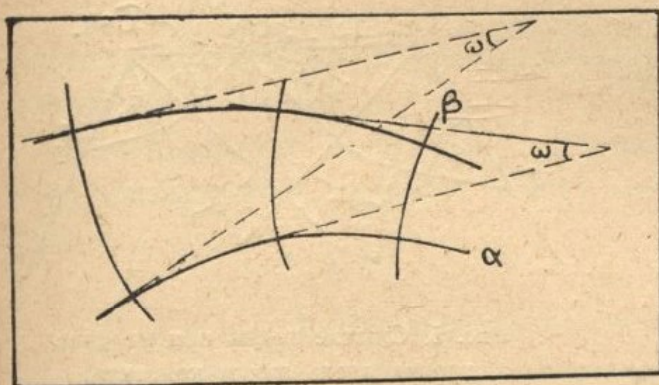


Рис. 2.

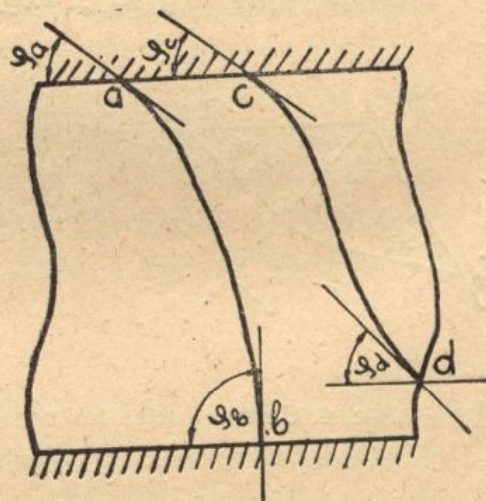


Рис. 3.

Из формул (5) и (6) могут быть сделаны выводы, установленные Г. Генки:

1. Вдоль характеристики изменение $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ пропорционально углу поворота дуги, коэффициент пропорциональности равен 2κ .

2. Угол между касательными к двум характеристикам одного семейства в точках пересечения с характеристиками другого семейства остается постоянным (рис. 2).

Примем сетку характеристик за ортогональную систему криволинейных координат в плоскости x, y и будем рассматривать x, y, σ, φ как функции этих координат.

В дальнейшем удобно пользоваться новыми переменными ξ и η :

$$\xi = \frac{\sigma}{2\kappa} + \varphi, \quad \eta = \frac{\sigma}{2\kappa} - \varphi \quad \text{или} \quad \frac{\sigma}{\kappa} = \xi + \eta, \quad 2\varphi = \xi - \eta. \quad (7)$$

Тогда уравнения характеристик (5) и (6) будут иметь вид

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\frac{\sigma}{2\kappa} + \varphi = \xi = \text{const}, \quad \frac{\sigma}{2\kappa} - \varphi = \eta = \text{const}. \quad (8)$$

Эта система уравнений известна под названием *интегралов пластичности*. Решение системы уравнений (2) при подстановке выражений (4) может быть представлено также в виде

$$\sigma + 2\kappa\varphi = \psi_1(\eta),$$

$$\sigma - 2\kappa\varphi = \psi_2(\xi). \quad (9)$$

Эти уравнения следуют также из уравнений (8) непосредственно. Они позволяют легко определить среднее напряжение в любой точке a по известному среднему напряжению в другой точке b (рис. 3):

$$\sigma_a \pm 2\kappa\varphi_a = \sigma_b \pm 2\kappa\varphi_b. \quad (10)$$

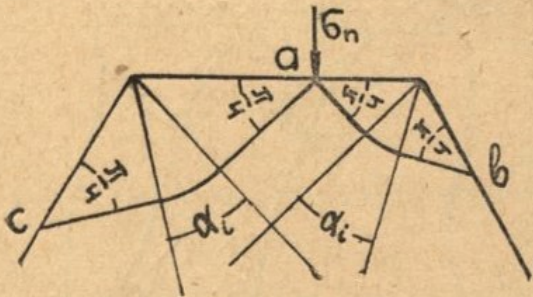


Рис. 4. Сжатие клина без трения.

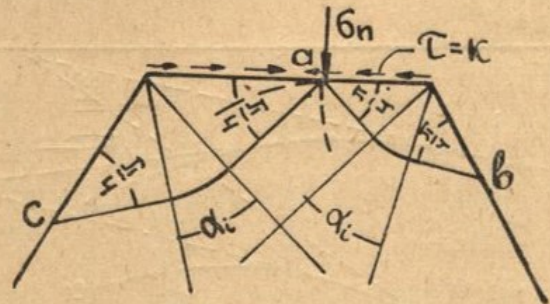


Рис. 5. Сжатие клина при наличии трения вдоль линии контакта.

Из формулы (10) следует, что изменение σ пропорционально углу поворота линии скольжения.

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2\kappa(\varphi_a - \varphi_b); \quad \sigma_a - \sigma_b = \pm 2\kappa\alpha_{ab}, \quad (11)$$

где α_{ab} — угол поворота линии скольжения, a и b — точки на одной линии скольжения.

Формула (11) дает возможность определить нормальную составляющую напряжения вдоль линии контакта между штампом и пластическим телом, если линии скольжения известны, т. е. если сетка характеристик уже построена.

Так например, при сжатии клина, как это показано на рис. 4, при отсутствии трения на контактной поверхности, нормальное напряжение σ_n на линии контакта определится формулой

$$|\sigma_n| = 2\kappa(1 + \alpha_{ab}). \quad (12)$$

Формула получена из формулы (11) при подстановке значений σ_a и σ_b , в точках a и b :

$$\sigma_a = -|\sigma_n| + \kappa, \quad \sigma_b = -\kappa.$$

Формула (12) пригодна для случаев, когда на одном конце характеристики имеется нормальное напряжение сжатия, а касательное напряжение отсутствует, второй же конец характеристики выходит на свободную поверхность.

При сжатии клина, показанного на рис. 5, когда трение на контактной поверхности достигает максимума $\tau = \kappa$, нормальное напряжение σ_n на линии контакта определится формулой

$$|\sigma_n| = 2\kappa(\alpha_i + 1,28), \quad (13)$$

где α_i — угол поворота характеристик для процессов деформации без трения.

Формула (13) получена из формулы (11) при подстановке значений σ_a и σ_b в точках a и b :

$$\sigma_a = \sigma_n \quad \sigma_b = \kappa.$$

Зная удельные давления при $\tau = \kappa$ и $\tau = 0$, можно легко найти нормальное напряжение вдоль линии контакта при различных значениях коэффициента трения, используя для этого линейную интерполяцию.

Если линии скольжения неизвестны, т. е. сетку характеристик необходимо построить, необходимо прибегнуть к интегрированию интегралов пластичности (8).

Построение решений указанных уравнений (8) сводится к решению ряда краевых задач, а именно: задачи Коши, задачи Римана и смешанной задачи.

1. Приближенное решение уравнений.

Решение указанных краевых задач может быть достигнуто различными способами. Самым простым методом при проведении практических вычислений является метод конечных разностей. Сущность его заключается в последовательном построении решения в отдельных точках исследуемой области. Точность решения в данном случае определяется выбранным интервалом интегрирования.

Применение этого метода к системам дифференциальных уравнений (8) состоит в замене отыскания решения определением σ, φ, x, y в конечном числе узловых точек сетки характеристик.

Пусть мы имеем сетку характеристик в плоскости ξ, η (рис. 6). Обозначение характеристик производится, как показано на рис. 6. Значения σ, φ, x, y в точках пересечения, например k -ой характеристики $\xi = \xi_k$ и l -ой характеристики $\eta = \eta_l$, обозначим через

$$\sigma_{k,l}; \quad \varphi_{k,l}; \quad x_{k,l}; \quad y_{k,l}.$$

Значения, полученные для ряда узловых точек вдоль линии контакта, например, штампа и пластического тела, или вдоль свободной поверхности, заносим в таблицу, показанную на рис. 7, где в строке отмечены характеристики ξ , а в столбце — характеристики η . Таблица значений σ , φ , x , y будет состоять из таблиц, соответствующих вышеуказанным краевым задачам.

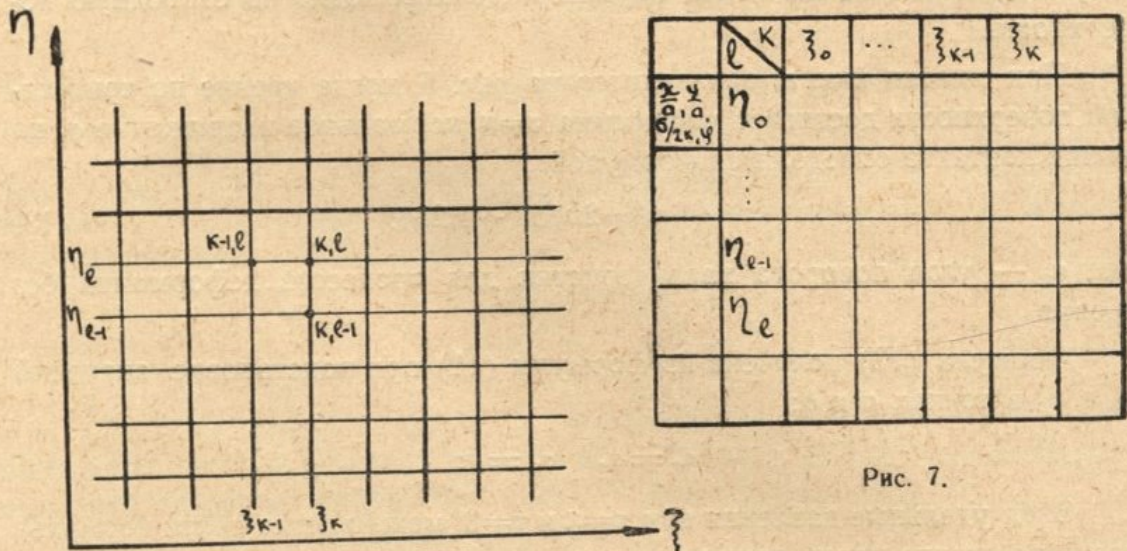


Рис. 6.

Рис. 7.

Пусть значения σ , φ , x , y известны в точках $k-1, l$ и $k, l-1$ (рис. 6), лежащих, предположим, на линии контакта. Для вычисления значений σ , φ , x , y , в точке k, l , лежащей, предположим, ниже линии контакта, т. е. внутри пластической зоны, будут иметь место формулы

$$\frac{\sigma_{k,l}}{K} = \xi_k + \eta_l, \quad 2\varphi_{k,l} = \xi_k - \eta_l; \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{k,l} &= \frac{y_{k-1,l} - y_{k,l-1} + x_{k,l-1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{k,l} + \varphi_{k,l-1}) + x_{k-1,l} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{k,l} + \varphi_{k-1,l})}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_{k,l} + \varphi_{k,l-1}) + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{k,l} + \varphi_{k-1,l})} \\ y_{k,l} &= y_{k-1,l} - (x_{k,l} - x_{k-1,l}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (\varphi_{k,l} + \varphi_{k-1,l}). \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Для нахождения $x_{k,l}$ и $y_{k,l}$ в уравнениях (8) частные производные заменены разностными отношениями. Переходя от точки к точке, заполняем соответствующие клетки таблицы и строим сетку характеристик, исходя из значений σ , φ , x , y , вдоль линии контакта или другого заданного контура.

2. Условия на контуре

Пусть рассматриваемой границей является произвольный гладкий криволинейный контур (рис. 8). Внешние напряжения, приложенные к

контуру, определены вектором напряжения, а касательные и нормальные компоненты этого вектора обозначены через τ_{tn} и σ_n .

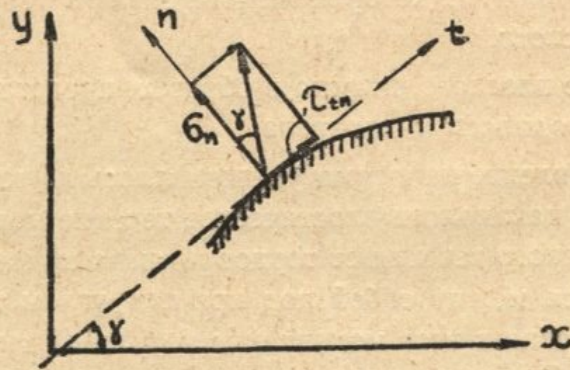


Рис. 8.

Компоненты напряжения при переходе от координат x, y к системе координат t, n выражаются формулами

$$\begin{cases} \sigma_t \\ \sigma_n \end{cases} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\gamma \pm \tau_{xy} \sin 2\gamma \\ \tau_{tn} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\gamma + \tau_{xy} \cdot \cos 2\gamma, \quad (16)$$

где γ — угол, образованный касательной к рассматриваемому контуру в какой-то точке и положительным направлением оси x .

Подставляя в формулы (16) выражения (4), получаем значения σ_t , σ_n , τ_{tn} в виде

$$\begin{cases} \sigma_t \\ \sigma_n \end{cases} = \sigma_0 + \sigma \pm \kappa \sin 2(\varphi - \gamma) \\ \tau_{tn} = -\kappa \cos 2(\varphi - \gamma). \quad (17)$$

В задачах о пластичном плоском деформированном состоянии встречается три вида условий, определяющих распределение касательной компоненты τ_{tn} напряжения вдоль контура. Рассмотрим два из этих условий.

1. Касательная компонента вектора напряжения отсутствует, $\tau_{tn}=0$

Контурные значения переменных σ и φ могут быть выражены через σ_n . Решение уравнений (17) при $\tau_{tn}=0$ приводит к выражениям

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \gamma, \quad \sigma = \sigma_n - \sigma_0 + \kappa. \quad (18)$$

2. Касательная компонента вектора напряжения задана соотношением $\tau_{tn} = \tau_{tn}(\gamma)$.

Решение уравнений (17) приводит к выражениям

$$\varphi = \gamma + \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau_{tn}}{\kappa}, \quad (19)$$

$$\sigma = \sigma_n - \sigma_0 + \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{tn}}{\kappa}\right)^2}.$$

II. ВНЕДРЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА В УЗКУЮ ПЛАСТИЧЕСКУЮ ПОЛОСУ

Решение этой задачи принадлежит В. В. Соколовскому. Нами произведены эксперименты, которые подтверждают теоретическое изложение В. В. Соколовского.

Внедрение плоского штампа в образец, представляющий собой узкую полосу, производилось в три этапа.

I этап. Давление на штамп увеличивалось до тех пор, пока под штампом в образце начиналось пластическое течение материала. В первый момент пластического течения от торцов штампа выходят линии скольжения, пересекающиеся между собой под прямым углом и образующие сетку. Линии скольжения в этот момент еще не успели выйти на нижнюю плоскость образца. Это положение представлено на рис. 9.

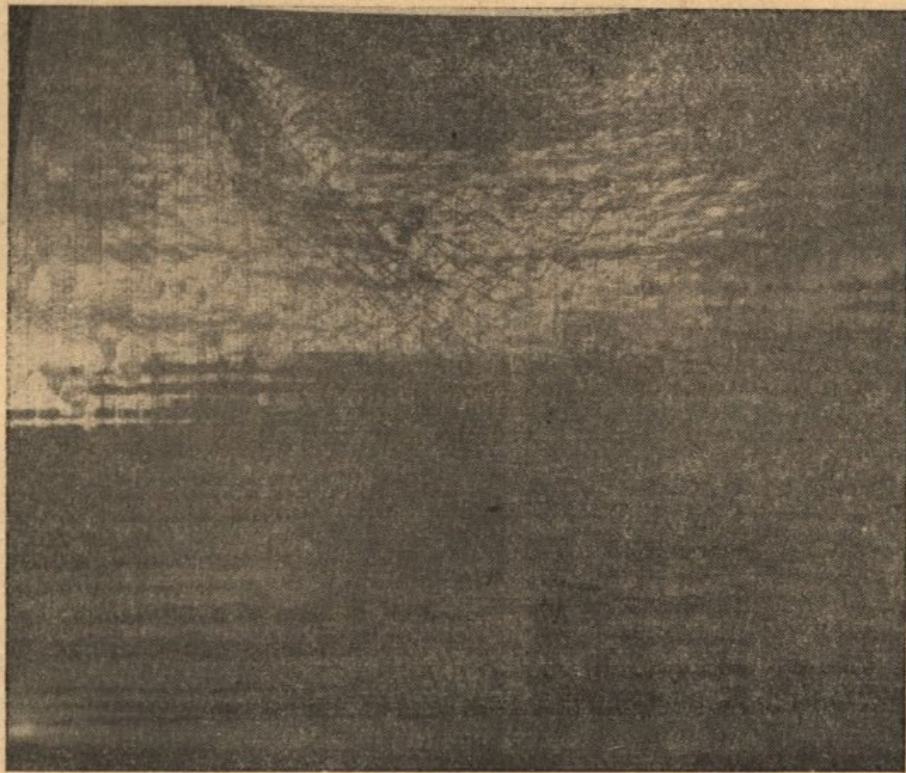


Рис. 9. Первый этап давления штампа на тело.

II этап. По мере увеличения давления на штамп количество **линий** скольжения, выходящих из торцов штампа, растет, а также растет и **угол** при вершине сектора, образуемого этими линиями скольжения у торца штампа.

Увеличение давления на штамп прекращено в момент, когда крайние линии скольжения вышли на нижнюю плоскость образца. Эти линии, как будет показано ниже, названы предельными линиями скольжения. В этом случае пластическая зона в образце распространилась на всю глубину. Для идеально-пластического тела дальнейшее увеличение усилия нарушает пластическое равновесие и ведет к разрезанию тела. Это положение представлено на рис. 10.

III этап. Из предыдущих двух этапов ясно, что увеличение усилия давления вызывает увеличение количества линий скольжения и рост центрального угла сектора, образуемого линиями скольжения. Казалось бы

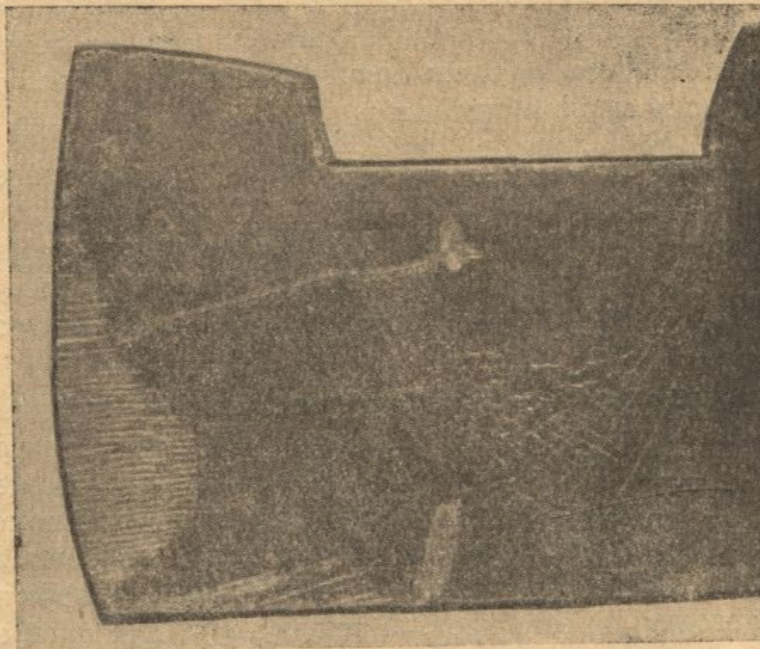


Рис. 10. Второй этап давления штампа на тело.

что такая же картина должна наблюдаться и на третьем этапе увеличения давления штампа на тело. Однако, как легко убедиться из рис. 11, новые линии скольжения с внешней стороны от предельных линий сколь-

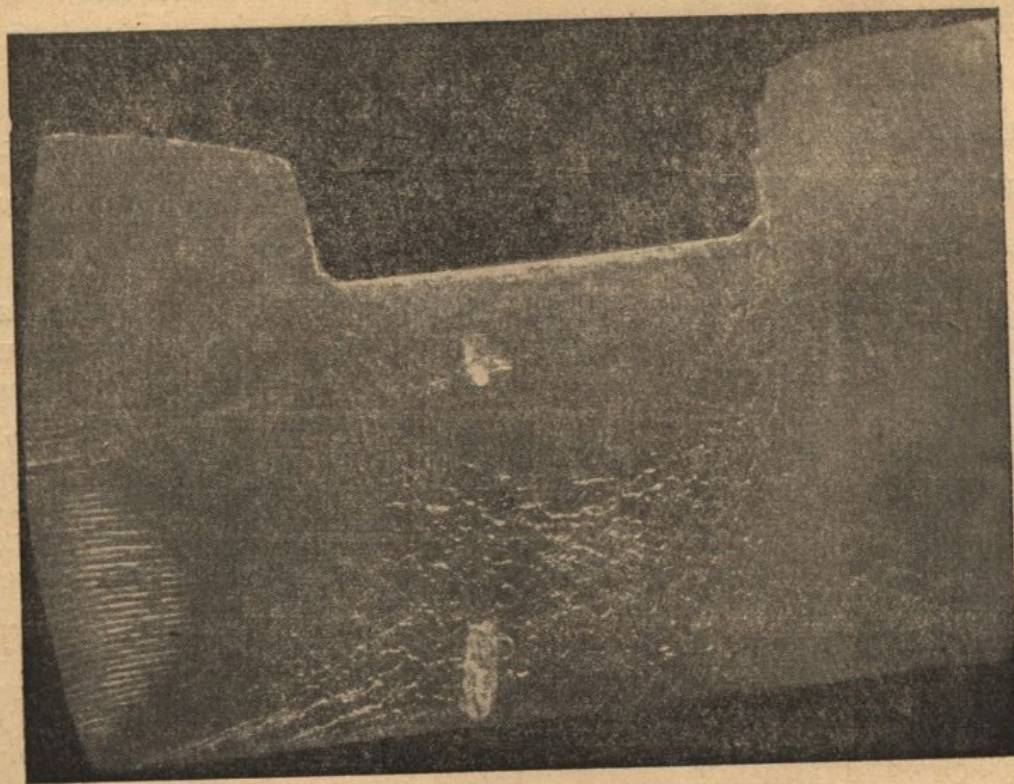


Рис. 11. Третий этап давления штампа на тело.

жения не возникают. Рост усилия давления на штамп ведет к дальнейшему развитию уже имеющихся линий скольжения, которые выходят на нижнюю плоскость образца, т. е. увеличение затраченной работы уравнивается развитием пластической области в нижней части образца за счет развития линий скольжения, развившихся на первых двух этапах. Длина этого участка вдоль нижней плоскости зависит, видимо, от высоты образца и ширины штампа.

Таким образом, метод характеристик позволяет определить усилие, потребное для развития пластического состояния в теле на всю его глубину, т. е. когда предельные линии скольжения выйдут на нижнюю плоскость образца. Для идеально-пластического тела это будет также и усилие, потребное для полного внедрения штампа, т. е. для разрезания образца.

Для реальных тел, обладающих упрочнением, внедрение штампа в тело после образования предельных линий скольжения потребует значительного увеличения усилия давления. Подсчитать это усилие при помощи характеристик, иными словами, учесть упрочнение при помощи характеристик, на третьем этапе внедрения штампа не представляется возможным. Следовательно, для учета упрочнения в полученные расчетные формулы необходимо вводить вместо предела текучести σ_s для идеально-пластического тела предел текучести σ'_s , как функцию степени деформации $\sigma'_s = f(\epsilon)$.

III. ВНЕДРЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО КЛИНА В УЗКУЮ ПЛАСТИЧЕСКУЮ ПОЛОСУ

Пусть вдоль линии контакта между клином и пластическим телом трение отсутствует $\tau_{in} = 0$ и угол раствора клина у вершины равен $\frac{\pi}{2}$.

По мере внедрения клина в полосу пластическое течение материала будет развиваться в стороны от его плоскостей. В первый момент возникнут линии скольжения OO_1 и BO_1 , образующие с линией контакта угол $\frac{\pi}{4}$.

Назовем их *основными линиями скольжения* (рис. 12 а).

По мере увеличения давления на клин основные линии скольжения будут развиваться дальше, и наряду с этим возникнут новые линии скольжения, идущие с внешней стороны от основных из концов линии контакта (вершины клина O и конечной точки B линии контакта) и образующие пучок линий скольжения (рис. 12 б). Предположим пока, что пучки линий скольжения развиваются по обе стороны от треугольника OBO_1 . Увеличение глубины внедрения клина, вызванное ростом усилия давления на клин, сопровождается увеличением числа линий скольжения в пучке и ростом центрального угла секторов, образованных лучами (рис. 12 в). Пусть высота полосы настолько большая, что линии скольжения, развивающиеся вниз, не смогут выйти на нижнюю плоскость полосы раньше, чем линии скольжения, развивающиеся вверх, выйдут на верхнюю свободную поверхность полосы. В этом случае течение материала будет происходить вверх и будет иметь место так называемое выдавливание материала (рис. 12 г).

Очевидно, что течение материала вниз может быть только при вполне определенной высоте полосы, определяющейся углом поворота линий скольжения, выходящих вверх, в данном случае углом, равным $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Построим такую же линию скольжения, идущую вниз, до пересечения с осью y под углом $\frac{\pi}{4}$. Точка пересечения определит положение нижней плоскости полосы. При такой высоте полосы течение материала возможно как вниз, так и вверх. Назовем высоту такой полосы *предельной высотой* $b_{пр}$, а линию скольжения, выходящую на нижнюю плоскость, *предельной линией скольжения* (рис. 12 д).

Ясно, что при уменьшении угла раствора клина будет иметь место течение материала вверх, а при увеличении угла раствора создаются более благоприятные условия для течения материала вниз, и одновременно с этим растет предельная высота полосы. Введем понятие относительной высоты полосы $\beta = \frac{b}{a}$, где b — высота полосы, a — половина ширины клина в сечении по оси x . Предельная относительная высота полосы $\beta_{пр}$ определится отношением $\beta_{пр} = \frac{b_{пр}}{a}$.

Необходимо указать на тесную взаимосвязь между величинами a и b . Пусть полоса имеет высоту b . При внедрении клина, пусть самом незначительном, но соизмеримом, полная сетка характеристик может развиться раньше, чем предельная линия скольжения выйдет на нижнюю плоскость полосы. Тогда течение материала будет происходить вверх. Такое состояние будет продолжаться до тех пор, пока глубина внедрения клина, или его ширина $2a$ в сечении вдоль оси x не достигнут определенной величины,

т. е. не наступит отношение $\beta_{пр} = \frac{b_{пр}}{a}$. Ясно, что $\beta_{пр}$ находится в тесной связи с углом поворота предельной линии скольжения $\alpha_{пр}$. При незначительной толщине полосы и большом угле раствора клина течение материала вниз, видимо, имеет место в самом начале внедрения клина.

В наших экспериментах течение материала вверх не наблюдалось. Это

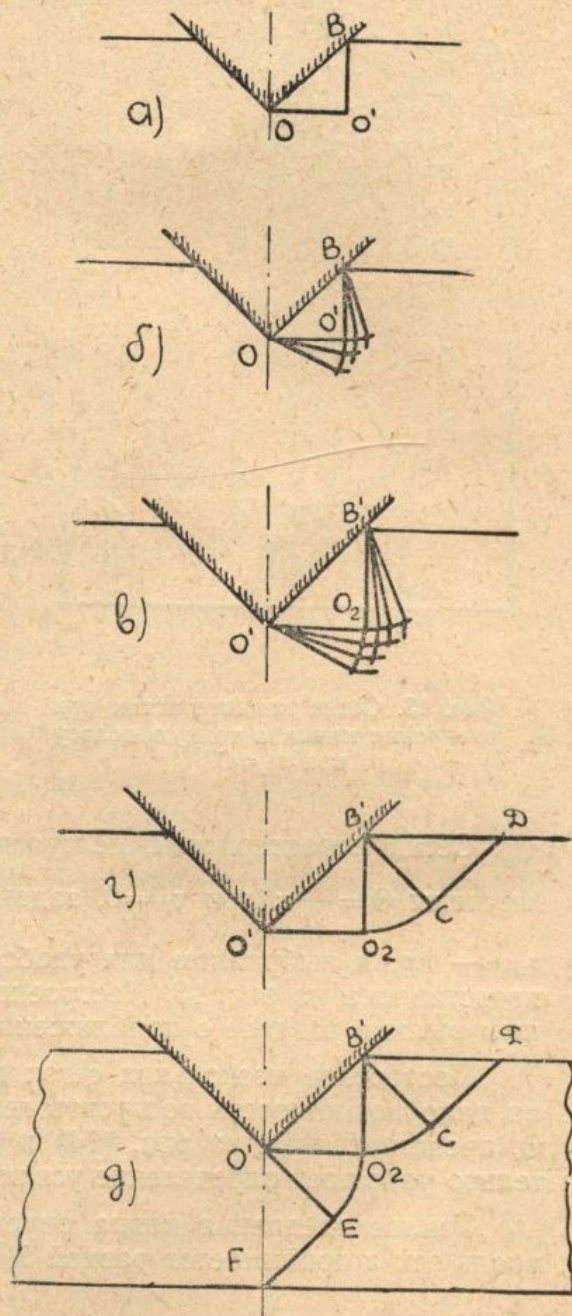


Рис. 12 а, б, в, г, д. Схема течения материала при внедрении клина.

можно объяснить наличием трения на линии контакта и тем, что данный материал является упрочняющимся.

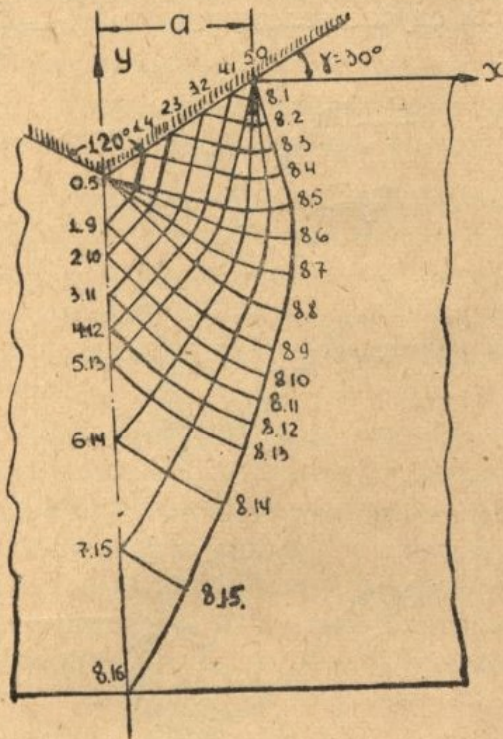


Рис. 13. Сетка характеристик при внедрении клина в тонкую полосу при $\tau_{tn}=0$.

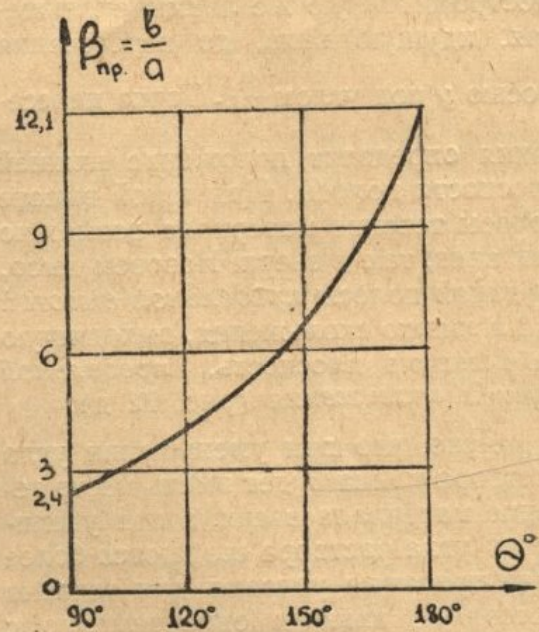


Рис. 14. График зависимости предельной относительной высоты полосы $\beta_{пр}$ от угла раствора клина Θ при $\tau_{tn}=0$.

Сетка характеристик, построенная для клина с углом раствора γ вершины $\Theta = \frac{2}{3}\pi$ при $\tau_{tn}=0$, заданных значениях вдоль линии контакта $\sigma_n = -k\rho$, и выбранном для удобства в дальнейшем значении $\sigma_0 = -k\rho$, представлена на рис. 13. Построение сетки выполнено методом, изложенным выше в разделе о приближенном решении уравнений.

Построение нескольких сеток для различных углов раствора Θ клина дало возможность построить графики зависимости $\beta_{пр}$ от Θ и $\alpha_{пр}$ от Θ , представленные на рис. (14) и (15). Наличие таких графиков значительно упрощает определение усилия, необходимого для внедрения клина.

Усилие внедрения клина определяется формулой (ширина полосы вдоль оси z принимается равной 1)

$$P = 2\alpha\sigma_n. \quad (20)$$

Известно, что при $\tau_{tn}=0$ вдоль линии контакта

$$\sigma_n = 2\kappa(1 + \alpha).$$

Из графика на рис. (15) видно, что $\alpha_{пр} = \frac{\Theta}{2}$. Тогда $\sigma_n = 2\kappa \left(1 + \frac{\Theta}{2}\right)$

для полосы предельной относительной высоты.

На рис. 16 дан график зависимости нормального напряжения от угла раствора клина.

Все три графика вместе взятые значительно упрощают определение усилий давления. Например, пусть имеем полосу толщиной 10 мм, клин с углом раствора 120° . Из графика на рис. 14 определяем по Θ предельную

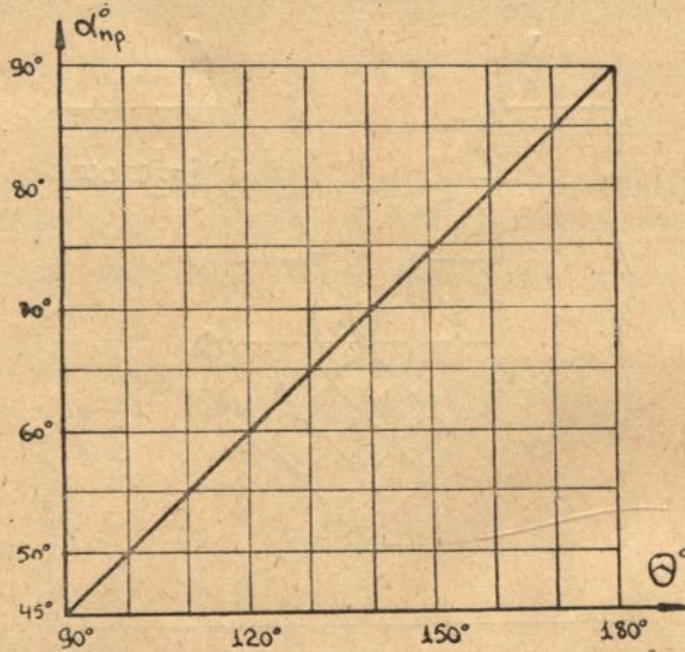


Рис. 15. График зависимости угла поворота $\alpha_{пр}$ предельной линии скольжения от угла раствора клина Θ при $\tau_{тн}=0$.

относительную высоту $\beta_{пр}=4,08$. Пластическая зона распространится на всю толщину полосы при глубине внедрения клина, при которой $a = \frac{b}{\beta_{пр}} = 2,45$ мм. Нормальная составляющая напряжения σ_n при $\Theta=120^\circ$ (для предельной относительной высоты) определяется из графика на рис. 16: $\sigma_s=4,1$ к.

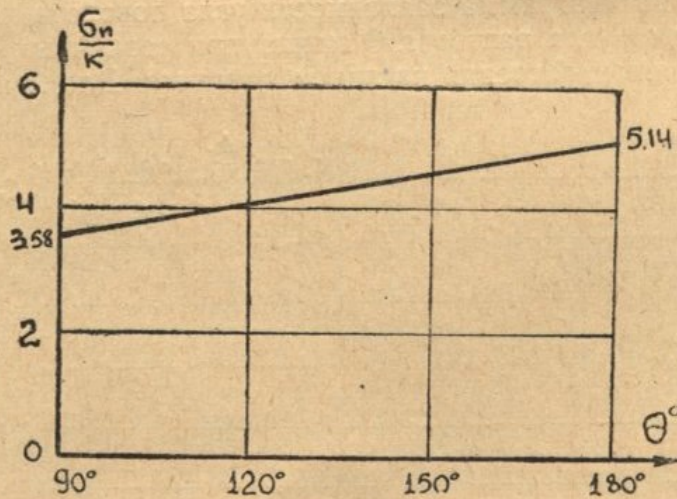


Рис. 16. График зависимости нормального напряжения вдоль линии контакта σ_n от угла раствора клина Θ при $\tau_{тн}=0$

Усилие P , при котором пластическое состояние распространится на всю глубину полосы, определится

$$P=2a\sigma_n=10,1\sigma_s.$$

Наличие трения вдоль линии контакта меняет угол наклона характеристик к линии контакта. Построение сеток характеристик выполнено тем же методом. На представленной на рис. 17 части сетки характеристик видно,

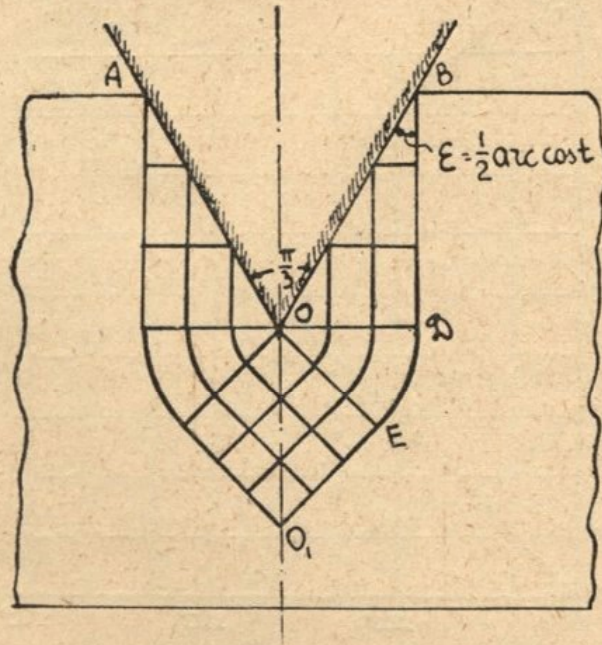


Рис. 17. Сетка характеристик при внедрении клина в тонкую полосу при $\tau_{\text{tn}}=0,5 \kappa$.

что угол наклона основной линии скольжения к линии контакта отличен от $\frac{\pi}{4}$ и равен $\epsilon = \frac{1}{2} \arccos \frac{\tau_{\text{tn}}}{\kappa}$ (в данном случае $\frac{\tau_{\text{tn}}}{\kappa} = 0,5$; $\epsilon = 30^\circ$).

Трение задается в виде $\tau_{\text{tn}} = \kappa t$, где t — коэффициент пропорциональности. Трение на линии контакта увеличивает угол поворота предельной линии скольжения.

На рис. 18 дана диаграмма зависимости угла поворота предельной линии скольжения от угла раствора Θ клина при различных значениях касательной составляющей трения на линии контакта. Для точек диаграммы,

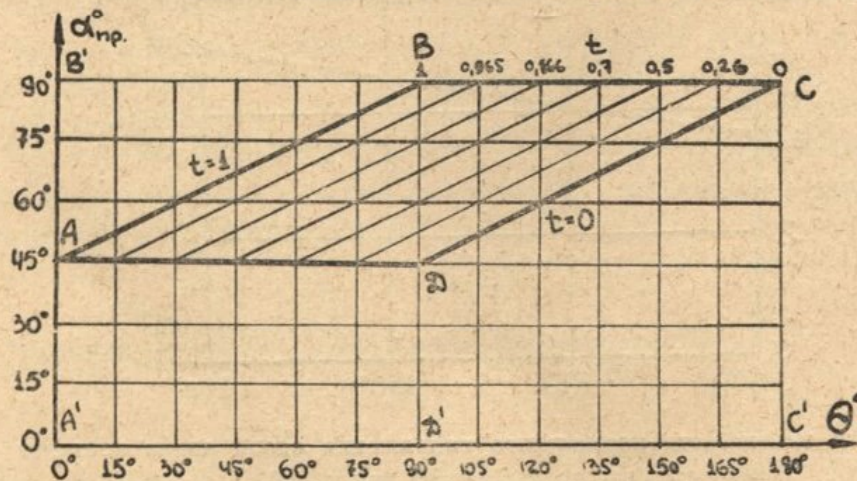


Рис. 18. График зависимости угла поворота $\alpha_{\text{пр}}$ предельной линии скольжения от угла раствора клина при изменении t .

определяющих связь $\alpha_{\text{пр}}$ и Θ вне области $ABCD$, течение материала происходит или вверх на свободную поверхность полосы (область $A'ADD'$) или вниз для полосы, высота которой меньше предельной (область $D'DCC'$).

Если при каких-то значениях угла раствора клина Θ и касательной составляющей напряжения τ_{tn} вдоль линии контакта угол φ между направлением линии скольжения и осью x оказывается меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, чего не может быть, так как нарушается основное свойство ортогональности характеристик, то в этом случае характеристики образуют с осью x угол $\frac{\pi}{4}$, а под клином образуется область равномерного напряженного состояния и вдоль линии контакта трение нигде не достигает значения $\tau_{tn} = \kappa t$ (рис. 19). Такое состояние имеет место, если коэффициент $t = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right)$.

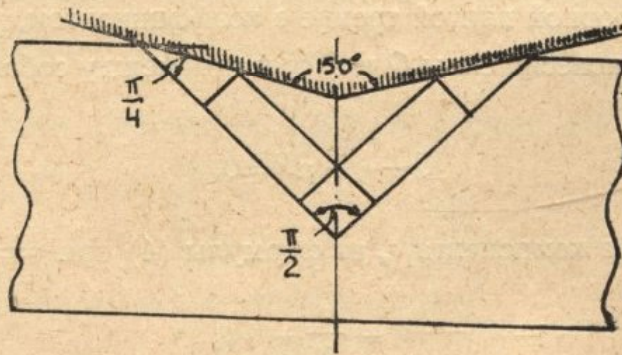


Рис 19.

Рис. 20 и 21 ясно подтверждают следующие положения. На рис. 20 под клином видна область, где линий скольжения почти нет. Это область

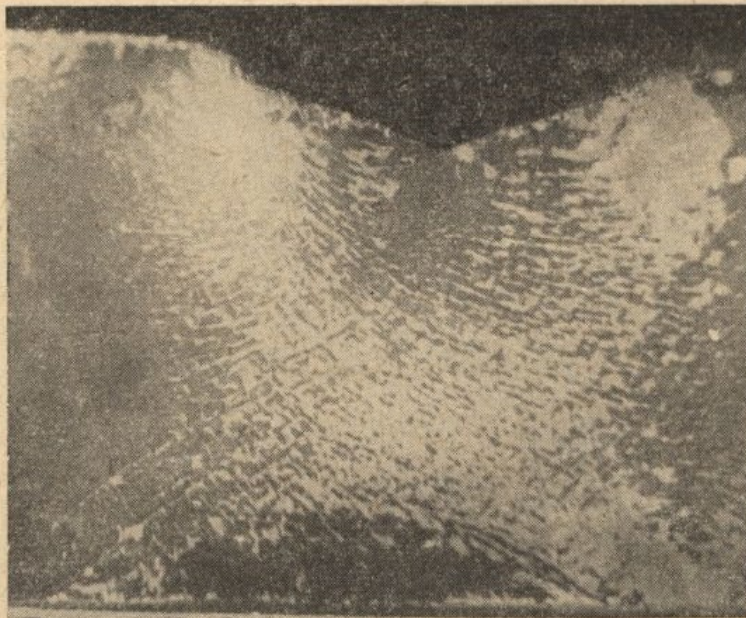


Рис. 20. Сетка линий скольжения при внедрении в тонкую полосу клина с углом раствора $\Theta = 145^\circ$.

равномерного напряженного состояния. На рис. 21 ясно видно, что линии скольжения образуют с линией контакта угол, отличный от $\frac{\pi}{4}$, и почти прямолинейны на некотором участке (образуют прямоугольный треуголь-

ник). Это зона равномерного напряженного состояния. Такая же зона с прямолинейными участками образована в виде прямоугольника непосредственно под клином. Хорошо видны два сектора, образованные пучками линий скольжения. Все это достаточно хорошо подтверждает теоретически построенные сетки характеристик.

Усилие внедрения клина при наличии трения вдоль линии контакта определяется формулой

$$P = -\sigma_n 2a + \tau_{tn} 2atg \gamma. \quad (21)$$

Для определения нормальной составляющей напряжения, заданной в виде $\sigma_n = -\kappa p$, следует вначале определить максимальное значение коэффициента p . С этой целью рассматривается равновесие одной из половин полосы, а действие отброшенной части заменено силой Q . Учитывается между полосой и опорной плитой трение с коэффициентом, равным μ .

Из условий равновесия силы Q и P связаны между собой при помощи зависимости

$$Q + \frac{1}{2} \mu P = 0. \quad (22)$$

Вдоль оси y известна компонента σ_x из формулы (4) при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\sigma_0 = -\kappa p$

$$\sigma_x = \kappa \left(-p + \frac{\sigma}{\kappa} + 1 \right). \quad (23)$$

Анализируя сетки характеристик, видим в ряде случаев наличие зон равномерного напряженного состояния на некотором участке вдоль оси y под клином, а далее значения σ меняются.

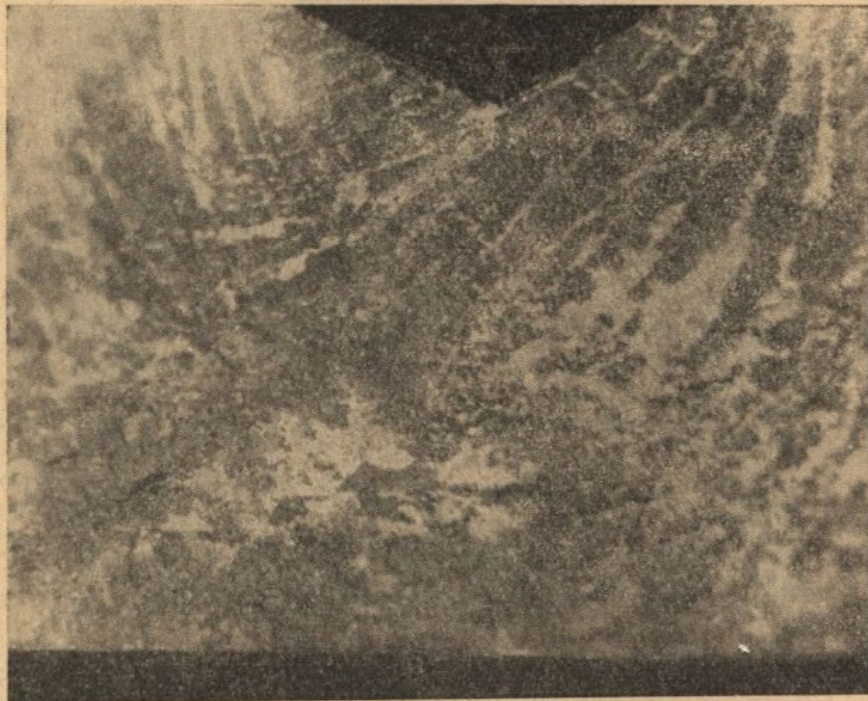


Рис. 21. Сетка линий скольжения при внедрении в тонкую полосу клина с углом раствора $\theta = 120^\circ$.

Учитывая только что сказанное, решение уравнения (22) после всех подстановок имеет вид

$$p = \frac{\frac{2}{h_p} \int_a^{\beta - \text{tg} \gamma} \frac{\sigma}{2\kappa} dv + 2 \frac{h_p}{a} \frac{\sigma}{2\kappa_{\text{пост}}}}{\beta - \mu - \text{tg} \gamma} + \frac{\beta - \text{tg} \gamma + \mu t \text{tg} \gamma}{\beta - \mu - \text{tg} \gamma}, \quad (24)$$

где $\beta = \frac{b}{a}$,

$\text{tg} \gamma$ — тангенс угла наклона линии контакта к оси x ,

h_p — глубина зоны равномерного напряженного состояния,

$\frac{\sigma}{2\kappa_{\text{пост}}}$ — значения $\frac{\sigma}{2\kappa}$ для узловых точек на оси y в зоне равномерного напряженного состояния.

Глубина зоны равномерного напряженного состояния определяется формулой

$$h_p = \sqrt{2} a \frac{\sin \varepsilon}{\cos \gamma}.$$

При $t=0, \mu=0$ формула (24) принимает вид

$$p = \frac{\frac{2}{h_p} \int_a^{\beta - \text{tg} \gamma} \frac{\sigma}{2\kappa} dv + 2 \frac{h_p}{a} \frac{\sigma}{2\kappa_{\text{пост}}}}{\beta - \text{tg} \gamma} + 1. \quad (25)$$

В реальных процессах зона равномерного напряженного состояния настолько незначительна, что ее можно не выделять, а значения $\frac{\sigma}{2\kappa}$ осреднять по всей высоте полосы вдоль оси y . Тогда формула (25) принимает вид

$$p = \frac{\sigma}{2\kappa_{\text{ср}}} 2 + 1. \quad (26)$$

Проверка показала, что значения p , определенные по формуле (26) для каждой относительной высоты полосы, определенной узловой точкой на оси y , совпадают с определенными значениями p по формуле (12)

$$\frac{\sigma_n}{2\kappa} = p = 2(1 + \alpha_k),$$

где α_k — угол поворота характеристики, проходящей через данную узловую точку.

Таким образом, для определения коэффициента p для узловых точек вдоль оси y проще пользоваться формулами (12) и (13). Зная значения p и $\frac{\sigma}{2\kappa}$ вдоль оси y , определяем компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ по формулам (4). Зная σ_n для предельной полосы, угол раствора клина Θ и задаваясь значением коэффициента t , определяем усилие P , необходимое для создания пластического состояния на всю глубину полосы.

Усилие, необходимое для дальнейшего внедрения клина, определяется с учетом упрочнения формулой

$$P = \sigma'_s pa + \sigma'_s kt \operatorname{tg} \gamma. \quad (27)$$

Усилие, подсчитанное для создания пластического состояния на всю глубину предельной относительной высоты полосы при внедрении клина с углом раствора $\Theta = 60^\circ$, $t = 1$, толщине полосы 10 мм, равно $P = 6,2\sigma_s$.

Анализ сеток характеристик показывает, что уменьшение угла раствора клина уменьшает глубину сетки и увеличивает ее ширину. Для уменьшения ширины пластической зоны в полосе при одной и той же ее толщине выгоднее использовать клин с большим углом раствора. При этом усилие реза увеличивается.

Аналогично рассмотрены задачи по внедрению в узкую полосу штампа, ограниченного полуцилиндрической поверхностью, и одностороннего клина.

IV. РЕЗКА НА НОЖНИЦАХ И ВЫРЕЗКА-ПРОБИВКА

Рассматриваются процессы для полос толщиной b меньшей и большей ширины ножа или пуансона a .

1. Резка на ножницах

При резке полосы на ножницах под действием усилий верхнего ножа полоса изгибается, в результате чего пластическое деформирование полосы происходит не по всей ширине ножа, а на каком-то его участке. Величина этого участка, как показали эксперименты, зависит от толщины полосы и находится в пределах $0,55b$. Как показал В. В. Губарев [7] в своей работе, величина этого участка находится в пределах $0,5b$ и не зависит от рода материала. Одна из сеток характеристик представлена на рис. 22. Здесь показана резка полосы при нулевом зазоре между ножами. Полученная экспериментальным путем сетка хорошо подтверждает построенную. Эксперименты проводились по этапам: 1) первое появление линий скольжения; 2) их развитие до момента соединения двух предельных линий скольжения, идущих от кромок ножей (утолщенная линия на рис. 22); 3) дальнейшее внедрение ножей. На рис. 22 представлена сетка второго этапа резки. Третий этап резки подтверждает, что линия разделения полосы между ножами имеет форму предельной общей линии скольжения. С увеличением степени деформации, т. е. уменьшением высоты полосы между режущими кромками ножа, предельная общая линия скольжения будет менять свою форму, и разрушение произойдет по этой линии. Анализ сеток линий скольжения, полученных экспериментально, и сеток характеристик, полученных теоретическим путем, показывает:

1) Общая сетка линий скольжения образуется в результате слияния сеток, развивающихся под каждым ножом.

2) При достаточно большой ширине ножей будет выдерживаться зависимость между толщиной полосы и шириной теперь уже линии контакта a_k , т. е. $b = a_k 2$. При этом общая предельная линия скольжения будет прямолинейной при нулевом зазоре между ножами.

Экспериментальная сетка отличается от только что описанной, так как линии скольжения выходят не только из вершины режущей кромки ножа, но и из участков свободной поверхности, затягивающейся пуансоном за собой, что ведет к искривлению линий скольжения (рис. 23).

Рис. 22. Сетка характеристик при резке полосы на параллельных плоских ножах (при $b > 2a$).

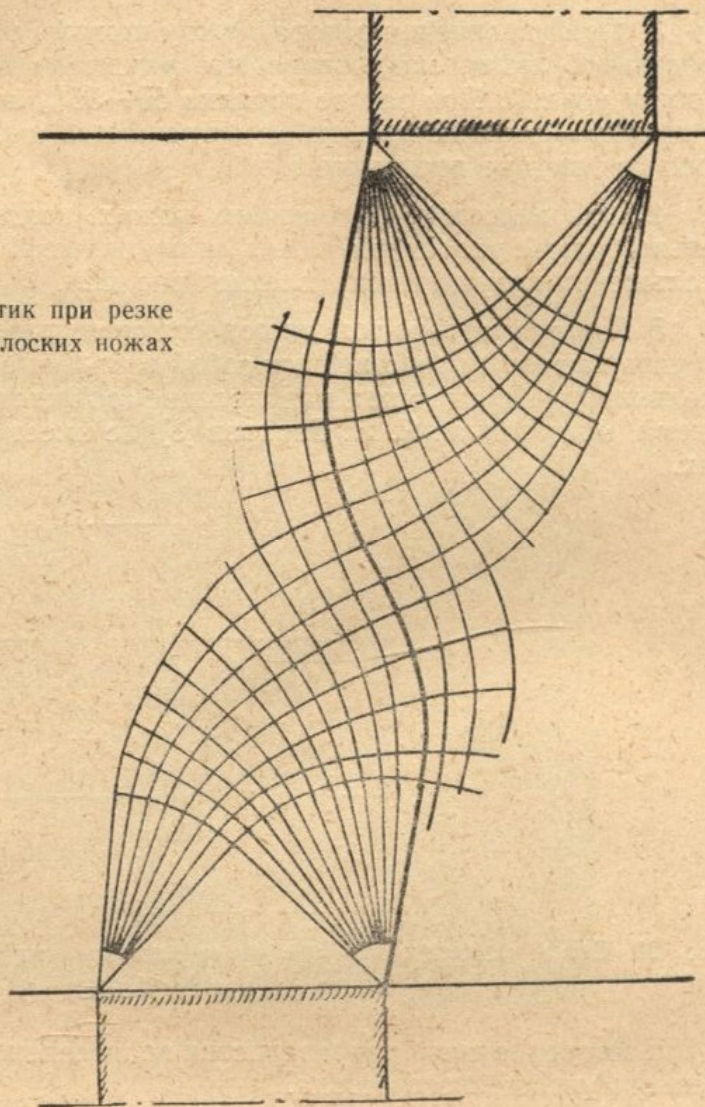


Рис. 23. Сетка линий скольжения при резке полосы на параллельных плоских ножах ($b > 2a$).



3. При увеличении зазора между ножами растет искривление общей предельной линии скольжения, что ухудшает поверхность среза и ведет к росту усилий. При зазоре порядка 50—55% линии скольжения, идущие от противоположных кромок, не встречаются между собой. В этом случае процесс резки не произойдет.

4. При недостаточно широких ножах, когда толщина полосы значительно больше удвоенной длины линии контакта, общая предельная линия скольжения получает искривление (рис. 22).

5. При достаточно тонких полосах сетки линий скольжения значительно упрощаются и представляют собой небольшие сектора, состоящие из нескольких лучей, имеющих направление соответственно под ножи (рис. 24). Схема, построенная Я. Н. Гаркави [8], не имеет места в реальных процессах.

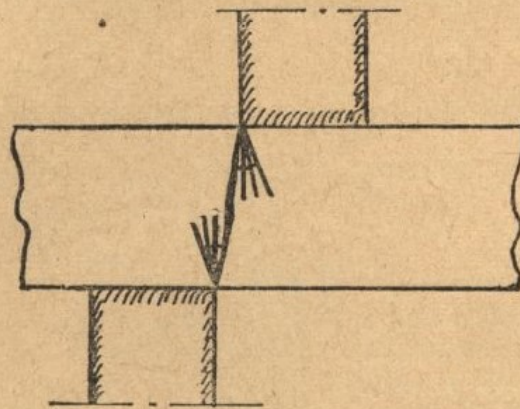


Рис. 24. Сетка характеристик при резке полосы на параллельных плоских ножах (при $b < 2a$).

Построение сеток характеристик произведено на основании вышеизложенного упрощенного метода.

Усилия резки определяются по тем же формулам (при ширине полосы равной 1) $P = a \sigma_n$,

где a — длина линии контакта при большой ширине ножа, или ширина ножа, если он достаточно узкий.

σ_n — среднее нормальное напряжение вдоль линии контакта, которое, как показано в других работах, распределено вдоль линии контакта неравномерно.

$$P = 0,55b 2\kappa (1 + \alpha_{np}) = 0,55b \sigma_s (1 + \alpha_{np}). \quad (28)$$

Для упрощающегося материала формула принимает вид

$$P = 0,55 b \sigma'_s (1 + \alpha_{np}), \quad (29)$$

где α_{np} — угол поворота общей предельной линии скольжения от вершины ножа до точки ее перегиба.

Если общая предельная линия скольжения прямолинейная, усилие резки будет минимальным:

$$P = 0,55 b \sigma'_s. \quad (30)$$

Как видим, формула совпадает с известной формулой для чистого сдвига

$$P = 0,58 \sigma_s F \quad (F = b l). \quad (31)$$

Коэффициент 0,58 в формуле меняется с изменением условий резки. Экспериментальное определение его в каждом конкретном случае довольно затруднительно.

Метод характеристик позволяет более точно определять усилие резки, где изменение зазора между ножами учитывается изменением угла поворота линии скольжения $\alpha_{пр}$.

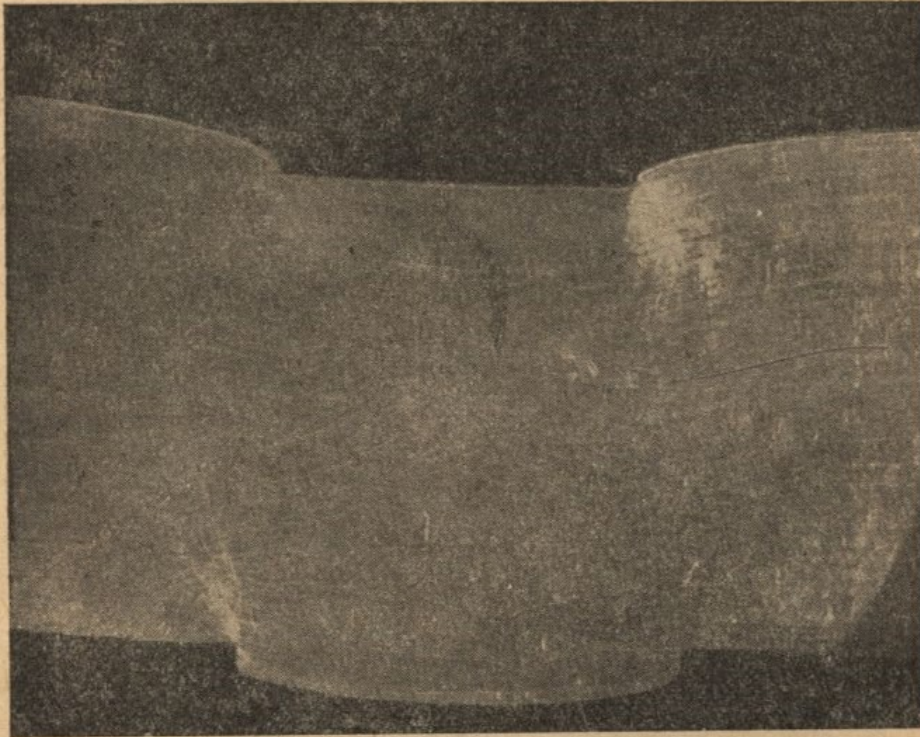


Рис. 25. Сетка линий скольжения при резке полосы в штампах (при $b > a_n$) на первом этапе.

Можно построить график зависимости $\frac{P}{0,55b\sigma'_s} = f(1 + \alpha_{пр})$ для различной величины зазора между ножами.

2. Вырезка — пробивка в штампах

Если ширина пуансона a значительно больше толщины полосы b , механизм пластической деформации напоминает резку на ножницах. Образуются самостоятельные пластические зоны по обе стороны пуансона, напоминающие пластическую зону при резке на ножницах. Если $a \leq b$, механизм пластической деформации качественно меняется.

На рис. 25 а, б, в представлены три этапа вырезки при зазоре между пуансоном и матрицей 15—25%.

На первом этапе линии скольжения идут по диагонали от кромки пуансона к кромке матрицы. На втором этапе количество линий скольжения растет во внешнюю сторону, пока предельная линия скольжения выйдет из кромки пуансона на находящуюся под ней кромку матрицы. На третьем этапе образуется предельная линия скольжения, до некоторой степени напоминающая предельную линию скольжения при резке на ножницах, которая в процессе деформирования меняется и является линией разделения между полосой и вырезанной частью.

Конфигурация предельной линии скольжения зависит от величины зазора между пуансоном и матрицей. При нулевом зазоре и при $b=a_n$ (где a_n — ширина пуансона) предельная линия скольжения является прямоли-

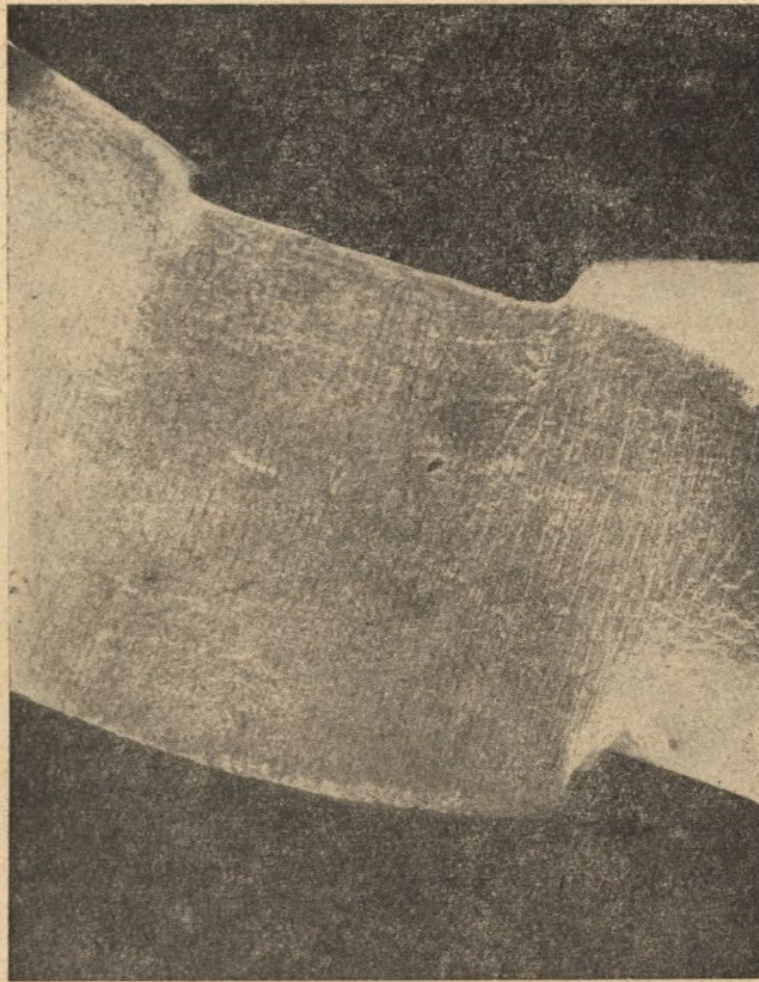


Рис. 26 Линии скольжения при резке полосы в штампах на втором этапе.

нейной и усилие вырезки будет минимальным. Увеличение зазора ведет к уменьшению усилия. При величине одностороннего зазора порядка 55—58% линии скольжения не выходят из кромки пуансона на противоположную кромку матрицы, и срез не произойдет. В дальнейшем произойдет разрыв по части материала полосы, находящейся между пуансоном и матрицей. Усилие вырезки определяется той же формулой $P=a\sigma_n$.

V. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты проводились на анодированных образцах из мягкого дюралюминия и на образцах из мягкого железа. Одна из плоскостей железных образцов шлифовалась, а затем образцы погружались в печь, где выдерживались в течение 1—1,5 часа при температуре $t=600—650^\circ$, в результате чего на поверхности образуется тонкий и прочный слой окислы. Серьезным недостатком при проведении экспериментов на железных образцах являлось то, что при повторном нагреве деформированное состояние образца возвращалось к первоначальному. Этот недостаток устраняется в экспериментах на дюралевых образцах, так как повторное анодирование деформированных образцов не нарушает образовавшегося

деформированного состояния в образце. Это дало возможность проводить эксперименты по этапам для значительных степеней деформации.



Рис. 27. Линия скольжения при резке полосы в штампах на третьем этапе.

Достаточно хорошие результаты дали также эксперименты для процессов, напоминающих резание со снятием стружки.

В Ы В О Д Ы

1. Рассмотренные выше задачи еще раз подтверждают перспективность метода характеристик в решении многих задач обработки металлов давлением.

2. Метод характеристик дает возможность установить механизм пластической деформации в процессах обработки металлов давлением.

3. Метод характеристик дает в некоторых случаях более точные расчетные формулы для определения усилий, чем полученные другими методами. В частности, дается более точная формула для определения усилий резки на ножницах с учетом величины зазора.

4. Изучение линий скольжения в течение всего процесса обработки металлов вплоть до их разрушения позволяет установить механизм больших пластических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Прандтль. О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию. Сб. «Теория пластичности», ИЛ, 1948.
2. А. Надаи. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, 1954.
3. В. В. Соколовский. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
4. К. Н. Шевченко. Пластическое напряженное состояние и течение металла при холодной прокатке и волочении. Известия АН СССР, отд. техн. наук, № 3, 1946.
5. А. Д. Томленов. Теория пластических деформаций металлов. Машгиз, 1951.
6. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, 1956.
7. В. В. Губарев. Экспериментальное исследование механизма деформаций при резке листового металла в штампах. Автореф. Дисс. Московский ин-т стали, 1954.
8. Я. Н. Гаркави. О распределении напряжений в материале при процессах вырезки-пробивки и резке на ножницах с параллельными ножами. Инженерный сборник, т. III, вып. I, 1946.
9. Я. Н. Гаркави. К вопросу об определении усилия резания и работы деформации при вырезке-пробивке и работе на ножницах. «Вестник металлопромышленности», 1938, № 5.