# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## Частина 1

## Аналітична геометрія

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

## Частина 1

## Аналітична геометрія

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2014

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73
В93

Колектив авторів: Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв,
Н. Л. Кальчук, Е. А. Танчик

Переклад з російської виконано В. М. Кузніченко та Ю. О. Івановим з дозволу колективу авторів.

Р е ц е н з е н т и: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Колодяжний,
д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін

В93 **Вища** математика [Електронний ресурс] : навч. посібник : у 5 ч. / Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв та ін. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2014. – Ч. 1 : Аналітична геометрія. – 247с.

Посібник, призначений для студентів, що вивчають вищу математику, містить основні розділи аналітичної геометрії за програмою першого курсу вищих навчальних закладів. У розділах викладено теоретичний матеріал, наведено основні означення, приклади для аудиторних занять і самостійної роботи, запитання для перевірки засвоєння пройденого матеріалу. Підібрані приклади й задачі дають змогу закріпити матеріал під час його вивчення.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають механічні курси. Може використовуватися для підготовки до складання іспитів, заліків.

Іл. 90. Табл. 1. Джерел: 7 назв.

**УДК 517.1/2(075.8)**
**ББК 22.151.3 я 73**

## ВСТУП

Пропонований курс аналітичної геометрії - окремий розділ загального курсу геометрії. Основними поняттями аналітичної геометрії є найпростіші геометричні примітиви (точка, пряма, площина, крива і поверхню другого порядку). Основними засобами дослідження в аналітичній геометрії служать метод координат і методи елементарної алгебри. Виникнення методу координат пов'язано з розвитком астрономії, механіки і техніки в XVII в. В 1637 р в своїй праці "Геометрія" Р. Декарт описав цей метод і виклав основи аналітичної геометрії. Ідея методу полягала в тому, що точці як геометричному примітиву ставилося у відповідність числовий набір, званий координатами точки. Поняття координат точок дозволило ввести уявлення рівнянь лінії, площини, поверхні. Іншими словами, Декарт вперше запропонував математичне моделювання геометричних образів. Рішення задач геометричними методами (геометричними побудовами) перетворилося в рішення алгебраїчних рівнянь. Подальший розвиток аналітичної геометрії було пов'язано з іменами Г. Лейбніца, І. Ньютона і особливо Л. Ейлера.

В даний час аналітична геометрія не виділяється в самостійну науку, проте її методи широко застосовуються в різних розділах математики, механіки, фізики та інших наук.

Прийняті позначення:

def - визначення,дефініція (лат. Definitio - межа, кордон) - логічна процедура надання строго фіксованого сенсу термінів мови.

*Загальні відомості про системи лінійних рівнянь. Визначник. Основне визначення визначника. Підрахунок визначників 1-го, 2-го і 3-го порядків. Підрахунок визначників методом зниження порядку*

# 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У різних галузях знань багато завдань зводяться до вирішення систем рівнянь першого порядку з декількома невідомими - систем лінійних рівнянь. Рівняння називається лінійним тому, що рівняння першого порядку з двома невідомими

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

визначає пряму лінію на площині

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + b.$$

**Def. рівняння з** $n$ **невідомими** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \quad (1.1)$$

**де** $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ **і** $b$ - деякі числа.

Називають: $a_i$ - коефіцієнт рівняння; $b$ - вільний елемент рівняння.

*Зауваження.* Скорочено лінійне рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b \ .$$

Якщо записана сукупність $m$ лінійних рівнянь з невідомими $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, для яких потрібно знайти спільне рішення, то в цьому випадку вважають, що задана система $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.2)$$

Тут коефіцієнти рівняння $a$ позначені двома індексами $a_{ij}$, де перший індекс $i$ - номер рівняння, а другий індекс $j$ - номер невідомого, при якому записаний коефіцієнт. Для скорочення між індексами $i$ і $j$ кома не ставиться (наприклад, $a_{23}$).

**Def. Рішенням системи лінійних рівнянь (1.2) називають таку сукупність записаних в певному порядку чисел** $l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$**, що кожна рівність системи (1.2) перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих** $x_i$ **відповідно числами** $l_i$**.**

Якщо сукупність чисел $l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ є рішенням системи (1.2), то кажуть, що ця сукупність задовольняє систему рівнянь.

**Def. Система рівнянь, яка має рішення, називається сумісною. Система, яка не має жодного рішення, називається несумісною.**

**Def. Спільна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо є тільки одне рішення, і невизначеною, якщо число її рішень більше одного.**

Вирішити систему лінійних рівнянь означає наступне:

- визначити, якою є система - сумісною або несумісною;
- якщо система є сумісною, то встановити, визначена вона або невизначена;
- якщо система є визначенною, то знайти її єдине рішення;
- якщо система є невизначеною, то знайти сукупність всіх її рішень.

При вивченні систем лінійних рівнянь важливим поняттям є «визначник» ( «детермінант»).

## 1.2. Визначник

**Def. Під визначником будемо розуміти число, яке за певним правилом ставиться у відповідність табличці чисел, що складається з однакової кількості рядків і стовпців.**

Визначник також називають детермінантом.

Табличка визначника позначається двома бічними прямими лініями, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для позначення визначника використовують також такі записи:

$$|a_{ij}|,\ |a_{ij}|^n,\ |a_{ij}|^n_{i,j=1},\ det(a_{ij}),\ det\,A,\ det(a_{ij})^n_{i,j=1}.$$

У загальному випадку визначник записують у вигляді таблички з літерними елементами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

У такій табличці розрізняють:

- рядки;
- стовпчики;
- головну діагональ;
- побічну діагональ.

Елемент визначника $a_{ij}$ записують з індексами, які представляють собою дві цифри, перша з яких $i$ - це номер рядка, друга $j$ - номер стовпчика.

Ці дві цифри записують без розділових знаків через пробіл. Індексацію елемента також називають його адресою.

**Def. Порядок визначника - це кількість рядків або стовпців (так як їх кількість однакова).**

Наприклад, визначник з двох рядків і двох стовпців називають визначником другого порядку, визначник з трьох рядків і трьох стовпців - визначником третього порядку і т. д.

Елементи головної діагоналі визначника записуються так:

$$a_{ii} \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

де n - порядок визначника. Для визначника третього порядку це елементи $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$.

Елементи побічної діагоналі визначника записуються як

$$a_{i \quad n-i+1},$$

де $i$ - номер рядка, а n-i +1 − номер стовпчика. Для визначника третього порядку це елементи $a_{13}$, $a_{22}$, $a_{31}$.

### *1.2.1. Основне визначення визначника*

Нехай задана табличка визначника виду

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Формулювання визначника містить фразу «**число, яке за певним правилом ставиться у відповідність табличці чисел**». Розглянемо будь-який добуток $n$ елементів, з різних рядків та різних стовпців цієї таблички, тобто по одному у кожному рядку і кожному стовпці. Такий добуток можна записати у вигляді

$$a_{1\ S1} \cdot a_{2\ S2} \cdot \ldots \cdot a_{n\ Sn},$$

де перші номери в індексах $1,2,\ldots,n$ - це номери рядків, а другі номери індексів $S1,\ S2,\ldots,\ Sn$ - номери стовпців, в яких розташовані елементи. При цьому, якщо елемент вже вибраний з першого рядка, то наступний елемент другого рядка повинен бути обраний так, щоб номер його стовпчика не збігався з номером стовпця елемента першого рядка, тобто вибір повинен бути зроблений так, щоб номери рядків не повторювалися і номери стовпців не повторювалися (номер рядка і номер стовпця можуть збігатися). Отже, для наведеного добутку елементів номера стовпців $S1,\ S2,\ldots,\ Sn$ - це різні що не повторюються натуральні числа, що утворюють при побудові добутка елементів деяку перестановку чисел $1,\ 2,\ldots,\ n$.

В комбінаториці існує таке поняття, як «перестановка з $n$ елементів ». Вона позначається як $P(n)$ елементів.

**Def. Під перестановкою з $n$ елементів розуміють кількість варіантів різних послідовних розташувань $n$ елементів:**

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

ПРИКЛАД. Нехай задано три елементи $\{1,\ 2,\ 3\}$. Можливі такі варіанти розташування елементів:

$$\{1,\ 2,\ 3\},\{1,\ 3,\ 2\},\{2,\ 1,\ 3\},\{2,\ 3,\ 1\},\{3,\ 1,\ 2\},\{3,\ 2,\ 1\}.$$

У цьому прикладі $P(3)=3\cdot 2\cdot 1=6$.

Отже, для заданої таблички визначника можна побудувати $P(n)$ варіантів добутків $n$ елементів, розташованих у різних рядках і різних стовпцях цієї таблички, тобто $P(n)$ варіантів однозначних добутків виду $a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot\ldots\cdot a_{n\ Sn}$.

**Def. Під безладом в числової послідовності** $S1, S2, \ldots, Sn$ **будемо розуміти таке розташування двох чисел, коли більше число стоїть раніше меншого.**

Число таких безладів позначається як $N(S1,\ S2,\ldots,\ Sn)$ та називається інверсією.

ПРИКЛАД. У послідовності $(3,\ 2,\ 1)$ - три безладу (3 попереду 2, 3 попереду 1, 2 попереду 1), отже, інверсій $N(3,\ 2,\ 1)=3$. У послідовності $(2,\ 3,\ 1)$ - два безладу (2 попереду 1, 3 попереду 1), отже, $N(2,\ 3,\ 1)=2$. У послідовності $(2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 4)$ чотири безладу (2 попереду 1, 3 попереду 1, 5 попереду 1, 5 попереду 4), отже, $N(2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 4)=4$.

Знову розглянемо будь-які можливі добутки $n$ елементів, розташованих у різних рядках і різних стовпцях таблички визначника:

$$a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot\ldots\cdot a_{n\ Sn}.$$

Нехай перші індекси всіх елементів множників розташовані строго по зростанню $1,2,\ldots,n$. Тоді, якщо число безладів у послідовності других індексів $S1,\ S2,\ldots,\ Sn$ парне, то поставимо перед записаним добутком знак «+», якщо - непарне, то знак «-». Отже, отримаємо вираз

$$(-1)^{N(S1,\ S2,\ldots,\ Sn)}\cdot a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot\ldots\cdot a_{n\ Sn}.$$

**Def. Під визначником будемо розуміти число, що дорівнює алгебраїчній сумі** $P(n)$ **добутків виду**

$$(-1)^{N(S1,\ S2,\ldots,\ Sn)}\cdot a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot\ldots\cdot a_{n\ Sn},$$

**побудованих з елементів таблиці чисел, що складається з однакової кількості рядків і стовпців.**

### *1.2.2. Обчислення визначників 1-го, 2-го і 3-го порядків*

Розглянемо, як число (визначник) ставиться у відповідність таблиці для визначників 1-го, 2-го і 3-го порядків.

1. Визначник 1-го порядку - це число, яке дорівнює елементу визначника:

$$|a_{11}|=a_{11}.$$

За визначенням $N(1)=0$. отже, $|a_{11}|=(-1)^0 a_{11}=a_{11}$.

2. Визначник 2-го порядку - це число, що дорівнює різниці між доутком елементів головної діагоналі і добутком елементів побічної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

так як $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

ПРИКЛАД:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 12 + 4 = 16.$$

3. Визначник 3-го порядку. Для розрахунку використовується правило Саррюса, відповідно до якого до визначника справа приписують два перших стовпця заданого визначника і обчислюють суму добутків елементів відносно головної діагоналі зі знаком «плюс» і щодо побічної діагоналі зі знаком «мінус»:

Дійсно, для визначника 3-го порядку кількість добутків має бути $3 \cdot 2 = 6$.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Алгебраїчна сума визначника має вигляд

$$\begin{aligned} &(-1)^{N(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{N(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{N(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &+ (-1)^{N(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{N(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{N(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= (-1)^{0} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{2} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{2} a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &+ (-1)^{3} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{1} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{1} a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

ПРИКЛАД:

$$\left|\begin{matrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{matrix} = 5 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot (-5) -$$

$$-(-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 \cdot 1 = -10 + 4 + 15 - 4 + 25 - 6 = 24.$$

*1.2.3. Обчислення визначників методом пониження порядку*

**Def. Під мінор елемента $a_{km}$ визначника *n*-го порядку будемо розуміти визначник *(n-1)* -го порядку, утворений із заданого викреслюванням *k*-го рядка і *m*-го стовпця.**

Позначається мінор як $M_{km}$.

ПРИКЛАД: Для визначника 4-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

різні мінори можна записати у вигляді

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \; M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \; M_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Всього для визначника n-го порядку можна записати $n^2$ мінорів елементів.

*Зауваження.* За мінор елемента визначника 1-го порядку приймають одиницю.

**Def. Під алгебраїчним доповненням** $a_{km}$ **елемента визначника n-го порядку будемо розуміти добуток його мінору на мінус одиницю у степені суми індексів заданого елемента** $(k+m)$**:**

$$A_{km} = (-1)^{k+m} M_{km}.$$

**Def. Значення визначника n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або стовпця на алгебраїчні доповнення цих елементів.**

Для і-го рядка можна записати

$$det = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$
$$= a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

Наприклад, для визначника 2-го порядку отримаємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} - a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}| =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

а визначника 3-го порядку -

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

## 1.3. Висновки

***Def.* рівняння з $n$ невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \qquad (1.1)$$

***де* $a_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *і* $b$ *- деякі числа.***

*Називають:* $a_i$ *- коефіцієнт рівняння;* $b$ *- вільний елемент рівняння.*

***Def.* Сукупність $n$ чисел $l_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ називається рішенням рівняння (1.1), якщо після заміни в ньому невідомих $x_i$ відповідно числами $l_i$ воно перетворюється в тотожність.**

*Числа* $l_i$ *називаються компонентами рішення.*

*Загальний вигляд системи* $m$ *лінійних рівнянь з* $n$ *невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

*Коефіцієнти рівняння позначають двома індексами* $a_{ij}$, *де перший індекс* $i$ *- номер рівняння, а другий індекс* $j$ *- номер невідомого, при якому записаний коефіцієнт.*

***Def.* Рішенням системи лінійних рівнянь (1.2) називають таку сукупність записаних в певному порядку чисел $l_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, що кожне з рівності системи (1.2) перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих $x_i$ відповідно числами $l_i$.**

***Def.* Система рівнянь, яка має рішення, називається сумісною. Система, яка не має жодного рішення, називається несумісною.**

***Def.* Спільна система лінійних рівнянь називається визначеною, якщо є тільки одне рішення, і невизначеною, якщо число її рішень більше одного.**

*Вирішити систему лінійних рівнянь означає наступне:*

*- визначити, якою є система - сумісною або несумісною;*

*- якщо система є сумісною, то встановити, визначена вона або невизначена;*

*- якщо система є визначеною, то знайти її єдине рішення;*

*- якщо система є невизначеною, то знайти сукупність всіх її рішень.*

***Def.* Під визначником, або детермінантою, будемо розуміти число, яке за певним правилом ставиться у відповідність табличці чисел, що складається з однакової кількості рядків і стовпців.**

*Визначник позначається двома бічними прямими лініями.*

*Для позначення визначника використовують також такі записи:*

$$|a_{ij}|, \ |a_{ij}|^n, \ |a_{ij}|_{i,j=1}^n, \ det(a_{ij}), \ \det A, \ det(a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

*У загальному випадку визначник записують у вигляді таблички з літерними елементами:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

*У табличці розрізняють рядки, стовпці, головну діагональ, побічну діагональ.*

*Елемент визначника $a_{ij}$ записують з індексами, які представляють собою дві цифри: $i$ - номер рядка, $j$ - номер стовпчика.*

***Def. Порядок визначника - це кількість рядків або стовпців (так як їх кількість однакова).***

*Елементи головної діагоналі визначника записуються як $a_{ii}$ ($i = 1, ..., n$), де $n$ - порядок визначника.*

*Елементи побічної діагоналі визначника записуються як $a_{i\ \ n-i+1}$, де $i$ - номер рядка, а $n$-$i$ + 1 - номер стовпчика.*

***Def. Під перестановкою з $n$ елементів розуміють кількість варіантів різних послідовних розташувань $n$ елементів:***

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1.$$

*Для заданої таблички визначника можна побудувати $P(n)$ варіантів добутків $n$ елементів, розташованих в різних рядках і різних стовпцях цієї таблички, тобто $P(n)$ варіантів однозначних добутків виду*

$$a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot \ldots \cdot a_{n\ Sn}.$$

***Def. Під безладом у числовій послідовності $S1, S2, ..., Sn$ будемо розуміти таке розташування двох чисел, коли більше число стоїть раніше меншого.***

*Число всіх безладів позначається як $N(S1, S2, ..., Sn)$* та називається інверсією.

***Def. Під визначником будемо розуміти число,*** **що дорівнює алгебраїчній сумі $P(n)$ добутків виду**

$$(-1)^{N(S1,S2,...,Sn)}\cdot a_{1\ S1}\cdot a_{2\ S2}\cdot \ldots \cdot a_{n\ Sn},$$

***побудованих з елементів таблички чисел, що складається з однакової кількості рядків і стовпців.***

*Обчислення визначників на практиці:*

*1. Визначник 1-го порядку - це число, яке дорівнює елементу визначника:*

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

*2. Визначник 2-го порядку - це число, що дорівнює різниці між добутком елементів головної діагоналі і добутком елементів побічної діагоналі:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

*3. Визначник 3-го порядку. Для обчислення використовується правило Саррюс, відповідно до якого до визначника справа приписують два перших стовпця заданого визначника і знаходять суму добутків елементів відносно головної діагоналі зі знаком «плюс» і щодо побічної діагоналі зі знаком «мінус».*

***Def. Під мінор елемента** $a_{km}$ **визначника n-го порядку будемо розуміти визначник (n -1) -го порядку, утворений із заданого викреслюванням k-го рядка і m-го стовпця.***

*Позначається мінор як* $M_{km}$.

*Всього для визначника n-го порядку можна записати* $n^2$ *миноров елементів.*

***Зауваження**. За мінор елемента визначника 1-го порядку приймають одиницю.*

***Def. Під алгебраїчним доповненням** $a_{km}$ **елемента визначника n-го порядку будемо розуміти добуток його мінору на мінус одиницю у степені суми індексів заданого елемента** $(k+m)$**:***

$$A_{km} = (-1)^{k+m} M_{km}.$$

***Def. Значення визначника n-го порядку дорівнює сумі алгебри творів елементів довільної рядки або стовпці на їх алгебраїчні доповнення.***

*Для і-го рядка можна записати*

$$det(a_{ij})_{i,j=1}^{n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

## 1.4. Питання для перевірки

**1. За визначник числа приймають:**

а) одиницю; б) саме число; в) нуль.

**2. Під визначником n-го порядку мають на увазі:**

а) табличку чисел, що складається з n рядків; б) табличку чисел, що складається з n рядків і n стовпців; в) табличку чисел, що складається з n стовпців.

**3. Визначник позначається:**

а) двома бічними фігурними дужками; б) двома бічними квадратними дужками; в) двома бічними прямими лініями.

**4. Визначник позначається:**

а) ted; б) dete; в) Det.

**5. Мінор елемента визначника - це:**

а) визначник, отриманий з заданого шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких розташований обраний елемент; б) визначник, отриманий з заданого шляхом заміни елементів рядка і стовпця, на перетині яких розташований вибраний елемент, одиницями; в) визначник, отриманий з заданого шляхом заміни обраного елемента одиницею.

**6. Мінор елемента позначається:**

а) $M_{ik}$; б) $m_{ik}$; в) $min_{ik}$.

**7. Алгебраїчне доповнення елемента визначника - це:**

а) добуток (-1) і мінору цього елемента; б) добуток $(-1)^{i+k}$ і мінору $M_{ik}$; в) подвоєний мінор заданого елемента.

**8. Визначник дорівнює:**

а) алгебраїчній сумі добутків елементів рядка на їх мінори;
б) алгебраїчній сумі добутків елементів рядка на їх алгебраїчні доповнення; в) алгебраїчній сумі добутків елементів всіх рядків.

## 1.5. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити визначники 2-го порядку:

$$1.1.\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.\ 1.2.\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.\ 1.3.\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}.\ 1.4.\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначники 3-го порядку:

$$2.1.\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.\ 2.2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.\ 2.3.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.\ 2.4.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити визначники 4-го порядку:

$$3.1.\ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.\ 3.2.\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}.\ 3.3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$3.4.\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.\ 3.5.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.\ 3.6.\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

# 2. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

## 2.1. Транспонування визначника

**Def. Транспонуванням визначника називають таке його перетворення, при якому рядки цього визначника стають стовпцями, а стовпці рядками.**

Транспонований визначник позначається так

$$\left|a_{ij}^T\right|,\ \left|a_{ij}^T\right|^n,\ \left|a_{ij}^T\right|_{i,j=1}^n,\ det\left(a_{ij}^T\right),\ det\,A^T,\ det\left(a_{ij}^T\right)_{i,j=1}^n.$$

ПРИКЛАД:

$$\left|a_{ij}\right|^3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & 4 & -5\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix};\qquad \left|a_{ij}^T\right|^3=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & 4 & 0\\ 0 & -5 & 2\end{vmatrix}.$$

## 2.2. Властивості визначників

Перелічимо основні властивості визначників.

**1. Транспонування визначника не змінює його значення.**

ПРИКЛАД:

$$\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)\cdot1+3\cdot3\cdot3-$$
$$-3\cdot2\cdot1-2\cdot(-1)\cdot3-(-1)\cdot3\cdot(-2)=-8+1+27-6+6-6=14;$$

$$\left|a_{ij}^T\right|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot(-2)+3\cdot3\cdot3+1\cdot(-1)\cdot(-1)-$$
$$-1\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot(-1)-3\cdot(-1)\cdot(-2)=-8+27+1-6+6-6=14.$$

*Зауваження*. Наслідком властивості визначників щодо транспонування є те, що щодо рядків, мають місце силу і відносно стовпців.

**2. Якщо будь який рядок визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.**

Це пояснюється тим, що в кожний доданок алгебраїчної суми значення визначника входять елементи кожного рядка.

ПРИКЛАД:

$$\left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 3 -$$

$$= -3\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot 0\cdot(-2) = 0.$$

**3. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний.**

ПРИКЛАД:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 4\cdot 1 = 2.$$

**4. Визначник, який містить два однакові рядки, дорівнює нулю.**

◄ Нехай визначник $\left|a_{ij}\right|$ містить два однакові рядки $S$ і $K$. Помінявши їх місцями, отримуємо визначник $\left|a_{ij}\right|'$. З третього властивості випливає, що

$$\left|a_{ij}\right| = -\left|a_{ij}\right|'.$$

Визначник при перестановці однакових рядків залишився тим же, значить,

$$\left|a_{ij}\right| = \left|a_{ij}\right|' \Rightarrow -\left|a_{ij}\right|' = \left|a_{ij}\right|' \Rightarrow \left|a_{ij}\right|' = 0. \text{ ►}$$

**5. Якщо всі елементи одного з рядків визначника помножити на деяке число $\lambda$, То значення визначника збільшиться в $\lambda$ раз.**

◄ Якщо всі елементи $i$- го рядка помножити на $\lambda$, то кожний доданок визначника множиться $\lambda$, а отже, і визначник множиться на $\lambda$. ►

ПРИКЛАД:

$$\left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3\cdot\lambda & 2\cdot\lambda & -1\cdot\lambda \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot\lambda\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1)\cdot\lambda\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot\lambda\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 2\cdot\lambda\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot\lambda\cdot 3 - (-1)\cdot 3\cdot\lambda\cdot(-2) = -8\cdot\lambda + 1\cdot\lambda + 27\cdot\lambda - 6\cdot\lambda + 6\cdot\lambda - 6\cdot\lambda = 14\cdot\lambda.$$

**6. Визначник, у якому є дві пропорційні рядки, дорівнює нулю.**

Два рядки називаються пропорційними, якщо один з рядків отримано з іншого шляхом множення його на деяке число.

◄ Якщо винести те число, на яке множиться деякий рядок, то отримаємо визначник з двома однаковими рядками. Тоді відповідно до четвертої властивості визначник дорівнює нулю. ►

**7. Якщо кожен елемент $i$- го рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім $i$-го,**

**однакові, а $i$-й рядок першого визначника складається з перших доданків, а $i$-й рядок другого визначника - з других доданків.**

Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для підтвердження цієї властивості розглянемо визначник у двох варіантах: простий визначник і визначник, у якому рядок представлено сумою двох чисел.

ПРИКЛАД:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1+2 & 2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2.$$

**8. Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією інших його рядків, то визначник дорівнює нулю.**

Під лінійною комбінацією рядків розуміють те, що деякий рядок визначника дорівнює сумі двох інших, помножених на деякі числа:

◀

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11}+\mu a_{31} & \lambda a_{12}+\mu a_{32} & \lambda a_{13}+\mu a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu a_{31} & \mu a_{32} & \mu a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 \blacktriangleright.$$

**9. Якщо до елементів одного рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на деяке число, то визначник не зміниться.**

◀ До $i$-го рядка визначника $|a_{ij}|$ додамо $k$-тий рядок $(i \neq k)$, помножений на $\lambda$. У новому визначнику $|a_{ij}|'$ кожен елемент $i$-го рядка має вигляд

$$a_{ij} + \lambda a_{kj} \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

По сьомій властивості визначник дорівнює сумі двох визначників, один з яких $\left|a_{ij}\right|$, А другий має два пропорційні рядки: $i$-тий і $k$-тий, тобто по шостій властивості такий визначник дорівнює нулю, отже, $\left|a_{ij}\right| = \left|a_{ij}\right|'$. ►

### 2.3. Обчислення визначника з використанням його властивостей

Використовуючи властивості визначників, можна можна приводити до такого виду, коли його обчислення спрощується. Це може бути, наприклад, трикутний визначник.

**Def. Під трикутним визначником будемо розуміти такий визначник, у якому всі елементи, що знаходяться під елементами головної діагоналі, дорівнюють нулю.**

ПРИКЛАД:

$$\left|a_{ij}\right|^3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

***Теорема*. Трикутний визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі визначника.**

◄ Нехай задано визначник порядку $n = 1$. Його значення дорівнює:

$$\left|a_{11}\right| = a_{11}.$$

Нехай значення трикутного визначника порядку $n$ дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Розглянемо визначник трикутної форми порядку $n+1$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}.$$

При розкладанні цього визначника по останньому рядку отримуємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = a_{n+1n+1}(-1)^{2(n+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot a_{n+1n+1}.$$

Отже, трикутний визначник порядку $n+1$ також дорівнює добутку елементів головної діагоналі. ►

Наведена теорема використовується в методі Гаусса для обчислення визначників.

**Def. Метод Гаусса полягає в тому, що, використовуючи властивості визначників, заданий визначник перетворять в трикутний і його значення розраховують як добуток елементів головної діагоналі.**

*Зауваження.* Перетворення, пов'язані з властивостями визначників, записують над або під стрілками еквівалентності в ланцюжку одержуваних при цьому визначників.

ПРИКЛАД:

$$|a_{ij}|^3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{1j} - a_{2j} \\ \\ \\ \end{matrix} \to \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{2j} + 5a_{1j} \\ \to \\ a_{3j} + a_{1j} \end{matrix}$$

$$\to \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 22 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ a_{2j} + a_{3j} \end{matrix} \to \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 29 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{3j} - 3a_{2j} \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 29 \\ 0 & 0 & -80 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-1)(-80) = 40.$$

*Коментар.* Множник $\frac{1}{2}$ перед визначником з'явився внаслідок того, що перший рядок визначника було помножено на 2. Над і під стрілками еквівалентності вказують виконувані операції. При цьому перше число в індексі - номер того рядка, який буде змінено. Індекс $j$ в операціях вказує на дію щодо елементів рядка, тобто $j$ для зазначених операцій приймає значення $1,2,\dots,n$.

### 2.4. Правило Крамера

**Теорема 1. Сума добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника і алгебраїчних доповнень відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:**

$$a_{i1}A_{S1} + a_{i2}A_{S2} + \ldots + a_{in}A_{Sn} = 0,$$

**де** $i \neq S$**.**

◀ Нехай заданий визначник

$$\left|a_{ij}\right|^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & & & \\ a_{S1} & a_{S2} & \ldots & a_{Sn} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо його за елементами $S$ - го рядка:

$$\left|a_{ij}\right|^n = a_{S1}A_{S1} + a_{S2}A_{S2} + \ldots + a_{Sn}A_{Sn}. \qquad (2.1)$$

алгебраїчні доповнення $A_{Sj}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ не залежать від значення елементів $a_{Sj}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, тому рівність (2.1) буде справедливо для елементів будь-якого рядка, наприклад $a_{ij}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, тільки в тому випадку, якщо $a_{ij} = a_{Sj}$, тобто коли визначник має два однакові рядки. Але в цьому випадку визначник дорівнює нулю.▶

Наведена теорема дозволяє сформулювати другу теорему, яка називається правилом Крамера.

Припустимо, що задана система $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.2)$$

**Def. Визначник, складений з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь, називається визначником системи** $n$ **лінійних рівнянь.**

Позначимо цей визначник через $d$:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Теорема 2 (правило Крамера). якщо визначник $d$ системи $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими не дорівнює нулю $(d \neq 0)$, то система є сумісною і визначенною і її рішення має вигляд**

$$l_1 = \frac{d_1}{d},\ l_2 = \frac{d_2}{d},\ ...,\ l_n = \frac{d_n}{d},$$

**де $d_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ - визначник, отриманий з визначника $d$ заміною його $j$-го стовпця вільними елементами системи.**

ПРИКЛАД:

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

◄ Припустимо, що система (2.2) - сумісна, а $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$- її рішення. Тоді справедливі рівняння

$$\begin{aligned} a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + \ldots + a_{1n}l_n = b_1, \\ a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + \ldots + a_{2n}l_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}l_1 + a_{n2}l_2 + \ldots + a_{nn}l_1 = b_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Візьмемо довільне число $j$ з чисел $1,2,\ldots,n$. Помножимо перше рівняння в (2.3) на алгебраїчне доповнення $A_{1j}$, Друге - на $A_{2j}$ і т.д.:

$$\begin{aligned} (a_{11}l_1 + a_{12}l_2 + \ldots + a_{1j}l_j + \ldots + a_{1n}l_n)A_{1j} = b_1 A_{1j}, \\ (a_{21}l_1 + a_{22}l_2 + \ldots + a_{2j}l_j + \ldots + a_{2n}l_n)A_{2j} = b_2 A_{2j}, \\ \ldots \\ (a_{n1}l_1 + a_{n2}l_2 + \ldots + a_{nj}l_j + \ldots + a_{nn}l_n)A_{nj} = b_n A_{nj}. \end{aligned}$$

Запишемо суму цих рівнянь з винесеними множниками $l_1, l_2, \ldots, l_n$:

$$\begin{gathered} (a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})l_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})l_2 + \ldots \\ \ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})l_j + \ldots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})l_n = \\ = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}. \end{gathered}$$

По теоремі 1 всі доданки, розташовані зліва від знака рівності, дорівнюють нулю, крім

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \neq 0,$$

який дорівнює $d$. Вираз справа є визначником виду

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j=1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який позначимо через $d_j$. тоді отримаємо $dl_j = d_j$, звідки $l_j = \frac{d_j}{d}$. ▶

ПРИКЛАД:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{2j} + a_{1j} \\ \rightarrow \\ a_{3j} + a_{1j} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot 3 = -6;$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{2j} + a_{1j} \\ \rightarrow \\ a_{3j} + a_{1j} \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot 3 = -6;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{2j} + a_{1j} \\ \rightarrow \\ a_{3j} + a_{1j} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(2\cdot 8 - 2\cdot 2) = -12;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{2j} - a_{1j} \\ \rightarrow \\ a_{3j} - a_{1j} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 1(-2\cdot 8 - 1\cdot 2) = -18;$$

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{-6}{-6} = 1, \qquad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{-12}{-6} = 2, \qquad x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{-18}{-6} = 3.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2 - 3 = 0, \\ 1 - 2 + 3 = 2, \\ 1 + 2\cdot 2 + 3 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ 2 = 2, \\ 8 = 8. \end{cases}$$

## 2.5. Висновки

***Def. Якщо в заданому визначнику поміняти місцями рядки і стовпці, то такий визначник називається транспонований до заданого.***

*Транспонований визначник позначається як*

$$\left|a_{ij}^T\right|,\ \left|a_{ij}^T\right|^n,\ \left|a_{ij}^T\right|_{i,j=1}^n,\ det\left(a_{ij}^T\right),\ det\,A^T,\ det\left(a_{ij}^T\right)_{i,j=1}^n.$$

*Основні властивості визначників:*

***1. Транспонування визначника не змінює його значення.***

*Зауваження. В силу властивостей визначників щодо транспонування всі властивості, що розглядаються щодо рядків, мають силу і щодо стовпців.*

***2. Якщо який-небудь рядок визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулю.***

***3. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний.***

***4. Визначник, який містить два однакові рядки, дорівнює нулю.***

***5. Якщо всі елементи одного з рядків визначника помножити на деяке число $\lambda$, То значення визначника збільшиться в $\lambda$ разів.***

***6. Визначник, у якому є дві пропорційні рядки, дорівнює нулю.***

***7. Якщо кожен елемент $i$ го рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім $i$-го, однакові, а $i$-й рядок першого визначника складається з перших доданків, а $i$-й рядок другого визначника - з других доданків.***

***8. Якщо один з рядків визначника - лінійна комбінація інших його рядків, то визначник дорівнює нулю.***

***9. Якщо до елементів одного рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на деяке число, то визначник не зміниться.***

*Використовуючи властивості визначників, визначник можна приводити до такого виду, коли його обчислення спрощується. Це може бути, наприклад, трикутний визначник.*

***Def. Під трикутним визначником будемо розуміти такий визначник, у якому всі елементи, що знаходяться під елементами головної діагоналі, дорівнюють нулю.***

***Теорема. Трикутний визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі визначника.***

*Ця теорема використовується в методі Гаусса для розрахунку значення визначників.*

***Def. Метод Гаусса для розрахунку значення визначника полягає у тому, що, використовуючи властивості визначників, заданий визначник перетворюють в трикутний і його значення розраховують як добуток елементів головної діагоналі.***

*Зауваження. Перетворення, пов'язані з властивостями визначників записують над або під стрілками еквівалентності в ланцюжку одержуваних при цьому визначників.*

***Теорема 1. Сума добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника і алгебраїчних доповнень відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю:***

$$a_{i1}A_{S1}+a_{i2}A_{S2}+\ldots+a_{in}A_{Sn}=0,$$

*де* $i \neq S$.

*Нехай задана система* $n$ *лінійних рівнянь з* $n$ *невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

***Def. Визначник, складений з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь, називається визначником системи*** $n$ ***лінійних рівнянь.***

*Позначимо цей визначник через* $d$:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Теорема 2 (правило Крамера). якщо визначник*** $d$ ***системи*** $n$ ***лінійних рівнянь з*** $n$ ***не відомо не дорівнює нулю*** $(d \neq 0)$***, то система є сумісна і визначена і її рішення має вигляд***

$$l_1 = \frac{d_1}{d},\ l_2 = \frac{d_2}{d},\ \ldots,\ l_n = \frac{d_n}{d},$$

***де*** $d_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ***- визначник, отриманий з визначника*** $d$ ***заміною його*** $j$***-го стовпця вільними елементами системи.***

## 2.6. Питання для перевірки

**1. Визначник, транспонований до заданого визначник, - це такий визначник, у якому:**

а) щодо заданого визначника поміняли місцями рядки;

б) щодо заданого визначника поміняли місцями стовпчики;

в) щодо заданого визначника поміняли місцями рядки і стовпці.

**2.Транспонований визначник позначається:**

а) $\det(a_{ik})^{т}$; б) $\det^{т}(a_{ik})$ ; в) $\det(a_{ik}{}^{т})$.

**3. Якщо будь-який рядок визначника дорівнює нулю, то визначник дорівнює:**

а) одиниці; б) нескінченності; в) нулю.

**4. Якщо заданий визначник замінити транспонованим, то:**

а) його значення не зміниться; б) його знак зміниться на протилежний; в) його значення дорівнюватиме нулю.

**5. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки, то:**

а) його значення не зміниться; б) його знак зміниться на протилежний; в) його значення дорівнюватиме нулю.

**6. Визначник, який містить два однакові рядки, дорівнює:**

а) нулю; б) одиниці; в) добутку елементів цих рядків.

**7. Якщо всі елементи якого-небудь рядка визначника помножити на одне і те ж число, то значення визначника:**

а) не зміниться; б) дорівнюватиме заданому визначнику, помноженому на це число; в) дорівнюватиме заданому визначнику, поділеному на це число.

**8. Визначник, у якому два рядки пропорційні, дорівнює:**

а) одиниці; б) нулю; в) добутку елементів цих рядків.

**9. Якщо до елементів одного рядка визначника додати елементи іншого рядка, помноженого на деяке число, то визначник:**

а) буде дорівнює нулю; б) не зміниться; в) буде дорівнювати одиниці.

**10. Обчислення визначника методом пониження порядку полягає:**

а) в розкладанні визначника по першому рядку; б) в розкладанні визначника по будь-якому рядку або будь-якому стовпцю; в) в розкладанні визначника по першому стовпцю.

**11. Правило Саррюса можна використовувати для визначників:**

а) третього порядку; б) будь-якого порядку; в) другого порядку.

**12. Виберіть неправильний запис:**

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix};\ \text{б)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

## 2.7. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити визначники, використовуючи відповідні властивості:

$$1.1.\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.\ 1.2.\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.\ 1.3.\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.\ 1.4\ \begin{vmatrix} 0 & \grave{a} & \grave{a} \\ \grave{a} & 0 & \grave{a} \\ \grave{a} & \grave{a} & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.5.\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ \grave{a} & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.\ 1.6.\ \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.\ 1.7.\ \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.\ 1.8.\ \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Найти розв’язки системи рівнянь за правилом Крамера:

2.1. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x-7y=81. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} 3x-4y=1, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=16. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+3x_3-x_4=10, \\ x_1+x_2-5x_3=10, \\ 3x_2+2x_3=1. \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=6, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$

### *2.8.2. Практика для самостійної роботи*

1. Обчислити визначники, використовуючи його властивості:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. 1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$. 1.4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

1.5. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$. 1.6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. 1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. 1.8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$. 1.10. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

2. Найти розв'язки системи рівнянь за правилом Крамера:

2.1. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7. \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x-y+z=b, \\ x+y-z=c. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 16, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 = 0. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

*Векторна алгебра. Основні визначення. Алгебра векторів. Поняття нульового вектора і рівності векторів. Сума векторів. Множення вектора на скаляр. Одиничний вектор. Аксіоми додавання векторів і множення на число. Проекція точки на вісь. Проекція вектора на вісь. Кут між векторами. Основні властивості проекцій*

# 3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Векторне числення було розроблено в XIX столітті такими математиками, як Гамільтон, Мебіус, Максвелл, і набуло широкого поширення, оскільки сприяє значному скороченню обчислень і, крім того, має багато додатків.

В одних випадках записи модельних уявлень можуть бути компактними і більш наочними в векторній формі, в інших - в аналітичному вигляді. Тому важливо навчитися переходити від однієї форми математичного представлення до іншого.

## 3.1. Основні визначення

Розрізняють два класи величин:

**1. Def. Скалярні величини - це величини, які характеризуються тільки числом.**

ПРИКЛАД: температура, маса.

**2. Def. Векторні величини - це величини, які характеризуються числом і напрямом.**

ПРИКЛАД: Сила, швидкість.

Останнє визначення описує поняття геометричного вектора.

**Def. Під геометричним вектором можна розуміти спрямований відрізок прямої, один кінець якого називається початком вектора, а інший - кінцем.**

Надалі геометричний вектор будемо називати просто вектором.

На площині або в просторі вектор зображують у вигляді відрізка прямої зі стрілкою. Позначати вектор можна так:

- малою буквою напівжирним шрифтом;
- малою буквою зі стрілкою;
- двома великими літерами;
- двома великими буквами зі стрілкою (рисунок 3.1).

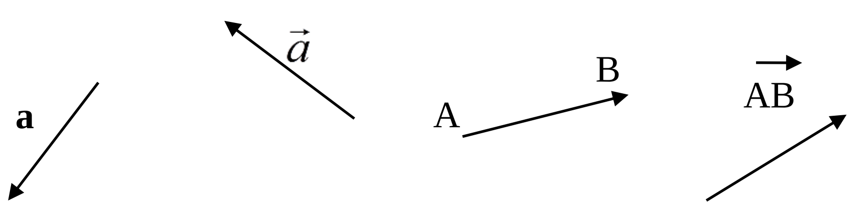



Рисунок 3.1

При позначенні вектора двома літерами одна буква позначає початок вектора, а друга - його кінець.

Вектори в математиці вважають вільними, тобто вектори можуть бути розташовані в будь-якій точці простору, і їх можна переносити в просторі паралельно самим собі.

Важлива характеристика вектора - його модуль.

**Def. Модуль геометричного вектора - це його довжина.**

Позначається модуль вектора двома вертикальними лініями: $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Розрізняють нульовий і одиничний вектори.

**Def. Під нульовим вектором розуміють вектор, модуль якого дорівнює нулю.**

**Def. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором і позначається $\vec{e}$, причому $|\vec{e}| = 1$.**

**Def. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямком заданого вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^{o}$.**

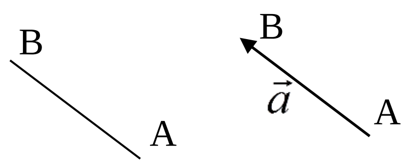



Рисунок. 3.2

*Зауваження.* всякий відрізок $AB$ можна уявити вектором $\vec{a}$, Якщо до точки $A$ докласти вектор $\vec{a}$, модуль якого дорівнює довжині відрізка $AB$, так, що кінець вектора співпаде з точкою $B$ (рисунок 3.2).

Отже, для того, щоб задати вектор, треба знати його модуль і напрямок.

## 3.2. Алгебра векторів

**Def. Два вектора рівні, якщо:**

**а) рівні їх модулі;**

**б) вони збігаються за напрямком (паралельні).**

**Def. Два вектора називаються рівно протилежними або прямо протилежними, якщо:**

**а) рівні їх модулі;**

**б) вони паралельні між собою;**

**в) спрямовані в протилежні сторони.**

Це можна записати так:

$$\vec{a} = -\vec{b}, \text{ якщо } |\vec{a}| = |\vec{b}|,\ \vec{a} \parallel \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}.$$

**Def. Вектори, що лежать на одній прямій, і вектори, паралельні одній прямій, називаються колінеарними.**

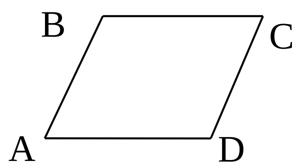



Рисунок. 3.3

ПРИКЛАД. Задано паралелограм $ABCD$ (рисунок 3.3). Якщо уявити його векторами $\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, То мають місце записи: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Щодо векторів введені такі операції: додавання, множення на число, скалярний добуток, векторний добуток, змішаний добуток, подвійний векторний добуток.

### *3.2.1. Сума векторів*

**1. Правило паралелограма**. Сумою двох непаралельних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який являє собою діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виходять з однієї точки (рисунок 3.4).

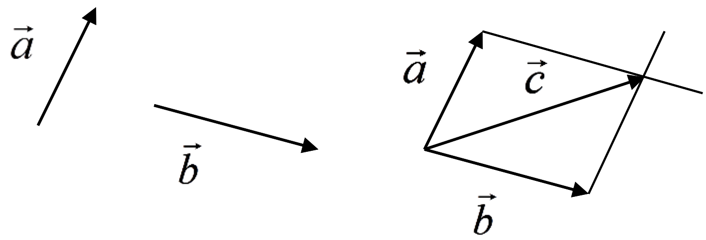


Рисунок. 3.4

*Зауваження.* Для двох паралельних векторів правило паралелограма вироджується, і побудова суми двох паралельних векторів представляє собою послідовну побудову ланцюжком цих векторів (рисунок 3.5).

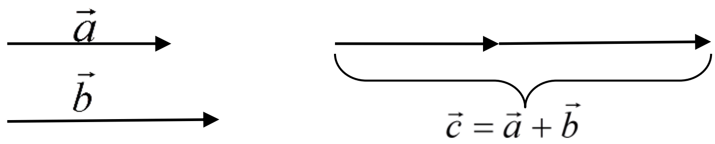


Рисунок. 3.5

**2. Правило трикутника**. Під сумою двох довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють такий третій вектор $\vec{c}$, який виходить з початку першого вектора $\vec{a}$ і служить стороною трикутника, побудованого при суміщенні кінця першого вектора $\vec{a}$ з початком другого вектора $\vec{b}$ (рисунок 3.6).

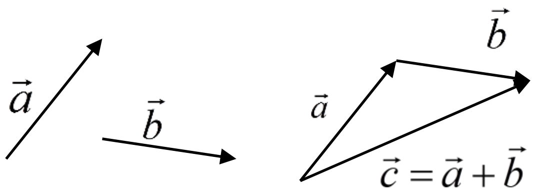
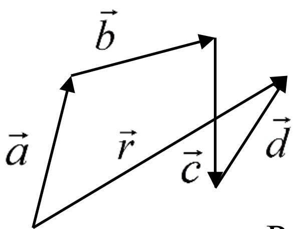


Рисунок. 3.6

*Зауваження 1.* Сума декількох векторів визначається як вектор, який замикає початок першого вектора з кінцем останнього вектора в побудованому ланцюжку заданих векторів (рисунок 3.7).




$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

Рисунок. 3.7

*Зауваження 2.* Різниця векторів $\vec{a}-\vec{b}$ визначається як сума вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{b}$ (рисунок 3.8):

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

За правилом паралелограма різницею векторів є вектор меншої діагоналі паралелограма, (див. рисунок 3.8).

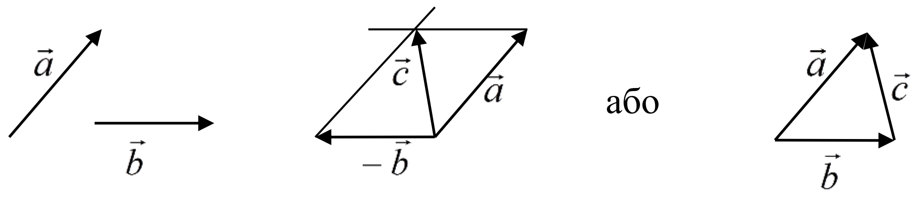



Рисунок. 3.8

*3.2.2. Множення вектора на скаляр*

**Def. Добутком вектора $\vec{a}$ і числа $\lambda$ називають вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, такий, що:**

**1) модуль вектора $\lambda \cdot \vec{a}$ дорівнює добутку модулів числа $\lambda$ і вектора $\vec{a}$: $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;**

**2) напрямки векторів $\vec{a}$ і $\lambda \cdot \vec{a}$ збігаються, якщо $\lambda > 0$, і протилежні, якщо $\lambda < 0$.**

ПРИКЛАД. Задано вектор $\vec{a}$ . Визначити добуток $(-3) \cdot \vec{a}$. Рішення представлено на рисунку 3.9.

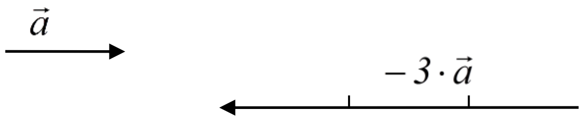



Рисунок 3.9

*3.2.3. Одиничний вектор*

**Def. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором і позначається $\vec{e}$, причому $|\vec{e}| = 1$.**

**Def. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямком заданого вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^o$.**

*Зауваження*. Будь-який вектор дорівнює добутку його модуля і орта:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^o .$$

*Слідство.* Орт заданого вектора $\vec{a}$ визначається виразом

$$\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} .$$

## 3.3. Аксіоми лінійності

Щодо розглянутих операцій над векторами мають місце наступні вісім аксіом (зліва - запис аксіоми, праворуч - найменування):

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ | - комутативність складання. |
| 2. | $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ | - асоціативність додавання. |
| 3. | $\vec{x}+0=\vec{x}$ | - складання з нулем. |
| 4. | $\vec{x}+\vec{x}^{*}=0$ | - наявність протилежного елементу. |
| 5. | $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ | - множення на одиницю. |
| 6. | $\lambda\cdot\mu\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$ | - асоціативність множення. |
| 7. | $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$ | - дистрибутивність щодо додавання векторів. |
| 8. | $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$ | - дистрибутивність щодо множення на число. |

**Def. У математиці під лінійним простором розуміють множина елементів, для яких введені операції додавання і множення на число і виконуються вісім розглянутих аксіом, званих аксіомами лінійності.**

Альтернативна термінологія щодо властивостей:

- комутативність - перестановка;
- асоціативні - сполучні;
- дистрибутивні - розподільні.

## 3.4. Проекція вектора на вісь

Нехай в просторі задані пряма $l$ як спрямований відрізок і довільна точка $M$, що не лежить на цьому відрізку. Назвемо задану пряму $l$ віссю.

**Def. Проекцією точки $M$ на вісь $l$ називають основу $M_1$ перпендикуляра, проведеного з точки $M$ на вісь $l$** (рисунок 3.10).

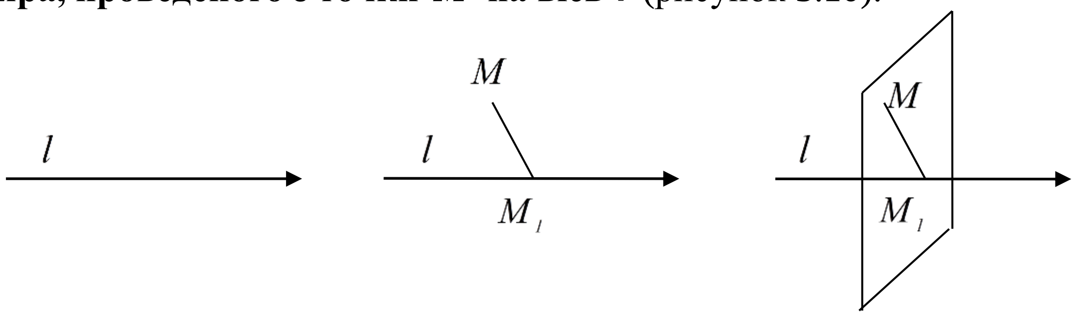



Рисунок 3.10

*Зауваження 1.* Точка $M$ є точкою перетину площини, проведеної через точку $M$ перпендикулярно до осі $l$ (Див. рисунок 3.10).

*Зауваження 2.* Якщо точка $M$ розташована на осі $l$, то її проекція $M_1$ збігається з точкою $M$.

Нехай в просторі задано довільний ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$.

**Def. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ - це довжина відрізка на осі $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, розміщеного між проекціями початку і кінця заданого вектора (рисунок 3.11). Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь $l$ однаково спрямовані, то проекція вважається додатною. Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь $l$ протилежно спрямовані, то проекція вважається від'ємною.**

Позначається $Пр_l\overrightarrow{AB}$.

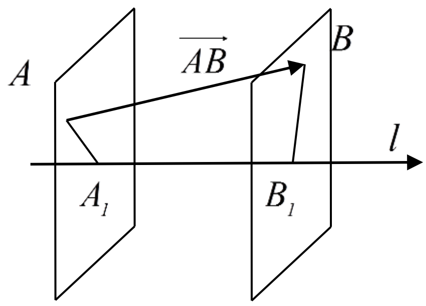



Рисунок. 3.11

### *3.4.1. Основні властивості проекцій*

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь $l$ дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ і косинуса кута $\varphi$ між вектором і віссю $l$:

$$Пр_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\,\varphi .$$

При цьому має місце:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Пр_l\vec{a} > 0; \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Пр_l\vec{a} = 0; \qquad \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \Rightarrow Пр_l\vec{a} < 0.$$

*Слідство 1.* Проекція вектора на вісь є додатною або від'ємною, якщо кут між віссю і вектором - відповідно гострий або тупий.

*Слідство 2.* Проекції рівних векторів на одну і ту ж вісь рівні між собою.

2. Проекція суми декількох векторів на одну і ту ж вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь (рисунок 3.12):

$$Пр_l\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = Пр_l\vec{a} + Пр_l\vec{b} + Пр_l\vec{c} .$$

3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ його проекція також множиться на це число:

$$Пр_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot Пр_l \vec{a}.$$

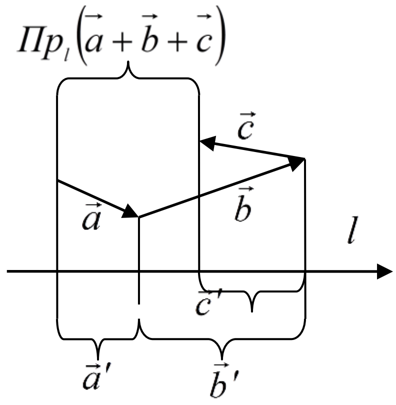



Рисунок. 3.12

**Висновок.** Лінійні операції над векторами приводять до лінійних операцій над проекціями цих векторів.

*Зауваження 1.* Якщо точка $M$ лежить на осі $l$, то її проекція $M_1$ збігається з точкою $M$.

*Зауваження 2.* Якщо $\vec{AB} = 0$, то $Пр_l \vec{AB} = 0$; якщо $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $Пр_l \vec{AB} = 0$.

### 3.5. Кут між векторами

Введемо поняття кута між вектором і віссю.

Під кутом $\varphi$ між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю $l$ будемо розуміти кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і його проекцією $\overrightarrow{A_1B_1}$ при зміщенні вектора $\overrightarrow{AB}$ так, що його початок $A$ збігається з точкою проекції $A_1$ (рисунок 3.13).

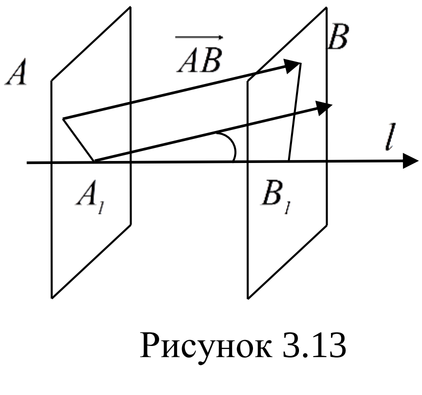



Рисунок 3.13

Такий же підхід можна використовувати і для визначення кута між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

**Def. Під кутом** $\varphi$ **між двома векторами** $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ **будемо розуміти кут між цими векторами, коли вони переміщені так, що початок вектора** $\vec{a}$ **збігається з початком вектора** $\vec{b}$ (рисунок 3.14).

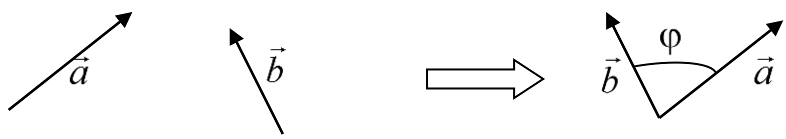



Рисунок. 3.14

## 3.6.Висновки

***Def. Скалярні величини - це величини, які характеризуються тільки числом.***

***Def. Векторні величини - це величини, які характеризуються числом і напрямом.***

***Def. Під геометричним вектором розуміють спрямований відрізок.***

*Вектор характеризується довжиною і напрямком, має початок і кінець.*

*На площині або в просторі вектор зображують як відрізок прямої зі стрілкою. Позначається вектор малою буквою напівжирним шрифтом, малою буквою зі стрілкою, двома великими буквами або двома великими буквами зі стрілкою.*

*При позначенні вектора двома літерами одна буква - це початок вектора, а друга - його кінець.*

*Залежно від постановки завдання розрізняють вектори:*

*- невільні, чи прикладені, для яких не змінюється точка докладання;*

*- ковзаючи, тобто переміщувані уздовж лінії дії;*

*- вільні, які переносяться в просторі паралельно самим собі.*

*Аналітична геометрія розглядає вільні вектори.*

***Def. Модуль геометричного вектора - це його довжина.***

*Позначається модуль вектора двома вертикальними лініями:*

$$|\boldsymbol{a}|,\ |\vec{a}|,\ \left|\overrightarrow{AB}\right|.$$

*Зауваження. Всякий відрізок* $AB$ *можна уявити вектором* $\vec{a}$, *якщо до точки* $A$ *докласти вектор* $\vec{a}$, *модуль якого дорівнює довжині відрізка* $AB$, *так, що кінець вектора збігається з точкою* $B$.

***Def. Під нульовим вектором розуміють вектор, модуль якого дорівнює нулю.***

***Def. Два вектора рівні, якщо рівні їх модулі і вони збігаються за напрямком.***

***Def.* Два вектора називаються рівно протилежними або прямо протилежними, якщо рівні їх модулі, вектори паралельні між собою і спрямовані в протилежні сторони.**

*Додавання векторів:*

***1. Правило паралелограма**. Сумою двох непаралельних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який являє собою діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виходять з однієї точки.*

***2. Правило трикутника**. Під сумою двох довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють такий третій вектор $\vec{c}$, який виходить з початку першого вектора $\vec{a}$ і є стороною трикутника, побудованого при суміщенні кінця першого вектора $\vec{a}$ з початком другого вектора $\vec{b}$.*

*Зауваження 1.* Сума декількох векторів визначається як вектор, який замикає початок першого вектора з кінцем останнього вектора в побудованому ланцюжку заданих векторів.

*Зауваження 2.* Різниця векторів $\vec{a} - \vec{b}$ визначається як сума вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

*У правилі паралелограма різницею векторів є менша діагональ паралелограма.*

***Def.* Добутком вектора $\vec{a}$ і числа $\lambda$ називають вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, такий, що:**

**1) модуль вектора $\lambda \cdot \vec{a}$ дорівнює добутку модулів числа $\lambda$ і вектора $\vec{a}$:**

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|;$$

**2) вектори $\vec{a}$ і $\lambda \cdot \vec{a}$ збігаються за напрямком, якщо $\lambda > 0$, і протилежно спрямовані, якщо $\lambda < 0$.**

***Def.* Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається одиничним вектором і позначається $\vec{e}$, причому $|\vec{e}| = 1$.**

***Def.* Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямком заданого вектора $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^o$.**

*Зауваження. Любий вектор дорівнює добутку його модуля і орта:*

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^o.$$

*Слідство. Орт заданого вектора $\vec{a}$ визначається виразом* $\vec{a}^o = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

*Аксіоми додавання векторів і множення на число:*

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ *- комутативність складання.*

2. $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$ - *асоціативність додавання.*

3. $\vec{x}+0=\vec{x}$ - *складання з нулем.*

4. $\vec{x}+\vec{x}^{*}=0$ - *наявність протилежного елемента.*

5. $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ - *множення на одиницю.*

6. $\lambda\cdot\mu\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$ - *асоціативність множення.*

7. $(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$ - *дистрибутивність відносно додавання векторів.*

8. $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$ - *дистрибутивність відносно множення на число.*

*Зауваження. Безліч елементів, для яких введені операції додавання і множення на число і виконуються розглянуті аксіоми, називають лінійним простором. Отже, геометричний вектор є елементом лінійного простору.*

***Def. Проекцією точки*** $M$ ***на вісь*** $l$ ***називають основу*** $M_1$ ***перпендикуляра, проведеного з точки*** $M$ ***на вісь*** $l$***.***

*Зауваження 1. Точка* $M$ *є точкою перетину площини, проведеної через точку* $M$ *перпендикулярно до осі* $l$.

*Зауваження 2. якщо точка* $M$ *розташована на осі* $l$*, то її проекція* $M_1$ *збігається з точкою* $M$.

***Def. Проекція вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на вісь*** $l$ ***- це довжина відрізка на осі*** $\left|\overline{A_1B_1}\right|$***, розміщеного між проекціями початку і кінця заданого вектора. Якщо вектор*** $\overrightarrow{AB}$ ***і вісь*** $l$ ***однаково спрямовані, то проекція вважається додатньою. Якщо вектор*** $\overrightarrow{AB}$ ***і вісь*** $l$ ***протилежно спрямовані, то проекція вважається відємною.***

*Позначається* $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}$.

*Зауваження. якщо* $\overrightarrow{AB}=0$*, то* $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}=0$*; якщо* $\overrightarrow{AB}\perp l$*, то* $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}=0$.

*Під кутом* $\varphi$ *між вектором* $\overrightarrow{AB}$ *і віссю* $l$ *будемо розуміти кут між вектором* $\overrightarrow{AB}$ *і його проекцією* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *при зміщенні вектора* $\overrightarrow{AB}$ *так, що його початок* $A$ *збігається з точкою проекції* $A_1$.

***Def. Під кутом*** $\varphi$ ***між двома векторами*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***будемо розуміти кут між цими векторами, коли вони переміщені так, що початок вектора*** $\vec{a}$ ***збігається з початком вектора*** $\vec{b}$***.***

*Основні властивості проекцій:*

*1. Проекція вектора* $\vec{a}$ *на вісь* $l$ *дорівнює добутку модуля вектора* $\vec{a}$ *і косинуса кута* $\varphi$ *між вектором і віссю* $l$: $\text{Пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$.

*Слідство 1. Проекція вектора на вісь є позитивною або негативною, якщо кут між віссю і вектором - відповідно гострий або тупий.*

*Слідство 2. Проекції рівних векторів на одну і ту ж вісь рівні між собою.*

*2. Проекція суми декількох векторів на одну і ту ж вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь:*

$$Пр_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=Пр_l\vec{a}+Пр_l\vec{b}+Пр_l\vec{c}.$$

*3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ його проекція також множиться на це число:*

$$Пр_l\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)=\lambda\cdot Пр_l\vec{a}.$$

***Висновок.*** *Лінійні операції над векторами приводять до лінійних операцій над проекціями цих векторів.*

### 3.7. Питання для перевірки

**1. Скалярна величина - це величина, яка характеризується:**

а) числом; б) напрямком; в) числом і напрямом.

**2. Векторна величина - це величина, яка характеризується:**

а) числом і напрямом; б) напрямком; в) числом.

**3. Під геометричним вектором розуміють:**

а) відрізок; б) пряму зі стрілкою; в) спрямований відрізок.

**4. Вектор характеризується:**

а) довжиною; б) довжиною і напрямком; в) довжиною, напрямком, початком, кінцем.

**5. Вектор зображують у вигляді:**

а) прямої; б) відрізка прямої зі стрілкою; в) стрілкою.

**6. Неправильне позначення вектора - це:**

а) $\vec{a}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) АВ.

**7. Вільний вектор - це вектор:**

а) точка прикладання якого не змінюється; б) який переноситься в просторі паралельно самому собі; в) який переміщується уздовж лінії дії.

**8. Модуль геометричного вектора - це:**

а) його напрямок; б) його початок і кінець; в) його довжина.

**9. Модуль вектора $\vec{a}$ позначається:**

а) $|\vec{a}|$; б) $\mathrm{mod}(\vec{a})$; в) $a$.

**10. Чи можна будь-який відрізок уявити через вектор:**

а) не можна; б) можна; в) тільки в окремих випадках?

**11.Під нульовим вектором розуміють вектор:**

а) який не має напрямку; б) який не визначений; в) модуль якого дорівнює нулю.

**12. Під нульовим вектором розуміють вектор:**

а) який не має напрямку; б) початок і кінець якого збігаються; в) який не визначений.

**13. Два вектора називаються рівно протилежними, якщо вектори рівні по модулю:**

а)…і паралельні, і спрямовані в протилежні сторони; б) і паралельні; в) вектори рівні по модулю і спрямовані в протилежні сторони.

**14. Два вектора називаються прямо протилежними, якщо:**

а) вектори рівні по модулю, паралельні і спрямовані в протилежні сторони; б) … і паралельні; в) … і спрямовані в протилежні сторони.

**15. Для складання геометричних векторів існує правило…:**

а) … паралелограма; б) … прямокутника; в) … трапеції.

**16. Для складання геометричних векторів існує правило…:**

а) … прямокутника; б) … трапеції; в) … трикутника.

**17. Сума двох векторів $\vec{a}+\vec{b}$ - це:**

а) вектор меншої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$; б) вектор більшої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$; в) діагональ трапеції, побудованої на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

**18. Різниця векторів $\vec{a}-\vec{b}$ визначається як сума…:**

а) … векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; б) … вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{b}$; в) … вектора $\vec{b}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{a}$.

**19. Різницею двох векторів $\vec{a}-\vec{b}$ є вектор…:**

а) … більшої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$; б) … меншої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$; в) … більшої діагоналі трапеції, побудованої на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

**20. Добутком вектора $\vec{a}$ і скаляра $\lambda$ називають:**

а) такий вектор $\lambda\cdot\vec{a}$, що його модуль дорівнює добутку модулів числа $\lambda$ і вектора $\vec{a}$ і напрямок векторів $\vec{a}$ і $\lambda\cdot\vec{a}$ збігаються при $\lambda>0$ і протилежні при $\lambda<0$ щодо вектора $\vec{a}$; б) такий вектор $\vec{z}$, що його модуль дорівнює числу $\lambda$; в) такий вектор $\lambda\cdot\vec{a}$, що його модуль дорівнює модулю вектора $\vec{a}$ і напрямки збігаються при $\lambda>0$ і протилежні при $\lambda<0$ щодо вектора $\vec{a}$.

**21. Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називається:**

а) елементарним вектором; б) базисним вектором; в) одиничним вектором.

**22. Одиничний вектор позначається:**

а) $\vec{1}$; б) $\vec{e}$; в) $\vec{a}^0$.

**23. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямком заданого вектора, називається:**

а) ортом заданого вектора; б) одиничним вектором; в) базисним вектором.

**24. Орт вектора $\vec{a}$ позначається:**

а) $\vec{a}^0$; б) $\vec{e}$; в) $\vec{e}^0$.

**25. Будь-який вектор дорівнює:**

а) добутку модуля вектора на одиничний вектор; б) добутку модуля вектора на його орт; в) добутку модуля вектора на базисний вектор.

**26. Орт заданого вектора дорівнює частці від ділення заданого вектора:**

а) … на його одиничний вектор; б) … на модуль базисного вектора; в) … на його модуль.

**27. Під лінійним простором в математиці розуміють множина елементів будь-якої природи, щодо яких задані:**

а) правило додавання елементів і правило множення елемента на число, і ці правила підкоряються аксіом лінійності; б) правило додавання елементів і правило множення елемента на число; в) правила додавання і множення елементів, і при цьому мають місце аксіоми лінійності.

**28. Геометричний вектор є елементом:**

а) лінійного простору; б) геометричного простору; в) тривимірного простору.

**29. Проекцією точки М на вісь $l$ називають:**

а) точку перетину прямої і перпендикуляра, опущеного з точки М на вісь $l$; б) основа перпендикуляра, опущеного з точки М на вісь $l$; в) перетин площини, що проходить через точку М, з віссю $l$.

**30. Проекцією точки М на вісь $l$ є:**

а) точка перетину прямої і перпендикуляра, опущеного з точки М на вісь $l$; б) перетин площини, що проходить через точку М, з віссю $l$; в) точка перетину осі $l$ з площиною, що проходить через точку М перпендикулярно до осі $l$.

**31. Якщо точка М лежить на осі $l$, То її проекція:**

а) збігається з точкою М; б) дорівнює нулю; в) відсутня.

**32. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ - це:**

а) довжина відрізка $\overline{A_1B_1}$ зі знаком «плюс», якщо відрізок $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь $l$ однаково спрямовані, і зі знаком «мінус», якщо відрізок $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь $l$ протилежно спрямовані; б) модуль вектора $\overline{A_1B_1}$ між проекціями точок А і В на вісь $l$; в) довжина $\overline{A_1B_1}$ зі знаком «плюс», якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь $l$ однаково спрямовані, і зі знаком «мінус», якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь $l$ протилежно спрямовані.

**33. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ позначається:**

а) $Пр\overrightarrow{AB}_l$; б) $Пр_l\overrightarrow{AB}$; в) $Пр_{\overrightarrow{AB}}l$.

**34. Якщо $\overrightarrow{AB} = 0$, то проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$:**

а) дорівнює 0; б) відсутня; в) дорівнює 1.

**35. Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярний осі $l$, то його проекція вісь $l$:**

а) дорівнює 1; б) дорівнює 0; в) відсутня.

**36. Проекція вектора на вісь додатна, якщо кут між віссю і вектором:**

а) тупий; б) гострий; в) дорівнює 900.

**37. Проекція вектора на вісь від'ємна, якщо кут між віссю і вектором:**

а) тупий; б) гострий; в) дорівнює 90 градусів.

**38. Проекції рівних векторів на одну і ту ж вісь:**

а) не рівні між собою; б) рівні між собою; в) протилежні за напрямком.

**39. Проекція суми декількох векторів на одну і ту ж вісь:**

а) не дорівнює сумі їх проекцій; б) дорівнює сумі їх проекцій; в) дорівнює нулю.

**40. При множенні вектора на число, не рівне нулю, його проекція:**

а) множиться на це число; б) не змінюється; в) дорівнює нулю.

## 3.8.Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити модуль вектора $\vec{a} = (\ 6;\ 3;\ -2)$.

2. Дано дві координати вектора: $X = 4,\ Y = -12$. Визначити його третю координату $Z$ за умови, що $|\vec{a}| = 13$.

3. Дано точки $A(\ 3;\ -1;\ 2)$ і $B(-1;\ 2;\ 1)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

4. За даними векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати такі вектори:
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

5. Дано: $|\vec{a}| = 13,\ |\vec{b}| = 19$ і $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.

6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^0$, причому $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 8$. визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

7. Дано два вектори $\vec{a} = (\ 3;\ -2;\ 6), \vec{b} = (-2;\ 1;\ 0)$. Визначити проекції на координатні осі наступних векторів: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\dfrac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

8. У паралелограмі $ABCD$ позначені: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Визначити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, де $M$ - точка перетину діагоналей паралелограма.

9. У просторі задані трикутники $ABC$ і $A'B'C'$; $M$ і $M'$ - точки перетину їх медіан. Визначити вектор $\overrightarrow{MM'}$ через вектори $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

### *3.9.2. Практика для самостійної роботи*

1. За заданим векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати кожен з наступних векторів:
1) $3\vec{a}$; 2) $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\dfrac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

2. Дано: $|\vec{a}| = 11,\ |\vec{b}| = 23$ і $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^0$, причому $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Задано модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ і кути накпрямків $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Обчислити проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

5. $AB,\ BE,\ CF$ - медіани трикутника $ABC$. Довести рівність $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

6. $ABCDEF$ - правильний шестикутник, причому $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$. висловити через $\vec{p}$ і $\vec{q}$ вектори $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

*Лінійна комбінація векторів. Координати вектора. Алгебра векторів через координатне уявлення. Розкладання вектора по базису. Розкладання вектора в декартовій системі координат. Радіус-вектор. Модуль вектора. Напрямні косинуси. Координати точки і координати вектора*

# 4. ЛІНІЙНА КОМБІНАЦІЯ ВЕКТОРІВ

Нехай задано три вектора $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ і три числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

**Def. Лінійною комбінацією трьох векторів називають запис виду**

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{a_3}.$$

Це можна записати і як

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot \overrightarrow{a_i}.$$

Точно так само можна побудувати і лінійну комбінацію:

- одного вектора:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1};$$

- двох векторів:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2};$$

- $n$ векторів:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}.$$

**Def. система $n$ ненульових векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ називається лінійно незалежною, якщо її лінійна комбінація дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли всі числові коефіцієнти $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дорівнюють нулю:**

$$\overrightarrow{a_i} \neq 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{a_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0.$$

ПРИКЛАД: 1. На прямій $l$ лінійно незалежної комбінацією може бути тільки один вектор -

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} = 0 \text{ при } \alpha_1 = 0,$$

так як два вектора вже будуть лінійно залежні (рисунок 4.1):

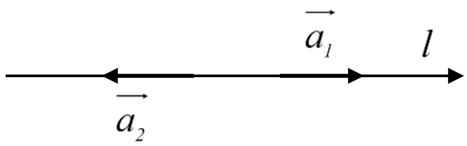



Рисунок. 4.1

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2}$$

при $\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}$.

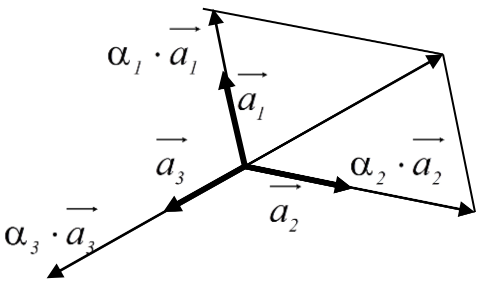



Рисунок. 4.2

В цьому випадку

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} = -\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \left|\overrightarrow{a_1}\right| \cdot \overrightarrow{e_1} = -\alpha_2 \cdot \left|\overrightarrow{a_2}\right| \cdot \overrightarrow{e_2} \text{ і}$$

якщо $\alpha_1 \cdot \left|\overrightarrow{a_1}\right| = -\alpha_2 \cdot \left|\overrightarrow{a_2}\right|$, то

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} = 0 \text{ при } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0.$$

2. На площині лінійно незалежною комбінацією може бути комбінація з двох

непаралельних векторів:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} = 0 \text{ при } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0.$$

Комбінація з трьох векторів буде вже лінійно залежною (рисунок 4.2):

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{a_3} = 0$$

при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$.

**Def. Два вектора називаються колінеарними, якщо вони паралельні одній прямій (або лежать на одній прямій).**

Колінеарні вектори, як видно з наведених прикладів, є залежними, тому можна записати

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}.$$

Цей запис є умовою коллинеарности (або паралельності) двох векторів. Запис випливає з умови:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{a_2}.$$

**Def. Три непаралельних вектора називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельні одній площині.**

Три компланарних вектора, як видно з наведених прикладів, є залежними, тому можна записати

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}.$$

Цей запис є умовою компланарности трьох векторів. Запис випливає з умови лінійної залежності трьох векторів на площині:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{a_3} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{a_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{a_3}.$$

## 4.1. Координати вектора

Ми вже ввели поняття лінійного простору (як множина векторів, для яких введені операції додавання і множення на число і виконуються вісім аксіом лінійності).

**Def. Під розмірністю лінійного простору розуміють максимальну кількість векторів комбінації лінійно незалежних векторів цього простору.**

Введемо позначення:

- для прямої: $L^1$ - одномірний простір;
- для площині: $L^2$ - двомірний простір;
- для простору: $L^3$ - тривимірний простір.

**Def. сукупність $n$ лінійно незалежних векторів $n$ мірного простору називається базисом цього простору, а самі вектори - базисними векторами, або векторами базису.**

Позначається базис записом:

- для $L^1$: $\mathrm{B} = (\vec{e}_1)$;
- для $L^2$: $\mathrm{B} = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$, $\mathrm{B} = (\vec{e}_i)_{1=1,2}$;

- для $L^3$: $\mathrm{B}=(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, $\mathrm{B}=(\vec{e}_i)_{1=1,...,3}$.

Лінійний простір визначається заданим базисом. При цьому базис задається неоднозначно.

*Твердження.* Кожен вектор $n$ - мірного простору можна представити єдиним чином - лінійною комбінацією векторів базису.

Нехай задано простір $L^3$ з базисом $\mathrm{B}=(\vec{e}_i)_{1=1,...,3}$, тобто $\mathrm{B}=(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, Тоді будь-який вектор $\vec{a}$ можна записати як

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{e_1}+a_2\cdot\vec{e_2}+a_3\cdot\vec{e_3},$$

де $a_1, a_2, a_3$ - числа.

Про таку записи кажуть, що вектор $\vec{a}$ розкладений по базису $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, і записують так: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

**Def. Числові коефіцієнти $(a_1, a_2, a_3)$ розкладання вектора $\vec{a}$ по заданому базису $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ називають координатами вектора $\vec{a}$ в заданому базисі.**

ПРИКЛАД. Заданий базис $\mathrm{B}=(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$. Якщо записати

$$\vec{a}=-2\cdot\vec{e_1}+3\cdot\vec{e_2}-\vec{e_3},$$

то в базисі $\mathrm{B}$ координатне уявлення вектора $\vec{a}$ буде таким: $\vec{a}\ (-2,\ 3,\ -1)$.

## 4.2. Алгебра векторів через координатне уявлення

1. В заданому лінійному просторі $L^3$ з базисом $\mathrm{B}$ під нульовим вектором будемо розуміти вектор, всі координати якого дорівнюють нулю:

$$\vec{0}(0,\ 0,\ 0).$$

2. Два вектора рівні, якщо рівні їх відповідні координати.

ПРИКЛАД. Якщо задані вектори $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)$ рівні, то має місце запис

$$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow a_1=b_1\wedge a_2=b_2\wedge a_3=b_3.$$

3. Під сумою двох векторів в заданому просторі $L^3$ будемо розуміти третій вектор, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат заданих векторів:

Якщо маємо $\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)$, то $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

4. Добуток вектора $\vec{a}$ на число $\lambda$ - це такий вектор $\lambda\vec{a}$, координати якого є добутком координат вектора $\vec{a}$ і числа $\lambda$:

якщо $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, то $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

### 4.2.1. *Розкладання вектора по базису*

*Задача розкладання* - це задача про представлення заданого вектора у вигляді суми декількох векторів. Вектори, які в сумі становлять собою заданий вектор, називаються складовими заданого вектора.

Задача у загальному вигляді має безліч рішень. Але якщо задати деякі елементи складових векторів, то задача стає визначеною.

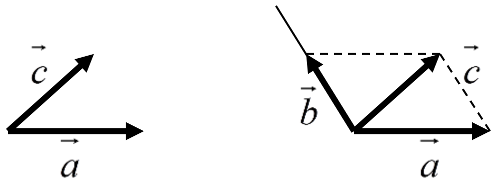



Рисунок. 4.3

ПРИКЛАД. Розкласти заданий вектор $\vec{c}$ на два складових вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$, Якщо один вектор $(\vec{a})$ заданий (рисунок 4.3).

оскільки $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.

ПРИКЛАД. розкласти вектор $\vec{c}$, якщо задані орт векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Розкладання вектора $\vec{c}$ (рисунок 4.4) буде мати вигляд

$$\vec{c} = |\vec{a}| \cdot \vec{e_a} + |\vec{b}| \cdot \vec{e_b}.$$

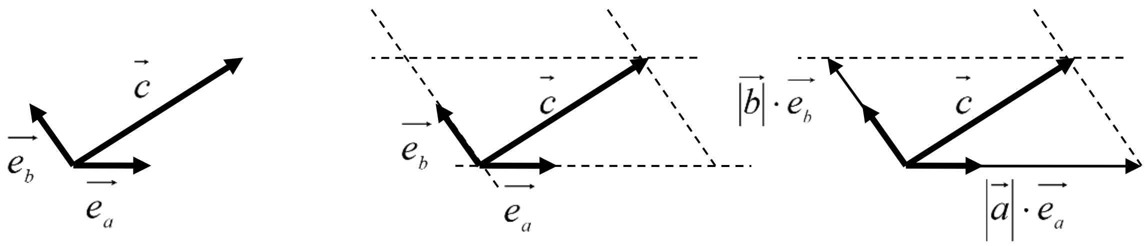



Рисунок. 4.4

**Def. Розкладання вектора по базису - це представлення заданого вектора у вигляді лінійної комбінації векторів базису.**

Для розкладання вектора $\vec{a}$ в базисі $\mathrm{B} = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ необхідно знайти такі числа $a_1, a_2, a_3$, щоб можна було записати $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}$.

*Твердження.* Кожен вектор заданого лінійного простору можна представити єдиним чином - лінійною комбінацією векторів базису.

ПРИКЛАД 1. Нехай в просторі $L^3$ заданий вектор $\vec{x}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Показати, що вектори $\vec{e_1}(1,1,1)$, $\vec{e_2}(0,1,1)$ і $\vec{e_3}(0,0,1)$ є базисом простору $L^3$, і розкласти вектор $\vec{x}$ по цьому базису.

*Рішення*

А. Покажемо, що $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис. Для цього розглянемо рівність нулю комбінації виду

$$\lambda_1 \cdot \vec{e_1} + \lambda_2 \cdot \vec{e_2} + \lambda_3 \cdot \vec{e_3} = 0,$$

тоді

$$\lambda_1\cdot(1,1,1)+\lambda_2\cdot(0,1,1)+\lambda_3\cdot(0,0,1)=0 \Leftrightarrow (\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0).$$

З рівності векторів маємо

$$\begin{cases}\lambda_1 & & & = & 0,\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & = & 0,\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0.\end{cases}$$

Визначник системи

$$d=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

По теоремі Крамера система є сумісною та визначеною. Її єдине рішення - нульове рішення: $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=0$, тобто $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ - базис.

Б. Запишемо розкладання вектора $\vec{x}\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ по базису $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$. Це розкладання має вигляд

$$\vec{x}=x_1\cdot\overrightarrow{e_1}+x_2\cdot\overrightarrow{e_2}+x_3\cdot\overrightarrow{e_3}.$$

Підставивши координати вектора $\vec{x}$ і базисних векторів, можна записати

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=x_1\cdot(1,1,1)+x_2\cdot(0,1,1)+x_3\cdot(0,0,1)=$$
$$=(x_1,x_1,x_1)+(0,x_2,x_2)+(0,0,x_3)=(x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3).$$

З рівності векторів слід

$$\begin{cases}x_1 & & & = & \alpha_1,\\ x_1 & + & x_2 & & = & \alpha_2,\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \alpha_3.\end{cases}$$

Рішення системи має такий вигляд:

$$x_1=\alpha_1;$$
$$x_2=\alpha_2-x_1=\alpha_2-\alpha_1;$$
$$x_3=\alpha_3-x_1-x_2=\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_1=\alpha_3-\alpha_2.$$

Отже, розкладання вектора по заданому базису має вигляд

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=x_1\cdot\overrightarrow{e_1}+x_2\cdot\overrightarrow{e_2}+x_3\cdot\overrightarrow{e_3}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{e_1}+(\alpha_2-\alpha_1)\cdot\overrightarrow{e_2}+(\alpha_3-\alpha_2)\cdot\overrightarrow{e_3}.$$

ПРИКЛАД 2. У просторі $L^3$ розкласти вектор $\vec{x}\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ по базису $\overrightarrow{e_1}(1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2}(0,1,0)$, $\overrightarrow{e_3}(0,0,1)$.

*Рішення*

Розкладання має вигляд

$$\vec{x}=x_1\cdot\overrightarrow{e_1}+x_2\cdot\overrightarrow{e_2}+x_3\cdot\overrightarrow{e_3}.$$

Підставивши координати вектора $\vec{x}$ і базисних векторів, можна записати

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=x_1\cdot(1,0,0)+x_2\cdot(0,1,0)+x_3\cdot(0,0,1)=$$
$$=(x_1,0,0)+(0,x_2,0)+(0,0,x_3)=(x_1,x_2,x_3).$$

З рівності векторів випливає

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_3. \end{cases}$$

Отже, розкладання вектора по заданому базису має вигляд

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \alpha_3 \cdot \vec{e_3}.$$

*Висновок*. У лінійному просторі, де вектор заданий як сукупність чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, ці числа можна тлумачити як координати вектора в базисі з одиничними векторами $\vec{e_1}(\ 1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e_2}(\ 0, 1,\ 0)$, $\vec{e_3}(\ 0,\ 0,\ 1)$.

### *4.2.2. Розкладання вектора в декартовій системі координат*

Декартова система координат являє собою наступну конструкцію (рисунок 4.5):

- точка O - центр системи координат;
- три взаємно перпендикулярні осі $OX$, $OY$, $OZ$ - координатні осі;
- три площини проекцій:

$$\pi_1 \perp OZ;\ \pi_2 \perp OY;\ \pi_3 \perp OX;$$

- $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$) - орти векторів координатних осей.

Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ і перенесемо його початок у точку O. Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рисунок 4.6).

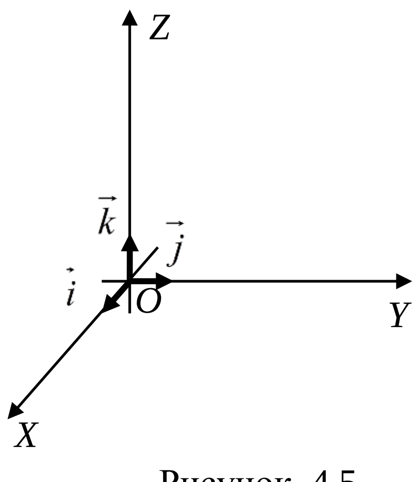



Рисунок. 4.5

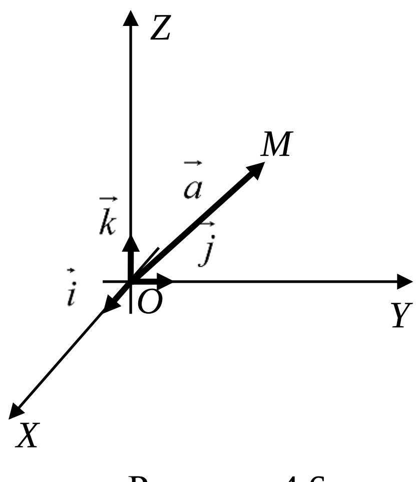



Рисунок. 4.6

Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через точку M площини, перпендикулярні координатним осях. Точки перетину цих площин з координатними осями і будуть являти собою проекції точки M на осі. Це можна записати в наступному вигляді (рисунок 4.7):

$$M \in \sigma_1 \wedge \sigma_1 \perp OX \wedge M_1 = \sigma_1 \cap OX \ ;$$
$$M \in \sigma_2 \wedge \sigma_2 \perp OY \wedge M_2 = \sigma_2 \cap OY \ ;$$
$$M \in \sigma_3 \wedge \sigma_3 \perp OZ \wedge M_3 = \sigma_3 \cap OZ \ .$$

Як результат отримаємо

$$Пр_{OX}\,\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|,\ Пр_{OY}\,\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|,\ Пр_{OZ}\,\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|.$$

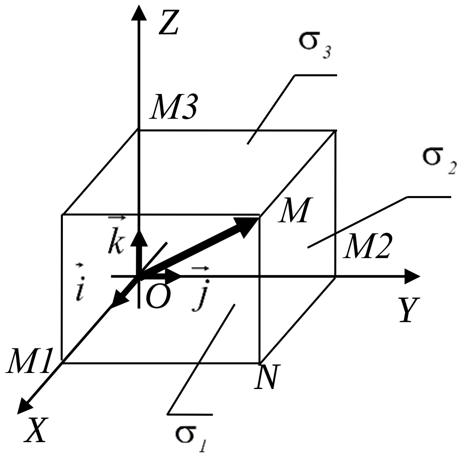



Рисунок. 4.7

Запишемо суму векторів:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}\ .$$

Оскільки $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$, маємо

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}\ .$$

Далі запишемо

$$\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i},\ \overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j},\ \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}.$$

Ввівши позначення $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$, одержимо

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\ .$$

Ця залежність називається розкладанням вектора $\vec{a}$ по ортам координатних осей. Орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називаються базисом декартової системи координат $B = \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

Числа $a_x, a_y, a_z$ - це координати вектора $\vec{a}$ в заданому базисі $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.

*Зауваження.* Координати вектора є проекціями вектора на осі координат:

$$a_x = Пр_{OX}\,\vec{a}\,,\ \ a_y = Пр_{OY}\,\vec{a}\,,\ \ \vec{a}_z = Пр_{OZ}\,\vec{a}\,.$$

### *4.2.3. Радіус-вектор. Модуль вектора. Направляючі косинуси*

**Def. Радіус-вектор точки М - це вектор, початок якого розміщено на початку системи координат в точці О, а кінець в точці М.**

Радіус-вектор в точці М можна позначити $\overrightarrow{OM}$ або $\overrightarrow{r_M}$.

У даному випадку радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ буде являти собою довжину діагоналі паралелепіпеда. На підставі теореми про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда можна записати (див. рисунок 4.7):

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2,$$

або $\left|\vec{a}\right|^2 = \left|a_x\right|^2 + \left|a_y\right|^2 + \left|a_z\right|^2$, звідки $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|a_x\right|^2 + \left|a_y\right|^2 + \left|a_z\right|^2}$.

**Def. Модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його проекцій на осі координат.**

Введемо позначення кутів: $\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right) = \alpha$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right) = \beta$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right) = \gamma$. Запишемо проекції вектора на осі координат: $a_x = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\,\alpha$, $a_y = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\,\beta$, $a_z = \left|\vec{a}\right| \cdot cos\,\gamma$. Тоді можна записати $\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot cos^2\alpha + \left|\vec{a}\right|^2 \cdot cos^2\beta + \left|\vec{a}\right|^2 \cdot cos^2\gamma$, або $1 = cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma$.

**Def. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються направляючими косинусами вектора $\vec{a}$.**

*Висновок.* Сума квадратів направляючих косинусів вектора дорівнює одиниці.

Запишемо орт вектора $\vec{a}$:

$$\overrightarrow{a^o} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{i} + \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{j} + \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{k} = cos\,\alpha \cdot \vec{i} + cos\,\beta \cdot \vec{j} + cos\,\gamma \cdot \vec{k}.$$

*Висновок.* Координатами одиничного вектора $\overrightarrow{a^o}$ є числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\overrightarrow{a^o} = \left(cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\right).$$

*Висновок.* Знаючи координати радіуса-вектора, завжди можна визначити його модуль і напрямок.

### *4.2.4. Координати точки і координати вектора*

**Def. Під координатами точки у просторі розуміють координати радіуса-вектора цієї точки.**

Координати точки $M$ можна позначити як $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$. Отже, координати точки співпадають з координатами радіуса-вектора цієї точки.

ПРИКЛАД. Радіус-вектор записаний як $\overrightarrow{OM}\left(\,1,\,2,\,3\right)$. Точка, для якої побудований цей радіус-вектор, записується як $M\left(\,1,\,2,\,3\right)$.

*Зауваження.* Лінійний простір, у якому введено поняття точки, називається аффінним простором.

Раніше було введено поняття радіуса-вектора. Розглянемо, як записати координати вектора, заданого двома точками (рисунок 4.8)

Нехай заданий вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$. Побудуємо радіуси-вектори цих точок $\vec{r}_A(x_A, y_A, z_A)$ і $\vec{r}_B(x_B, y_B, z_B)$. для вектора $\overline{AB}$ можна записати

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B, y_B, z_B) - (x_A, y_A, z_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

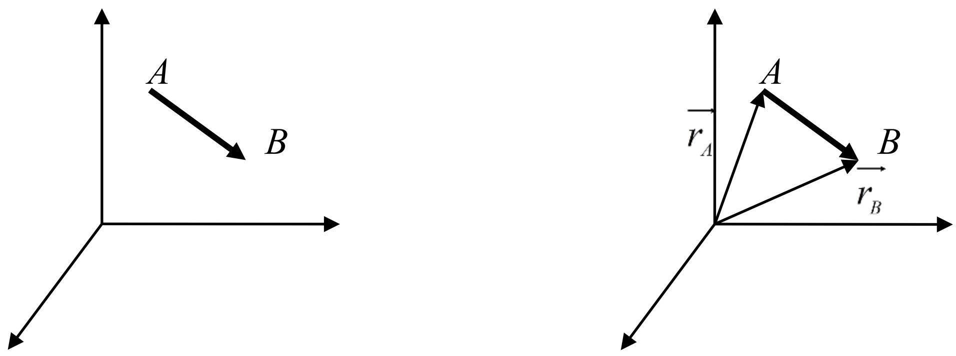



Рисунок. 4.8

*Висновок.* Координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку.

## 4.3. Висновки

***Def. Лінійною комбінацією трьох векторів називають вираз виду***

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{a_3}, \textbf{\textit{ або }} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \cdot \overrightarrow{a_i}.$$

***Def. Система*** $n$ ***ненульових векторів*** $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ ***називається лінійно незалежною, якщо її лінійна комбінація дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли всі числові коефіцієнти*** $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ***дорівнюють нулю:***

$$\overrightarrow{a_i} \neq 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{a_i} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0.$$

***Def. Два вектора називають колінеарними, якщо вони паралельні одній прямій (або лежать на одній прямій).***

*Умова коллинеарности має вигляд*

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}.$$

***Def. Три непаралельних вектора називаються компланарними, якщо вони лежать на одній площині або паралельні одній площині.***

*Умова компланарности має вигляд*

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{c}.$$

***Def. Під розмірністю лінійного простору розуміють максимальну кількість векторів комбінації лінійно незалежних векторів цього простору.***

*Позначають* $n$ *мірний простір як* $L^n$.

***Def. Сукупність*** $n$ ***лінійно незалежних векторів*** $n$ ***мірного простору називається базисом цього простору, а самі вектори - базисними векторами, або векторами базису.***

*Для простору* $L^3$ *базис позначається* $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, *або* $B = (\vec{e}_i)_{1=1,...,3}$.

*Лінійний простір визначається заданим базисом. При цьому базис задається неоднозначно.*

*Твердження. Кожен вектор* $n$ *мірного простору можна представити єдиним чином - лінійною комбінацією векторів базису.*

*Для простору* $L^3$ *з базисом* $B = (\vec{e}_i)_{1=1,...,3}$, *Т. Е.* $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, *вектор* $\vec{a}$ *можна записати як*

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3}.$$

*Про такий запис кажуть, що вектор* $\vec{a}$ *розкладений по базису* $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ *, і записують* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

***Def. Числові коефіцієнти*** $(a_1, a_2, a_3)$ ***розкладання вектора*** $\vec{a}$ ***по заданому базису*** $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ***називають координатами вектора*** $\vec{a}$ ***в заданому базисі.***

*Алгебра векторів:*

*1. В заданому лінійному просторі* $L^3$ *з базисом* $B$ *під нульовим вектором будемо розуміти вектор, всі координати якого дорівнюють нулю:* $\vec{0}(\ 0,\ 0,\ 0)$.

*2. Два вектора рівні, якщо рівні їх відповідні координати.*

*3. Під сумою двох векторів в заданому просторі* $L^3$ *будемо розуміти третій вектор, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат заданих векторів.*

*4. Добуток вектора* $\vec{a}$ *на число* $\lambda$ *- це такий вектор* $\lambda \cdot \vec{a}$, *координати якого є добутком координат вектора* $\vec{a}$ *і числа* $\lambda$.

***Def. Розкладання вектора по базису - це представлення заданого вектора у вигляді лінійної комбінації векторів базису.***

*Вектори, які в сумі становлять собою заданий вектор, називаються складовими заданого вектора.*

*Твердження. Кожен вектор заданого лінійного простору можна представити тільки єдиним чином - лінійною комбінацією векторів базису.*

*Висновок. У лінійному просторі, де вектор заданий як сукупність чисел* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, *ці числа можна тлумачити як координати вектора у базисі з одиничними векторами:* $\overrightarrow{e_1}(\ 1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}(\ 0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_3}(\ 0,\ 0,\ 1)$.

*Декартова система координат являє собою наступну конструкцію:*

- *точка O - центр системи координат;*
- *три взаємно перпендикулярні осі* $OX$ , $OY$ , $OZ$ *- координатні осі;*
- *три площини проекцій:*

$$\pi_1 \perp OZ\,;\ \pi_2 \perp OY\,;\ \pi_3 \perp OX\,;$$

- $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ($|\vec{i}|=1$ , $|\vec{j}|=1$, $|\vec{k}|=1$) *- орти координатних осей.*

*Залежність виду* $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ *називається розкладанням вектора* $\vec{a}$ *по ортам координатних осей. Числа* $a_x, a_y, a_z$ *- координати вектора* $\vec{a}$ *в заданому базисі* $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

***Def. Радіус-вектор точки М - це вектор, початок якого розташовано на початку системи координат в точці О, а кінець в точці М.***

*Радіус-вектор у точці М можна позначити* $\overrightarrow{OM}$ *або* $\overrightarrow{r_M}$ .

***Def. Модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його проекцій на осі координат:*** $|\vec{a}|=\sqrt{|a_x|^2+|a_y|^2+|a_z|^2}$ **.**

*Введемо позначення кутів:* $(\widehat{\vec{a},\vec{i}})=\alpha$ , $(\widehat{\vec{a},\vec{j}})=\beta$ , $(\widehat{\vec{a},\vec{k}})=\gamma$ .

***Def. Числа*** $\cos\alpha$**,** $\cos\beta$**,** $\cos\gamma$ ***називаються направляючими косинусами вектора*** $\vec{a}$ **.**

*Висновок. Сума квадратів направляючих косинусів вектора дорівнює одиниці:*

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\,.$$

*Висновок. Координатами одиничного вектора* $\overrightarrow{a^o}$ *є числа* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ : $\overrightarrow{a^o}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

*Висновок. Знаючи координати радіуса-вектора, завжди можна визначити його модуль і напрямок.*

***Def. Під координатами точки в просторі розуміють координати радіуса-вектора цієї точки.***

*Висновок. Координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку:* $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$.

## 4.4. Питання для перевірки

**1. Лінійна комбінація векторів - це:**

а) $a_1\ a_2\ ...a_n\ \mathbf{x_1 x_2 ... x_n}$, де $a_i$ – число, $\mathbf{x_i}$ – вектор; б) $a_1\mathbf{x_1} + a_2\mathbf{x_2} ... + a_n\mathbf{x_n}$, де $a_i$ – число, $\mathbf{x_i}$ – вектор; в) $a_1+\mathbf{x_1} + a_2+\mathbf{x_2}+...+a_n+\mathbf{x_n}$, де $a_i$ – число, $\mathbf{x_i}$ – вектор.

**2. Система векторів лінійного простору називається лінійно незалежною, якщо рівність нулю лінійної комбінації векторів $x_i$ можливо:**

а) тільки при рівності нулю всіх коефіцієнтів $a_i$ лінійної комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$; б) тільки при коефіцієнтах $a_i$ лінійної комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$, що не рівних нулю; в) коли хоча б один коефіцієнт аі лінійної комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$ не дорівнює нулю.

**3. Система векторів лінійного простору називається лінійно залежною, якщо рівність нулю лінійної комбінації векторів хі можливо:**

а) тільки при рівності нулю всіх коефіцієнтів $a_i$ комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$,; б) коли хоча б один вектор $\mathbf{x_i}$ комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$, не дорівнює нулю; в) коли хоча б один коефіцієнт $a_i$ лінійної комбінації $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...+ a_n\mathbf{x_n}$, не дорівнює нулю.

**4. Розмірність лінійного простору - це максимальна кількість:**

а) векторів цього простору; б) лінійно незалежних векторів цього простору; в) лінійно залежних векторів цього простору.

**5. Вибери правильну запис аксіоми мірності.** У лінійному n-вимірному просторі існує принаймні одна сукупність:

а) $n$-$1$ лінійно незалежних векторів, таких, що будь-яка сукупність $n$ векторів цього простору є лінійно залежною системою; б) $n$ лінійно незалежних векторів, таких, що будь-яка сукупність $n + 1$ векторів цього простору є лінійно залежною системою; в) $n$ лінійно незалежних векторів, таких, що будь-яка сукупність $n$-$1$ векторів цього простору є лінійно залежною системою.

**6. Базисом *n*-мірного лінійного простору називається:**

а) сукупність $n$ головних векторів цього простору; б) сукупність $n$ лінійно залежних векторів цього простору; в) сукупність $n$ лінійно незалежних векторів цього простору.

**7. Виберіть формулювання теореми про розкладання вектора по базису.**

Кожен вектор $n$-мірного лінійного простору можна представити:

а) лінійною комбінацією векторів базису; б) єдиним чином - лінійною комбінацією векторів базису; в) єдиним чином - комбінацією векторів базису.

**8. Якщо ($e_i$) є вектори базису в *n*-вимірному лінійному просторі і вектор *x* цього простору представлено у вигляді лінійної комбінації векторів базису $a_1e_1+a_2e_2+…+ a_ne_n$, то числа $a_i$ називають:**

а) координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисі ($\mathbf{e_i}$); б) числовими коефіцієнтами вектора $\mathbf{x}$ в базисі ($\mathbf{e_i}$)); в) лінійними коефіцієнтами вектора $\mathbf{x}$ в базисі ($\mathbf{e_i}$)).

## 4.5. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити направляючі косинуси вектора $\vec{a}=(12;-15;-16)$.

2. Чи може вектор складати з координатними осями кути: а) $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=120^0$; б) $\alpha=45^0$, $\beta=135^0$, $\gamma=60^0$; в) $\alpha=90^0$, $\beta=150^0$, $\gamma=60^0$?

3. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=(2;-1;\ 3)$ і $\vec{b}=(-6;\ 3;-9)$. Встановити, який з них довший за іншого і у скільки разів, як вони направлені - в одну сторону або протилежно.

4. Знайти орт вектора $\vec{a}=(6;-2;-3)$.

5. Задані три не компланарних вектора: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Обчислити значення $\lambda$, При яких вектори $\lambda\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\lambda\vec{c}$ компланарні.

6. На площині задано два вектори: $\vec{p}=(2,-3)$, $\vec{q}=(1,\ 2)$. Знайти розкладання вектора $\vec{a}=(9,\ 4)$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

7. Задані три вектори: $\vec{p}=(3;-2;\ 1)$, $\vec{q}=(-1;\ 1;-2)$, $\vec{r}=(\ 2;\ 1;-3)$. Знайти розкладання вектора $\vec{c}=(11;-6;\ 5)$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

8. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$, який утворює з ортом $\vec{j}$ гострий кут і має довжину $|\vec{x}|=15$.

9. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ задані координатами в деякому базисі. З'ясувати, чи є вектор $\vec{d}$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a}(2,\ 0,-2)$, $\vec{b}(3,-1,\ 1)$, $\vec{c}(-2,\ 1,\ 0)$, $\vec{d}(1,\ 1,\ 1)$;

б) $\vec{a}(2,\ 2,\ 2)$, $\vec{b}(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{c}(0,-1,\ 1)$, $\vec{d}(2,-1,\ 3)$.

## 4.6. Самостійна робота

### *4.6.1. Визначення афінного простору*

Маючи визначення векторного простору, елементами якого є вектори, можна ввести ще поняття точки. Для цього можна обумовити такий простір, в якому кожній парі елементів, назва яких - точки, відповідає конкретний елемент, який є вектором.

Точки позначають великими літерами: $A,\ B,\ C,\ M$. Точки можуть мати індексацію: $A_1$, $A_2$, $A_3$. Вектори позначають, як зазвичай: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

**Def. Нехай задано векторний простір $L^n$. Тоді афінний простір $L_A^n$ - це будь-яка сукупність елементів, які називаються точками, кожній впоряд-**

**кованій парі яких $X_1$ і $X_2$ ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{x}$ простору $L^n$, який позначається $\overrightarrow{X_1X_2} = \vec{x}$. При цьому виконуються умови:**

**1) для кожної точки $X_1$ і кожного вектора $\vec{x}$ знайдеться тільки одна така точка $X_2$, що $\overrightarrow{X_1X_2} = \vec{x}$;**

**2) для будь-яких трьох точок $X_1$, $X_2$ і $X_3$ виконується умова**

$$\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} = \overrightarrow{X_1X_3}.$$

*Висновок.* Афінний простір - це безліч елементів двох видів: крапок і векторів.

Зв'язок між точками і векторами задається за допомогою операції відкладання векторів.

*Операція відкладання векторів* полягає у тому, що будь-який вектор $\vec{x}$ можна відкласти від будь-якої точки $X_1$, отримавши при цьому певну точку $X_2$, і тоді $\overrightarrow{X_1X_2} = \vec{x}$ (рисунок 4.9).

Точку $X_1$ називають початком вектора $\overrightarrow{X_1X_2}$.

Точку $X_2$ називають кінцем вектора $\overrightarrow{X_1X_2}$.

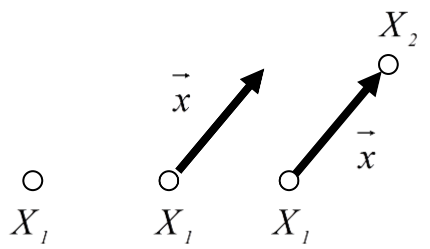



Рисунок. 4.9

Очевидні наступні властивості афінного простору:

1) для двох рівних векторів виконується (рисунок 4.10) умова

$$\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_3X_4} \Rightarrow \overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{X_2X_4};$$

2) для заданого вектора виконується рівність

$$\overrightarrow{X_1X_2} = -\overrightarrow{X_2X_1};$$

3) сума векторів $\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1}$ є нульовий вектор (рисунок 4.11).

**Def. Нульовий вектор афінного простору - це вектор, початок і кінець якого збігаються, тобто, це вектори виду $\overrightarrow{X_1X_1}$, $\overrightarrow{X_2X_2}$ і т.д.**

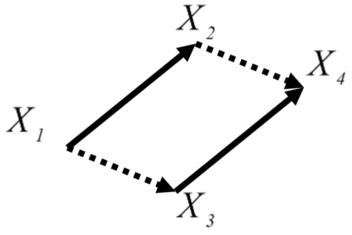



Рисунок. 4.10

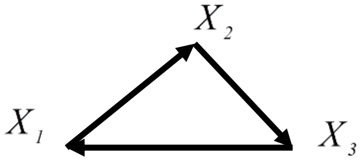



Рисунок. 4.11

### *4.6.2. Координати в афінному просторі*

Всі визначення в афінному просторі необхідно ввести так, щоб збереглися існуючі визначення в векторному просторі.

**Def. Розмірністю афінного простору** $L_A^n$ **називається розмірність відповідного векторного простору** $L^n$ **.**

**Def. Точки** $0$**,** $X_1$**,** $X_2$**, ...,** $X_n$ **простору** $L_A^n$ **називаються лінійно незалежними, якщо лінійно незалежними є вектори**

$$\overrightarrow{0X_1},\ \overrightarrow{0X_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{0X_n},$$

**тобто, якщо позначити** $\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{x_1}$**,** $\overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{x_2}$**, ...,** $\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{x_n}$**, то лінійна комбінація** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overrightarrow{x_i}$ **дорівнює нулю тільки в тому випадку, якщо всі числові коефіцієнти дорівнюють нулю:** $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots,n} = 0$**.**

**Def. Точка** $X$ **простору** $L_A^n$ **називається лінійно залежною від послідовності точок** $0$**,** $X_1$**,** $X_2$**, ...,** $X_n$**, якщо вектор** $\overrightarrow{0X} = \vec{x}$ **можна лінійно висловити через вектори** $\overrightarrow{0X_1}$**,** $\overrightarrow{0X_2}$**, ...,** $\overrightarrow{0X_n}$**.**

**Def. Базисом афінного простору** $L_A^n$ **називається будь яка послідовність** $0$**,** $X_1$**,** $X_2$**, ...,** $X_n$ **(тобто** $n+1$**) лінійно незалежних точок простору** $L_A^n$**.**

**Def. Послідовність** $0$**,** $\overrightarrow{e_1}$**,** $\overrightarrow{e_2}$**, ...,** $\overrightarrow{e_n}$**, утворена довільної точкою** $0$ **афінного простору і базисом** $(\vec{e}_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ **векторного простору** $L^n$**, називається системою координат афінного простору, а точка** $0$ **- початком, або центром, координат.**

Кожному базису $0$, $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ відповідає система координат $0$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$ і, навпаки, кожній системі координат відповідає свій базис. Тому не роблять різниці між базисом і системою координат.

### *4.6.3. Радіус-вектор і координати точки і вектора*

**Def. Вектор афінного простору з початком в центрі координат** $0$ **і кінцем в точці** $X$ **називають радіусом-вектором точки** $X$ **.**

У цьому випадку кожен радіус-вектор однозначно задається у вигляді

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n \cdot \overrightarrow{e_n}\ .$$

Числа $\{x_i\}_{i=1,2...n}$ називають координатами точки $X$ в заданій системі координат $0$, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, ..., $\vec{e_n}$, а ряд чисел $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - координатним рядком точки $X$ в заданій системі координат.

У точці $O$ всі координати дорівнюють нулю, тому що цій точці відповідає нульовий вектор.

*Висновок.* В $n$ мірному афінному просторі із заданою системою координат (точка $O$ як початок координат, базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}$) кожній точці $X$ однозначно відповідає рядок з $n$ чисел (її координат). Ці числа також будуть і координатами вектора $\vec{x}$ з початком в точці $0$ і кінцем в точці $X$.

Якщо в афінному просторі $L_A^n$ задано дві точки, то, оскільки

$$\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY},$$

маємо $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$, тобто координати вектора $\overrightarrow{XY}$ дорівнюють різниці $y_i - x_i$ координат його кінця і початку:

$$\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1)\cdot\vec{e_1} + (y_2 - x_2)\cdot\vec{e_2} + \dots + (y_n - x_n)\cdot\vec{e_n},$$

де $\{x_i\}$ - координати точки $X$; $\{y_i\}$ - координати точки $Y$; $\{y_i - x_i\}$ - координати вектора $\overrightarrow{XY}$.

### *4.6.4. Практика для самостійної роботи*

1. Обчислити направляючі косинуси вектора $\vec{a} = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

2. Чи може вектор складати з двома координатними осями кути:
а) $\alpha = 30^0$, $\beta = 45^0$; б) $\alpha = 60^0$, $\beta = 60^0$; в) $\alpha = 150^0$, $\beta = 30^0$?

3. Задані точки $A(-1,\ 5,-10)$, $B(5,-7,-8)$, $C(2,\ 2,-7)$ і $D(5,-4,\ 2)$. Перевірити, чи є вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ колінеарними; встановити, який з них довший іншого і у скільки разів, як вони направлені - в одну сторону або протилежно.

4. Знайти орт вектора $\vec{a} = (3;\ 4;-12)$.

5. Задані три не компланарних вектора: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Обчислити значення $\lambda$ і $\mu$, при яких вектори $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ колінеарні:

а) $\vec{a}(2,\ 0,-2)$, $\vec{b}(3,-1,\ 1)$, $\vec{c}(-2,\ 1,\ 0)$;

б) $\vec{a}(2,\ 2,\ 2)$, $\vec{b}(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{c}(0,-1,\ 1)$.

6. Задано три вектори: $\vec{a}(3,-1)$, $\vec{b}(1,-2)$, $\vec{c}(-1,\ 7)$. Визначити розкладання вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$.

7. Задано чотири вектори: $\vec{a}(2,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}(1,-1,\ 2)$, $\vec{c}(2,\ 2,-1)$ і $\vec{d}(3,\ 7,-7)$. Визначити розкладання кожного з цих чотирьох векторів, приймаючи в якості базису три інших.

8. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з усіма трьома базисними ортами рівні гострі кути, якщо $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

9. Перевірити, чи є точки $A(3,-1,\ 2)$, $B(1,\ 2,-1)$, $C(-1,\ 1,-3)$, $D(3,-5,\ 3)$ вершинами трапеції.

10. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ задані координатами в деякому базисі. З'ясувати, чи є вектор $\vec{d}$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a}(6,\ 0,\ 5)$, $\vec{b}(2,-1,\ 3)$, $\vec{c}(4,\ 1,\ 2)$, $\vec{d}(-2,-2,\ 1)$;

б) $\vec{a}(1,-1,\ 0)$, $\vec{b}(3,\ 3,\ 3)$, $\vec{c}(2,\ 4,\ 3)$, $\vec{d}(-1,\ 2,\ 0)$.

*Скалярний добуток векторів. Визначення скалярного добутку. Скалярний добуток векторів у декартовій системі координат. Довжина вектора і кут між векторами. Геометричний зміст скалярного добутку. Нерівність Коші - Буняковського. Ортогональний базис. Приклад ортогоналізації по Шмідту*

# 5. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

## 5.1. Визначення скалярного добутку

**Def. Під скалярним добутком двох векторів будемо розуміти таку функцію, яка двом векторам лінійного простору ставить у відповідність число так, що виконуються умови:**

**1) симетрії;**

**2) лінійності;**

**3) не від'ємності результату при множенні вектора самого на себе.**

***При цьому, якщо*** $\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0$***, то*** $\vec{x}=0$**.**

Позначається як $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ або $\vec{x}\cdot\vec{y}$.

Наведені умови можна записати в такому вигляді:

1) $\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{y},\vec{x}\right)$;

2) $\left(\lambda\cdot\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{x},\lambda\cdot\vec{y}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{x},\vec{y}\right)$; $\left(\vec{x_1}+\vec{x_2},\vec{y}\right)=\left(\vec{x_1},\vec{y}\right)+\left(\vec{x_2},\vec{y}\right)$;

3) $\left(\vec{x},\vec{x}\right)\geq 0$, якщо $\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0$, то $\vec{x}=0$.

*Зауваження.* У визначенні не обумовлюють побудову скалярного добутку.

*Зауваження.* Одним з варіантів визначення скалярного добутку векторів, якщо вектори задані довжиною $\left|\vec{x}\right|$, $\left|\vec{y}\right|$ і кутом між ними $\varphi$, є вираз

$$\left(\vec{x},\vec{y}\right)\varphi=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cdot\cos\varphi.$$

## 5.2. Скалярний добуток векторів в декартовій системі координат

Нехай в просторі $L^3$ задані два вектори: $\vec{a}\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Використовуючи лінійні властивості скалярного добутку, можна записати

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k},b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=$$
$$=a_x\cdot b_x\cdot\left(\vec{i},\vec{i}\right)+a_x\cdot b_y\cdot\left(\vec{i},\vec{j}\right)+a_x\cdot b_z\cdot\left(\vec{i},\vec{k}\right)+$$
$$+a_y\cdot b_x\cdot\left(\vec{j},\vec{i}\right)+a_y\cdot b_y\cdot\left(\vec{j},\vec{j}\right)+a_y\cdot b_z\cdot\left(\vec{j},\vec{k}\right)+$$
$$+a_z\cdot b_x\cdot\left(\vec{k},\vec{i}\right)+a_z\cdot b_y\cdot\left(\vec{k},\vec{j}\right)+a_z\cdot b_z\cdot\left(\vec{k},\vec{k}\right).$$

Розглянемо трійку векторів $\vec{i}(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{j}(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{k}(0,\ 0,\ 1)$ - одиничних векторів, розташованих під кутом $\frac{\pi}{2}$ один до одного. У цьому випадку тільки скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює одиниці, всі інші скалярні добутки цих векторів дорівнюють нулю (таблиця 5.1).

Таблиця 5.1

| $(*,*)$ | $\vec{i}(1,\ 0,\ 0)$ | $\vec{j}(0,\ 1,\ 0)$ | $\vec{k}(0,\ 0,\ 1)$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{i}(1,\ 0,\ 0)$ | 1 | 0 | 0 |
| $\vec{j}(0,\ 1,\ 0)$ | 0 | 1 | 0 |
| $\vec{k}(0,\ 0,\ 1)$ | 0 | 0 | 1 |

Отже,

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

*Висновок.* У прямокутній системі координат скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат.

ПРИКЛАД. Визначити скалярний добуток векторів $\vec{a}(1,\ 2,\ 3)$ і $\vec{b}(3,\ 4,\ 0)$:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 0) = 11.$$

### 5.3. Довжина вектора і кут між векторами

Введення поняття скалярного добутку дозволяє сформулювати поняття довжини вектора (елемента лінійного простору) і кута між векторами.

**Def. Довжиною вектора в евклідовому просторі називають число, що дорівнює кореню квадратному з скалярного добутку вектора самого на себе:**

$$\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}.$$

Позначається довжина вектора $|\vec{x}|$.

ПРИКЛАД. Визначити довжину вектора $\vec{a}(1,\ 2,\ 3)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3} = 14.$$

**Def. Кутом між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називають число, яке визначається залежністю**

$$\varphi = arccos\,\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}.$$

ПРИКЛАД. Визначити кут між векторами $\vec{a}(1,\ 2,\ 3)$ і $\vec{b}(3,\ 4,\ 0)$.

*Рішення*

$$\varphi=\arccos\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\arccos\frac{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 0}{\sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 3+4\cdot 4+0\cdot 0}}=$$

$$=\arccos\frac{11}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{25}}=\arccos\frac{11}{5\cdot\sqrt{14}}.$$

*Зауваження.* Якщо вектори задані точками, наприклад, вектор $\overrightarrow{AB}$ точками $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, а вектор $\overrightarrow{CD}$ точками $C(x_C, y_C, z_C)$ і $D(x_D, y_D, z_D)$, тоді:

1) $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$, $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C, y_D-y_C, z_D-z_C)$ - координати векторів;

2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$ - довжина вектора;

3) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=(x_B-x_A)(x_D-x_C)+(y_B-y_A)(y_D-y_C)+$
$+(z_B-z_A)(z_D-z_C)$ - скалярний добуток векторів;

4) кут між векторами $\cos\varphi=$

$$=\frac{(x_B-x_A)(x_D-x_C)+(y_B-y_A)(y_D-y_C)+(z_B-z_A)(z_D-z_C)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2+(z_D-z_C)^2}}.$$

Визначення кута між векторами дозволяє виділити з усієї сукупності векторів ортогональні вектори.

**Def. Ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:**

$$(\vec{x},\vec{y})=0 \ \textbf{при} \ \vec{x}\neq 0 \ \textbf{і} \ \vec{y}\neq 0.$$

*Зауваження.* Таке визначення вказує на те, що кут між ортогональними векторами дорівнює $\frac{\pi}{2}$, тобто можна ще говорити, що це перпендикулярні між собою вектори.

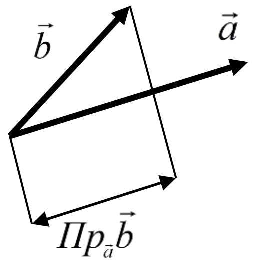
### 5.4. Геометричний зміст скалярного добутку

З визначення кута $\widehat{\vec{a},\vec{b}}$ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

звідки $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, $|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ (Проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$) (Рисунок 5.1). Отже, можна записати:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}\,.$$



Мал. 5.1

*Висновок.* Геометричний зміст скалярного добутку двох векторів - це добуток довжини першого вектора і проекції другого вектора на перший вектор.

*Зауваження*. Має місце вираз

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|Пр_{\vec{b}}\vec{a}\,.$$

## 5.5. Нерівність Коші - Буняковського

З визначення кута між векторами слід, що $cos\,\varphi=\dfrac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}$. Але так як $\left|cos\,\varphi\right|\le 1$, то необхідно, щоб виконувалася умова $\dfrac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2}{\left|\vec{x}\right|^2\cdot\left|\vec{y}\right|^2}\le 1$ або $\dfrac{\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2}{\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)}\le 1$. Запис цієї умови в вигляді $\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\le\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)$ називають нерівністю Коші - Буняковського.

***Теорема.*** **Для двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ виконується нерівність Коші - Буняковського $\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\le\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)$.**

◄ Розглянемо довільний вектор $\vec{x}-t\cdot\vec{y}$, який побудовано з двох довільних ненульових векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і довільного числа $t$. З визначення скалярного добутку слід, що

$$\left(\vec{x}-t\cdot\vec{y},\vec{x}-t\cdot\vec{y}\right)\ge 0\ \Rightarrow\ \left(\vec{x},\vec{x}\right)-2\cdot t\cdot\left(\vec{x},\vec{y}\right)+t^2\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)\ge 0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ t^2\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)-2\cdot t\cdot\left(\vec{x},\vec{y}\right)+\left(\vec{x},\vec{x}\right)\ge 0\,.$$

Оскільки це квадратичне нерівність є від’ємною, її дискримінант не додатний:

$$D=\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2-\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)\le 0\ \Rightarrow\ \left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\le\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right).\ ►$$

*Слідство.* Наслідком нерівності Коші - Буняковського є нерівність трикутника

$$\left|\vec{x}+\vec{y}\right|\le\left|\vec{x}\right|+\left|\vec{y}\right|.$$

◄ З визначення модуля вектора маємо $\left|\vec{x}+\vec{y}\right|=\sqrt{\left(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\right)}=$ $=\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)+2\left(\vec{x},\vec{y}\right)+\left(\vec{y},\vec{y}\right)}$. З умови Коші - Буняковського $\left(\vec{x},\vec{y}\right)^2\le\left(\vec{x},\vec{x}\right)\cdot\left(\vec{y},\vec{y}\right)$ випливає, що $\left(\vec{x},\vec{y}\right)\le\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}\cdot\sqrt{\left(\vec{y},\vec{y}\right)}$. Тоді можна записати

$$\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)+2\left(\vec{x},\vec{y}\right)+\left(\vec{y},\vec{y}\right)}\le\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)+2\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}\cdot\sqrt{\left(\vec{y},\vec{y}\right)}+\left(\vec{y},\vec{y}\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}+\sqrt{\left(\vec{y},\vec{y}\right)}\right)^2}=$$

$$= \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} + \sqrt{(\vec{y},\vec{y})} = |\vec{x}| + |\vec{y}|, \text{ або } |\vec{x}+\vec{y}| \le |\vec{x}| + |\vec{y}|. \blacktriangleright$$

### 5.6. Ортогональний базис

Вже було введено поняття базису у лінійному просторі, причому всі базиси в такому просторі рівносильні. В евклідовому просторі вводять поняття ортогонального і орто нормованого базисів.

**Def. Ненульові вектори** $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ **евклідового** $n$ **мірного простору утворюють базис, званий ортогональним, якщо вони попарно ортогональні:**

$$\left(\vec{e_i},\vec{e_k}\right) = \begin{cases} \lambda & при \quad i = k \\ 0 & при \quad i \ne k \end{cases}$$

**Def. Одиничні вектори** $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ **евклідового** $n$ **мірного простору утворюють базис, званий ортонормованим, якщо вони попарно ортогональні:**

$$\left(\vec{e_i},\vec{e_k}\right) = \begin{cases} 1 & при \quad i = k, \\ 0 & при \quad i \ne k. \end{cases}$$

*Властивість ортонормованого базису.* Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють скалярному добутку цього вектора на відповідні базисні вектори.

Отже, якщо $\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{e_n}$, то

$$\left(\vec{x},\vec{e_1}\right) = \alpha_1,\ \left(\vec{x},\vec{e_2}\right) = \alpha_2,\ \ldots.,\ \left(\vec{x},\vec{e_n}\right) = \alpha_n.$$

*Твердження.* У будь-якому лінійному просторі можна побудувати ортонормований базис.

Побудова ортонормованого базису в просторі називають ортогоналізації по Шмідту.

### 5.7. Приклад ортогоналізації по Шмідту

Нехай в просторі $L^3$ заданий довільний базис: $\vec{b}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}_3 = (1,\ 1,\ 1)$.

1. Нехай $\vec{e_1} = \vec{b_1} = (1,\ 0,\ 0)$. Вектор $\vec{e_2}$ задамо у вигляді $\vec{e_2} = \vec{b_2} + \alpha_1 \cdot \vec{e_1}$, причому $\alpha_1$ підберемо так, щоб $\left(\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}\right) = 0$. тоді

$$0 = \left(\vec{b_2},\ \vec{e_1}\right) + \alpha_1 \cdot \left(\vec{e_1},\ \vec{e_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\left(\vec{b_2},\ \vec{e_1}\right)}{\left(\vec{e_1},\ \vec{e_1}\right)} = -\frac{\left((1,\ 1,\ 0),(1,\ 0,\ 0)\right)}{\left((1,\ 0,\ 0),(1,\ 0,\ 0)\right)} = -\frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0} = -1.$$

Отже, $\vec{e_2} = \vec{b_2} + \alpha_1 \cdot \vec{e_1} = \vec{b_2} - \vec{e_1} = (1,\ 1,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 1,\ 0)$.

2. Вектор $\overrightarrow{e_3}$ задамо у вигляді $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{b_3} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$, причому $\beta_1$, $\beta_2$ підберемо так, щоб $\left(\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = 0$ і $(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0$ з врахуванням того, що $\left(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = 0$. Тоді

$$0 = \left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_1}\right) + \beta_1 \cdot \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1 = -\frac{\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_1}\right)}{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right)} = -\frac{((1,\ 1,\ 0), (1,\ 0,\ 0))}{((1,\ 0,\ 0), (1,\ 0,\ 0))} = -\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = -1,$$

$$0 = \left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_2}\right) + \beta_2 \cdot \left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -\frac{\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_2}\right)}{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right)} = -\frac{((1,\ 1,\ 1), (0,\ 1,\ 0))}{((0,\ 1,\ 0), (0,\ 1,\ 0))} = -\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = -1.$$

Отже,

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{b_3} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{b_3} - \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = (1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) - (0,\ 1,\ 0) = (0,\ 0,\ 1).$$

Таким чином побудовано ортогональний базис: $\overrightarrow{e_1} = (1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,\ 0,\ 1)$. Цей базис вийшов ще і нормованим. Якщо довжини базисних векторів відрізняються від одиниці, то вектори необхідно розділити на їх довжину.

### 5.8. Висновки

***Def. Під скалярним добутком двох векторів будемо розуміти таку функцію, яка двом векторам лінійного простору ставить у відповідність число так, що виконуються умови:***

***1) симетрії:*** $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{y}, \vec{x}\right)$;

***2) лінійності:*** $\left(\lambda \cdot \vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \lambda \cdot \vec{y}\right) = \lambda \cdot \left(\vec{x}, \vec{y}\right)$; $\left(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}, \vec{y}\right) = \left(\overrightarrow{x_1}, \vec{y}\right) + \left(\overrightarrow{x_2}, \vec{y}\right)$;

***3) невід'ємність результату при множенні вектора самого на себе:*** $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) \geq 0$***. При цьому, якщо*** $\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 0$***, то*** $\vec{x} = 0$.

*Позначається* $\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ *або* $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

*Зауваження. У визначенні не обумовлюється побудова скалярного добутку.*

*Зауваження. Одним з варіантів визначення скалярного добутку векторів, якщо вектори задані довжиною* $\left|\vec{x}\right|$, $\left|\vec{y}\right|$ *і кутом між ними* $\varphi$, *є вираз*

$$\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\varphi = \left|\vec{x}\right| \cdot \left|\vec{y}\right| \cdot \cos\varphi.$$

*Висновок. У прямокутній системі координат скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат:*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x \cdot b_x + a_y b_y \cdot + a_z \cdot b_z.$$

***Def. Довжиною вектора в евклідовому просторі називають число, що дорівнює кореню квадратному з скалярного добутку вектора самого на себе:***

$$\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}.$$

*Позначається* $|\vec{x}|$.

***Def. Кутом між векторами*** $\vec{x}$ ***і*** $\vec{y}$ ***називають число, яке визначається залежністю***

$$\varphi = arccos\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}.$$

*Зауваження. якщо вектор* $\overrightarrow{AB}$ *заданий точками* $A(x_A, y_A, z_A)$ *і* $B(x_B, y_B, z_B)$, *а вектор* $\overrightarrow{CD}$ *точками* $C(x_C, y_C, z_C)$ *і* $D(x_D, y_D, z_D)$, *тоді:*

*1)* $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$ - *координати векторів;*

*2)* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ - *довжина вектора;*

*3)* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) +$
$+ (z_B - z_A)(z_D - z_C)$ - *скалярний добуток векторів;*

*4) кут між векторами* $cos\varphi =$

$$= \frac{(x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C)}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}}.$$

***Def. ненульові вектори*** $\vec{x}$ ***і*** $\vec{y}$ ***називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:***

$$(\vec{x},\vec{y}) = 0 \ \textbf{\textit{при}} \ \vec{x} \neq 0 \ \textbf{\textit{і}} \ \vec{y} \neq 0.$$

*Визначення вказує на те, що кут між ортогональними векторами дорівнює* $\frac{\pi}{2}$.

*Геометричний зміст скалярного добутку двох векторів - це добуток довжини першого вектора і проекції другого вектора на перший вектор:*

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

***Теорема. Для двох векторів*** $\vec{x}$ ***і*** $\vec{y}$ ***виконується нерівність Коші – Буняковського***

$$(\vec{x},\vec{y})^2 \leq (\vec{x},\vec{x})\cdot(\vec{y},\vec{y}).$$

*Наслідком нерівності Коші-Буняковського є нерівність трикутника*

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|.$$

*В евклідовому просторі вводять поняття ортогонального і ортонормованого базисів.*

***Def. Ненульові вектори*** $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ **евклідового** $n$ ***мірного простору утворюють базис, званий ортогональним, якщо вони попарно ортогональні:***

$$\left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_k}\right) = \begin{cases} \lambda & при \quad i = k, \\ 0 & при \quad i \neq k. \end{cases}$$

***Def. Одиничні вектори*** $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ **евклідового** $n$ ***мірного простору утворюють базис, званий ортонормованим, якщо вони попарно ортогональні:***

$$\left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_k}\right) = \begin{cases} 1 & при \quad i = k, \\ 0 & при \quad i \neq k. \end{cases}$$

*Властивість ортонормованого базису. Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють скалярному добутку цього вектора на відповідні базисні вектори:*

$$\left(\vec{x}, \overrightarrow{e_1}\right) = \alpha_1, \ \left(\vec{x}, \overrightarrow{e_2}\right) = \alpha_2, \ \ldots, \ \left(\vec{x}, \overrightarrow{e_n}\right) = \alpha_n.$$

*Затвердження. У будь-якому лінійному просторі можна побудувати ортонормований базис.*

*Побудова ортонормованого базису в просторі називають ортогоналізації по Шмідту. У загальному вигляді ортогоналізації можна уявити таким чином.*

*Нехай в просторі* $L^3$ *заданий довільний базис:* $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$.

*1. Нехай* $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{b_1}$. *вектор* $\overrightarrow{e_2}$ *задамо у вигляді* $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{b_2} + \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1}$, *причому* $\alpha_1$ *підберемо так, щоб* $\left(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = 0$. *тоді*

$$0 = \left(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{e_1}\right) + \alpha_1 \cdot \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right) \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\left(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{e_1}\right)}{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right)}.$$

*Отже,* $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{b_2} + \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1}$.

*2. Вектор* $\overrightarrow{e_3}$ *задамо у вигляді* $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{b_3} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2}$, *причому* $\beta_1$, $\beta_2$ *підберемо так, щоб* $\left(\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = 0$ *і* $\left(\vec{e}_3, \vec{e}_2\right) = 0$ *з врахуванням того, що* $\left(\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_1}\right) = 0$. *тоді*

$$0 = \left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_1}\right) + \beta_1 \cdot \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right) \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_1}\right)}{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\right)},$$

$$0 = \left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_2}\right) + \beta_2 \cdot \left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right) \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\left(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{e_2}\right)}{\left(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\right)}.$$

*Отже,*

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{b_3} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2}.$$

*Таким чином, побудовано ортогональний базис:* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. *Якщо довжини базисних векторів відрізняються від одиниці, то вектори необхідно розділити на їх довжини, щоб отримати нормовані вектори.*

## 5.9. Питання для перевірки

**1. Вважають, що в векторному просторі задано скалярний добуток, якщо кожній парі векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ставиться у відповідність число, що позначається як $(\vec{x},\vec{y})$, Так, що виконуються умови:**

а) $(\vec{x},\vec{y}) = -(\vec{y},\vec{x})$; $(\lambda\cdot\vec{x},\vec{y}) = \lambda\cdot(\vec{x},\vec{y})$; $(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{z},\vec{y})$; $(\vec{x},\vec{x})\geq 0$; б) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$; $(\lambda\cdot\vec{x},\vec{y}) = \lambda\cdot(\vec{x},\vec{y})$; $(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{z},\vec{y})$; $(\vec{x},\vec{x})\geq 0$; в) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x})$; $(\lambda\cdot\vec{x},\vec{y}) = \lambda\cdot(\vec{x},\vec{y})$; $(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})+(\vec{z},\vec{y})$; $(\vec{x},\vec{x}) = 0$.

**2. Довжину вектора визначають як:**

а) $\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}$; б) $(\vec{x},\vec{x})$; в) $|(\vec{x},\vec{x})|$.

**3. Кут між векторами визначають як:**

а) $\arccos\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}}$; б) $\arcsin\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}}$; в) $\dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}\sqrt{(\vec{y},\vec{y})}}$.

**4. Вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$ називаються ортогональними, якщо:**

а) $(\vec{x},\vec{y}) > 0$; б) $(\vec{x},\vec{y}) < 0$; в) $(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

**5. Нерівність Коші - Буняковського має вигляд:**

а) $(\vec{x},\vec{y})^2 > (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$; б) $(\vec{x},\vec{y})^2 \geq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$; в) $(\vec{x},\vec{y})^2 \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$.

**6. Нерівність трикутника має вигляд:**

а) $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}|+|\vec{y}|$; б) $|\vec{x}+\vec{y}| > |\vec{x}|+|\vec{y}|$; в) $|\vec{x}+\vec{y}| < |\vec{x}|+|\vec{y}|$.

**7. Базис є ортонормованим, якщо виконується умова:**

а) $(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j; \end{cases}$ б) $(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & i\neq j, \\ 0, & i=j; \end{cases}$ в) $(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \begin{cases} \lambda, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

**8. Координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють:**

а) векторному добутку цього вектора і відповідних базисних векторів; б) скалярному добутку цього вектора і відповідних базисних векторів; в) змішаного добутку цього вектора і відповідних базисних векторів.

**9. У будь-якому *n*-вимірному евклідовому просторі:**

а) прямокутний базис відсутній; б) існує ортогональний базис; в) ортогональний базис при певних умовах може бути побудований.

**10. Ортогональною системою координат називають:**

а) послідовність $O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n$, утворену будь-якою точкою $O$ афінного простору і базисом $(\vec{e}_i)$; б) послідовність $O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n$, утворену будь-якою точкою $O$ афінного простору і нормованим базисом $(\vec{e}_i)$; в) послідовність $O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n$, утворену будь-якою точкою $O$ афінного простору і ортонормованим базисом $(\vec{e}_i)$.

**11. Декартовою системою координат називають ортогональну систему координат:**

а) в афінному просторі; б) в тривимірному векторному просторі; в) в тривимірному афінному просторі.

**12. Позначення базисних векторів в декартовій системі координат:**

а) $\vec{j}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{i}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{k}=(0,\ 0,\ 1)$; б) $\vec{i}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{j}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{k}=(0,\ 0,\ 1)$; в) $\vec{k}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{j}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{i}=(0,\ 0,\ 1)$.

**13. Довжина вектора в декартовій системі координат визначається виразом:**

а) $\left|a_x+a_y+a_z\right|$; б) $\sqrt{a_x+a_y+a_z}$; в) $a_x+a_y+a_z$.

**14. Запис скалярного добутку в декартовій системі координат:**

а) $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin(\vec{x},\vec{y})$; б) $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$; в) $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\vec{x},\vec{y})$.

**15. Запис скалярного добутку в декартовій системі координат:**

а) $\sqrt{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$; б) $\left|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right|$; в) $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

**16. Геометричний зміст скалярного добутку - це:**

а) добуток довжини першого вектора і проекції іншого вектора на перший; б) площа паралелограма, побудованого на цих векторах; в) координата.

## 5.10. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Визначити, чи є вектори наступних систем попарно ортогональними, і доповнити їх до ортогональних базисів:

а) $(1,-2,\ 2,-3)$, $(2,-3,\ 2,\ 4)$; б) $(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3,-3)$.

2. Користуючись нерівністю Коші - Буняковського, довести наступні нерівності трикутника: $|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$ і $\big||\vec{x}|-|\vec{y}|\big|\le|\vec{x}+\vec{y}|$.

## 5.11. Самостійна робота

### *5.11.1. Існування ортогонального базису*

***Теорема.*** **В будь-якому $n$ вимірному евклідовому просторі існує ортогональний базис.**

◄ Нехай в просторі $L^n$ існує довільний базис $(\vec{b}_i)_{i=1,2,\dots,n}$. Покажемо, як можна побудувати в цьому базисі ортогональний базис.

приймаємо $\vec{e}_1=\vec{b}_1$. вектор $\vec{e}_2$ задамо у вигляді $\vec{e}_2=\vec{b}_2+\alpha_1\cdot\vec{e}_1$, причому $\alpha_1$ підберемо так, щоб $(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)=0$. тоді

$$(\vec{e}_2,\vec{e}_1)=(\vec{b}_2,\vec{e}_1)+\alpha_1\cdot(\vec{e}_1,\vec{e}_1)\ \Rightarrow\ 0=(\vec{b}_2,\vec{e}_1)+\alpha_1\cdot(\vec{e}_1,\vec{e}_1)\ \Rightarrow\ \alpha_1=-\frac{(\vec{b}_2,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}.$$

Звідси маємо

$$\vec{e}_1 = \vec{b}_1; \quad \vec{e}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\left(\vec{b}_2, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)} \cdot \vec{e}_1 .$$

За аналогією для $k$-го вектора $\vec{e}_k$ можна записати

$$\vec{e}_k = \vec{b}_k + \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_{k-1} \cdot \vec{e}_{k-1},$$

причому $\{\lambda_i\}$ підберемо так, щоб $\left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_1\right) = 0$, $\left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_2\right) = 0$, ..., $\left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_{k-1}\right) = 0$, Маючи на увазі, що

$$\left(\vec{e}_k, \vec{e}_m\right) = \begin{cases} \neq 0 & при \quad k = m, \\ = 0 & при \quad k \neq m. \end{cases}$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&0 = \left(\vec{b}_k, \vec{e}_1\right) + \lambda_1 \cdot \left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right), \\
&0 = \left(\vec{b}_k, \vec{e}_2\right) + \lambda_2 \cdot \left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right), \\
&\ldots \ldots \\
&0 = \left(\vec{b}_k, \vec{e}_{k-1}\right) + \lambda_{k-1} \cdot \left(\vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k-1}\right).
\end{aligned}$$

отже, $\lambda_1 = -\dfrac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)}$, $\lambda_2 = -\dfrac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_2\right)}{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right)}$, ..., $\lambda_{k-1} = -\dfrac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_{k-1}\right)}{\left(\vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k-1}\right)}$.

маємо

$$\vec{e}_k = \vec{b}_k - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)} \cdot \vec{e}_1 - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_2\right)}{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right)} \cdot \vec{e}_2 - \ldots - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_{k-1}\right)}{\left(\vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k-1}\right)} \cdot \vec{e}_{k-1}.$$

Побудовані вектори

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{b}_1; \\
&\vec{e}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\left(\vec{b}_2, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)} \cdot \vec{e}_1; \\
&\ldots \\
&\vec{e}_k = \vec{b}_k - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)} \cdot \vec{e}_1 - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_2\right)}{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right)} \cdot \vec{e}_2 - \ldots - \frac{\left(\vec{b}_k, \vec{e}_{k-1}\right)}{\left(\vec{e}_{k-1}, \vec{e}_{k-1}\right)} \cdot \vec{e}_{k-1}; \\
&\ldots \\
&\vec{e}_n = \vec{b}_n - \frac{\left(\vec{b}_n, \vec{e}_1\right)}{\left(\vec{e}_1, \vec{e}_1\right)} \cdot \vec{e}_1 - \frac{\left(\vec{b}_n, \vec{e}_2\right)}{\left(\vec{e}_2, \vec{e}_2\right)} \cdot \vec{e}_2 - \ldots - \frac{\left(\vec{b}_n, \vec{e}_{n-1}\right)}{\left(\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_{n-1}\right)} \cdot \vec{e}_{n-1}
\end{aligned}$$

нерівні нулю, так як кожен з цих векторів може бути лінійно представлений через базисні вектори $\left(\vec{b}_i\right)$:

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 = \vec{b}_1; \\
&\vec{e}_2 = \vec{b}_2 + \alpha_1 \cdot \vec{b}_1;
\end{aligned}$$

$$\dots$$

$$\overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{b_k} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \ldots + \beta_{k-1} \cdot \vec{b}_{k-1};$$

$$\dots$$

$$\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{b_n} + \mu_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \mu_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \ldots + \mu_{n-1} \cdot \vec{b}_{n-1}.$$

Лінійна комбінація записаних векторів дорівнює нулю тільки в тому випадку, якщо всі числові коефіцієнти дорівнюють нулю. Крім того, всі побудовані вектори взаємно ортогональні. Отже, побудовано ортогональний базис. ►

*Зауваження.* Наведений доказ існування ортогонального базису є алгоритмом побудови ортогонального базису. Цей алгоритм називається ортогоналізації по Шмідту.

**Def. послідовність** $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ **, утворена будь-якою точкою** $O$ **афінного простору і ортонормованим базисом** $(\vec{e}_i)$ **векторного простору** $L^n$**, називається ортогональною системою координат афінного простору, або прямокутної системою координат точково-векторного простору, а точка** $O$ **- початком системи координат.**

*5.11.2. Практика для самостійної роботи*

1. Визначити, чи є вектори наступних систем попарно ортогональними, і доповнити їх до ортогональних базисів:

а) $\vec{e}_1 = (1, -2, 1, 3)$, $\vec{e}_2 = (2, 1, -3, 1)$; б) $\vec{e}_1 = (1, 1, -3, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 2, 3, -3)$;

в) $\vec{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

*Види лінійних просторів. Ділення відрізка в заданому відношенні. Векторний добуток векторів. Визначення векторного добутку. Обчислення векторного добутку. Геометричний зміст векторного добутку. Властивості векторного добутку. Змішаний добуток трьох векторів. Знаходження змішаного добутку у декартовій системі координат. Геометричний зміст змішаного добутку. Подвійний векторний добуток*

# 6. ВИДИ ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРІВ

**Def. Лінійний простір - це множина елементів, для яких введені операції додавання і множення на число і виконуються вісім аксіом лінійності.**

**Def. Лінійний простір, у якому введено поняття скалярного добутку, називається евклідовим простором.**

**Def. Лінійний простір, у якому введено поняття точки, називається аффінним простором.**

Позначається Афінний простір $L_n^A$.

**Def. Під точкою будемо розуміти елементи множини, пара яких ставиться у відповідність вектору за двома правилами:**

**1) для кожної точки $X_1$ і кожного вектора $\vec{x}$ знайдеться тільки одна така точка $X_2$, що $\overrightarrow{X_1X_2} = \vec{x}$;**

**2) для будь-яких трьох точок $X_1$, $X_2$ і $X_3$ виконується умова**

$$\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} = \overrightarrow{X_1X_3}.$$

Очевидні наступні властивості афінного простору:

1) для двох рівних векторів (рисунок 6.1) виконуються рівності

$$\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_3X_4} \Rightarrow \overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{X_2X_4};$$

2) для заданого вектора виконується рівність

$$\overrightarrow{X_1X_2} = -\overrightarrow{X_2X_1}.$$

3) сума векторів $\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1}$ (рисунок 6.2) є нульовий вектор.

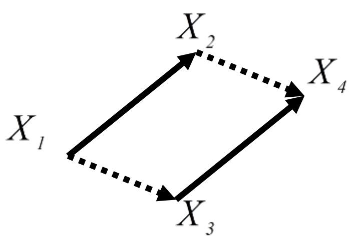



Рисунок 6.1

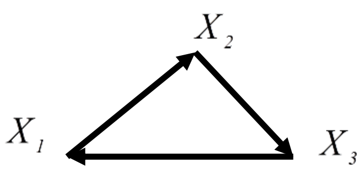



Рисунок 6.2

**Def. Нульовий вектор афінного простору - це вектор, початок і кінець якого збігаються, тобто це вектори виду $\overrightarrow{X_1X_1}$, $\overrightarrow{X_2X_2}$ і т.д.**

*Зауваження.* Афінний простір називають ще точково-векторним простором.

### 6.1. Ділення відрізка у заданому відношенні

Нехай в декартовій системі координат $Oxyz$ задані точки $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$. Їм відповідають радіуси-вектори $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A)$ і $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B, z_B)$.

**Def. Множина точок $C$, для яких радіус-вектор має вигляд**

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OA}$$

**(де $\lambda \ge 0$ і $\mu \ge 0$), називають відрізком $\overline{AB}$ (записують з рискою над буквами), який з'єднує точки $A$ і $B$ (рисунок 6.3).**

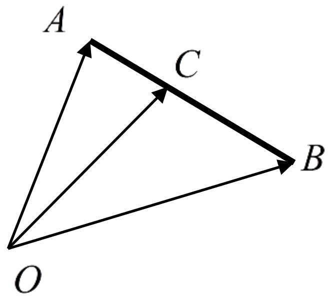


Рисунок. 6.3

Особливості визначення:

1) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1$;

2) якщо $\lambda = 0$, то $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$; якщо $\mu = 0$, то $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

Розглянемо ділення відрізка у заданому відношенні.

Для заданого відрізка

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OB} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OA}$$

можна записати $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$. Тоді

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OC} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{CB} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{CB} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Введемо позначення: $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = n$, $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = m$. Маємо $n\cdot\overrightarrow{CB} = m\cdot\overrightarrow{AC}$.

Запишемо цю рівність через координати векторів:

$$n\cdot\left((x_B - x_C)\cdot\vec{i} + (y_B - y_C)\cdot\vec{j} + (z_B - z_C)\cdot\vec{k}\right) =$$

$$= m\cdot\left((x_C - x_A)\cdot\vec{i} + (y_C - y_A)\cdot\vec{j} + (z_C - z_A)\cdot\vec{k}\right).$$

З рівності векторів запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} n\cdot(x_B - x_C) = m\cdot(x_C - x_A), \\ n\cdot(y_B - y_C) = m\cdot(y_C - y_A), \\ n\cdot(z_B - z_C) = m\cdot(z_C - z_A), \end{cases}$$

звідки

$$x_C = \frac{m\cdot x_A + n\cdot x_B}{m+n},\ y_C = \frac{m\cdot y_A + n\cdot y_B}{m+n},\ z_C = \frac{m\cdot z_A + n\cdot z_B}{m+n}.$$

Це формули ділення відрізка у заданому співвідношенні $m:n$. Залежно від розташування точки $C$ при $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = n$, $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = m$ можливі певні співвідношення:

1) якщо точка $C$ співпадає з точкою $A$, то $\lambda = 0$, $n = 0$, $m = 1 \Rightarrow \frac{n}{m} = 0$;

2) якщо точка $C$ співпадає з точкою $B$, то $\mu = 0$, $n = 1$, $m = 0 \Rightarrow \frac{n}{m} = \infty$;

3) якщо точка $C$ лежить за відрізком з боку точки $A$, то $-1 < \frac{n}{m} < 0$;

4) якщо точка $C$ лежить за відрізком з боку точки $B$, то $-\infty < \frac{n}{m} < -1$.

Аналогічну задачу можна розглянути і для простору $L^2$.

## 6.2. Векторний добуток векторів

### *6.2.1. Визначення векторного добутку*

**Def. Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в тривимірній декартовій системі координат - це вектор $\vec{c}$ (рисунок 6.4), який:**

**1) ортогональний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;**

**2) за абсолютною величиною дорівнює**

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right);$$

**3) має напрямок, отриманий за правилом правого гвинта при обертанні вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ (правило буравчика).**

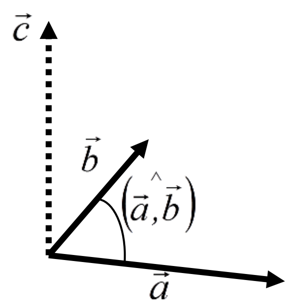



Рисунок. 6.4

Позначається векторний добуток $[\vec{a},\vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$.

### *6.2.2. Обчислення векторного добутку*

Нехай задані два не колінеарних вектори $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Запишемо вектор $\vec{c}$ у вигляді $\vec{c}(x, y, z)$.

За визначенням векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ вектор $\vec{c}$ ортогонален кожному з цих векторів, отже,

$$(\vec{a}, \vec{c}) = a_x \cdot x + a_y \cdot y + a_z \cdot z = 0,$$
$$(\vec{b}, \vec{c}) = b_x \cdot x + b_y \cdot y + b_z \cdot z = 0.$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_x \cdot x + a_y \cdot y = -a_z \cdot z, \\ b_x \cdot x + b_y \cdot y = -b_z \cdot z. \end{cases}$$

Рішення цієї системи можна записати у вигляді

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_z & a_y \\ -b_z & b_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}} z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_x & -a_z \\ b_x & -b_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}} z,$$

де $z$ може приймати будь-яке значення. Виберемо

$$z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Тоді координати вектора $\vec{c}$ мають вигляд

$$x = \begin{vmatrix} -a_z & a_y \\ -b_z & b_y \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_x & -a_z \\ b_x & -b_z \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

отже,

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} -a_z & a_y \\ -b_z & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} a_x & -a_z \\ b_x & -b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Цей запис можна уявити як розкладання визначника по першому рядку, який складається з векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Це і є запис для обчислення векторного добутку заданих векторів в декартовій системі координат.

### *6.2.3. Геометричний зміст векторного добутку*

З визначення векторного добутку можна записати

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right).$$

Цей запис можна уявити як площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рисунок 6.5).

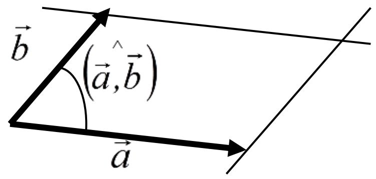



Рисунок. 6.5

*Висновок.* Геометричний зміст векторного добутку заданих векторів - це по абсолютній величині площа паралелограма, побудованого на заданих векторах.

### *6.2.4. Властивості векторного добутку*

Властивості векторного добутку виходять з його визначення:

1. При перестановці векторів у добутку знак добутку змінюється на протилежний:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Це пов'язано зі зміною напрямку вектора  векторного добутку за правилом правого гвинта. З іншого боку, при перестановці векторів у визначнику відбувається перестановка рядків, через що знак визначника змінюється а його абсолютна величина залишається незмінною.

2. Лінійність векторного добутку:

$$\left[\lambda \cdot \vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda \cdot \vec{b}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a},\vec{b}\right];$$

$$\left[\vec{a} + \vec{d},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{b}\right] + \left[\vec{d},\vec{b}\right], \quad \left[\vec{a},\vec{d} + \vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{d}\right] + \left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

*Зауваження.* Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, коли ці вектори паралельні, тобто $\sin\left(\vec{a},\hat{\vec{b}}\right) = 0$. Отже, умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

## 6.3. Змішане добуток трьох векторів

### *6.3.1. Визначення та властивості змішаного добутку*

Нехай задано три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ в декартовій системі координат.

**Def. Змішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і вектора $\vec{c}$.**

Змішаний добуток позначається так:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

За визначенням його можна записати і таким образом:

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right), \quad \left(\vec{a} \times \vec{b},\vec{c}\right), \quad \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Властивості змішаного добутку:

1. При круговій перестановці всіх трьох векторів знак добутку не змінюється. При перестановці двох векторів знак добутку змінюється:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right).$$

2. При зміні послідовності дій щодо векторів добуток не змінюється:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$$

3. Сумарний вектор в змішаному добутку можна уявити як суму змішаних добутків:

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right),$$
$$\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)+\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right), \ldots.$$

### *6.3.2. Знаходження змішаного добутку в декартовій системі координат*

Розпишемо змішаний добуток:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\vec{c}\right)=a_x\cdot\left[\vec{b}\vec{c}\right]_x+a_y\cdot\left[\vec{b}\vec{c}\right]_y+a_z\cdot\left[\vec{b}\vec{c}\right]_z.$$

Розглянувши векторний добуток

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix},$$

маємо

$$\left[\vec{b},\vec{c}\right]_x=\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix},\ \left[\vec{b},\vec{c}\right]_y=-\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix},\ \left[\vec{b},\vec{c}\right]_z=\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\left(\vec{a},\vec{b}\vec{c}\right)=a_x\cdot\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\cdot\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\cdot\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

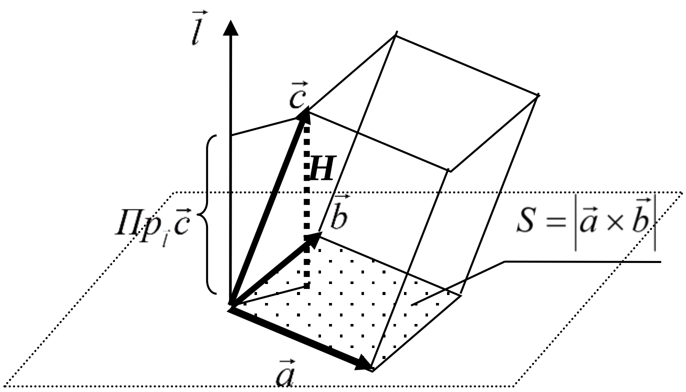
### *6.3.3. Геометричний зміст змішаного добутку*

Якщо уявити, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є ребрами паралелепіпеда (рисунок 6.6), то модуль векторного добутку $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ дорівнює площі його основи $S$. З іншого боку, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ це вектор $\vec{l}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та

$\vec{b}$. Отже, це вектор, значення довжини якого дорівнює значенню площі основи паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Тоді змішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ можна уявити як скалярний добуток векторів $\vec{c}$ і $\vec{l}$. Геометричний сенс цього змішаного добутку - це добуток проекції вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{l}$ і довжини вектора $\vec{l}$: $(\vec{l},\vec{c}) = Пр_{\vec{l}}\vec{c} \cdot |\vec{l}|$. Оскільки проекція вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{l}$ - це висота паралелепіпеда $H$, то $(\vec{l},\vec{c}) = Пр_{\vec{l}}\vec{c} \cdot |\vec{l}| = H$. Отже, по абсолютній величині змішаний добуток - це добуток площі основи паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, і його висоти.

*Висновок.* Геометричний зміст змішаного добутку трьох заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ полягає у тому, що по абсолютній величині змішаний добуток цих трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

*Зауваження 1.* Трійка векторів, змішаний добуток яких додатній, називається правою трійкою. Трійка векторів, змішаний добуток яких відємний,




Мал. 6.6

називається лівою трійкою.

*Зауваження 2.* Змішане добуток трьох ненульових векторів, коли серед них немає двох паралельних між собою векторів, дорівнює нулю тільки тоді, коли три вектора лежать в одній площині. Отже, умовою компланарности трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку.

### 6.4. Подвійний векторний добуток

**Def. Подвійним векторних добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають вектор, компланарний векторам $\vec{b}$ та $\vec{c}$, який дорівнює векторному добутку вектора $\vec{a}$ і векторного добутку векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$:**

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]].$$

Властивості подвійного векторного добутку:

а) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ - значення подвійного векторного добутку (кажуть «бац мінус цаб»);

б) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\cdot\mu-\vec{c}\cdot\lambda$, де $\mu=(\vec{a},\vec{c})$, $\lambda=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, - компланарность подвійного векторного добутку.

## 6.5. Висновки

***Def.* Лінійний простір, у якому введено поняття скалярного добутку, називається евклідовим простором.**

***Def.* Лінійний простір, у якому введено поняття точки, називається афінним простором. Афінний простір називають ще точково-векторним простором.**

***Def.* Під точкою будемо розуміти елементи множини, пара яких ставиться у відповідність вектору за двома правилами:**

***1) для кожної точки*** $X_1$ ***і кожного вектора*** $\vec{x}$ ***знайдеться тільки одна така точка*** $X_2$***, що*** $\overrightarrow{X_1X_2}=\vec{x}$***;***

***2) для будь-яких трьох точок*** $X_1$***,*** $X_2$ ***і*** $X_3$ ***виконується умова***

$$\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_2X_3}=\overrightarrow{X_1X_3}\,.$$

*Афінний простір має властивості:*

*1) для двох рівних векторів виконуються рівності*

$$\overrightarrow{X_1X_2}=\overrightarrow{X_3X_4}\Rightarrow\overrightarrow{X_1X_3}=\overrightarrow{X_2X_4}\,;$$

*2) для заданого вектора виконується рівність*

$$\overrightarrow{X_1X_2}=-\overrightarrow{X_2X_1}\,;$$

*3) сума векторів* $\overrightarrow{X_1X_2}+\overrightarrow{X_2X_3}+\overrightarrow{X_3X_1}$ *є нульовий вектор.*

***Def.* Нульовий вектор афінного простору - це вектор, початок і кінець якого збігаються, тобто це вектори виду** $\overrightarrow{X_1X_1}$, $\overrightarrow{X_2X_2}$ ***і т.д.***

***Def.* Множина точок** $C$**, Для яких радіус-вектор має вигляд**

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\overrightarrow{OA}$$

***(де*** $\lambda$ ***і*** $\mu\geq 0$***), називають відрізком*** $\overline{AB}$ ***(записують з рискою над буквами), який з'єднує точки*** $A$ ***і*** $B$***.***

*Особливості визначення відрізка:*

*1)* $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}=1$*;*

*2) якщо* $\lambda=0$*, то* $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$*; якщо* $\mu=0$*, то* $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$.

*Якщо ввести позначення* $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=n$, $\frac{\mu}{\lambda+\mu}=m$, *то формули ділення відрізка в заданому співвідношенні* $m:n$ *приймають вид*

$$x_C=\frac{m\cdot x_A+n\cdot x_B}{m+n},\ y_C=\frac{m\cdot y_A+n\cdot y_B}{m+n},\ z_C=\frac{m\cdot z_A+n\cdot z_B}{m+n}.$$

***Def. Векторний добуток двох векторів*** $\vec{a}$ ***та*** $\vec{b}$ ***в тримірній декартовій системі координат - це вектор*** $\vec{c}$ ***, який:***

***1) ортогональний до векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***;***

***2) за абсолютною величиною дорівнює*** $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$***;***

***3) має напрямок, одержаний за правилом правого гвинта при обертанні вектора від*** $\vec{a}$ ***до*** $\vec{b}$ ***(Правило буравчика).***

*Запис для визначення векторного добутку в декартовій системі координат:*

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

*Геометричний зміст векторного добутку заданих векторів - це по абсолютній величині площа паралелограма, побудованого на заданих векторах.*

*Властивості векторного добутку:*

*1. При перестановці векторів в добутку змінюється знак добутку на протилежний:*

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

*2. Лінійність векторного добутку:*

$$\left[\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\cdot\vec{b}\right]=\lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right];$$

$$\left[\vec{a}+\vec{d},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{d},\vec{b}\right],\quad \left[\vec{a},\vec{d}+\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\vec{d}\right]+\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

*Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, коли ці вектори паралельні, тобто* $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=0$.

*Умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.*

***Def. Змішаним добутком трьох векторів*** $\vec{a}$***,*** $\vec{b}$***,*** $\vec{c}$ ***називають число, що дорівнює скалярному добутку векторного добутку*** $\vec{a}$***,*** $\vec{b}$ ***і вектора*** $\vec{c}$ ***.***

*Позначення скалярного добутку:*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

*Це можна записати і так:*

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right);\ \left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right);\ \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

*Властивості змішаного добутку:*

*1. При круговоої перестановці всіх трьох векторів знак добутку не змінюється. При перестановці двох векторів знак добутку змінюється:*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right).$$

*2. При зміні послідовності дій щодо векторів, добуток не змінюється:*

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right).$$

*3. Сумарний вектор в змішаному добутку можна уявити як суму змішаних добутків:*

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right),$$
$$\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)+\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right), ....$$

*Змішаний добуток в декартовій системі координат:*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

*Геометричний зміст змішаного добутку трьох заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ полягає в тому, що по абсолютній величині змішаний добуток цих трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.*

*Трійка векторів, змішаний добуток яких додатній, називається правою трійкою. Трійка векторів, мішаний добуток яких від'ємний, називається лівої трійкою.*

*Умовою компланарности трьох векторів є рівність нулю їх змішаного добутку.*

***Def. Подвійним векторних добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають вектор, компланарний векторам $\vec{b}$ та $\vec{c}$, який дорівнює векторному добутку вектора $\vec{a}$ і векторного добутку векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$.***

*Позначається $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$ або $\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}$.*

*Властивості подвійного векторного добутку:*

*а) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (кажуть «бац мінус цаб»);*

*б) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\cdot\mu-\vec{c}\cdot\lambda$, де $\mu=\left(\vec{a},\vec{c}\right)$, $\lambda=\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ ( компланарность).*

### 6.6. Питання для перевірки

**1. Афінний простір - це будь-яка множина елементів, які називаються точками, кожної впорядкованої парі яких ставиться у відповідність деякий вектор векторного простору при виконанні:**

а) певної умови; б) певних двох умов; в) певних трьох умов.

**2. Афінний простір називають:**

а) точковим простором; б) векторних простором; в) точково-векторним простором.

**3. Афінний простір позначається:**

а) $L_n^A$; б) $L_A$; в) $L_A^n$.

**4. Афінний простір являє собою:**

а) множину точок; б) множину векторів; в) множину точок і векторів.

**5. Точку, в якій закінчується вектор, називають:**

а) початком вектора; б) кінцем вектора; в) вектором.

**6. Правильним є твердження:**

а) $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_2X_1}$; б) $\overrightarrow{X_1X_2} = -\overrightarrow{X_1X_2}$; в) $\overrightarrow{X_1X_2} = -\overrightarrow{X_2X_1}$.

**7. Правильним є твердження:**

а) якщо $\overrightarrow{X_1X_2} \neq \overrightarrow{X_3X_4}$, то $\overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{X_2X_4}$; б) якщо $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_3X_4}$, то $\overrightarrow{X_1X_3} \neq \overrightarrow{X_2X_4}$; в) якщо $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_3X_4}$, то $\overrightarrow{X_1X_3} = \overrightarrow{X_2X_4}$.

**8. Правильним є твердження:**

а) $\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1} = 0$; б) $\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1} \neq 0$; в) $\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1} = \overrightarrow{X_2X_3}$.

**9. Точка, від якої відкладається вектор, називається:**

а) початковою точкою вектора; б) початком вектора; в) кореневою точкою вектора.

**10. Нульовий вектор афінного простору - це:**

а) вектор, початок і кінець якого збігаються; б) вектор, довжина якого може дорівнювати нулю; в) вектор, координати якого можуть дорівнювати нулю.

**11. Системою координат афінного простору називається:**

а) послідовність довільної точки афінного простору і векторів базису відповідного векторного простору; б) довільна точка афінного простору і вектори відповідного векторного простору; в) послідовність векторів базису відповідного векторного простору.

**12. Координати точки в афінному просторі - це:**

а) числа як відстані від точки до координатних площин; б) числові коефіцієнти розкладання радіуса-вектора точки по базису простору; в) числа, які відповідають довжинам відрізків, які відсікаються на осях координат площинами рівня, що проходять через точку.

**13. Радіус-вектор точки - це:**

а) радіус сфери афінного простору, що проходить через задану точку, центр якої розташований на початку системи координат; б) відстань в афінному просторі від початку системи координат до заданої точки; в) вектор афінного простору з початком в центрі системи координат і кінцем в точці.

**14. Геометричний зміст модуля векторного добутку - це:**

а) площа паралелограма, побудованого на заданих векторах; б) площа трикутника, побудованого на заданих векторах; в) площа ромба, побудованого на заданих векторах.

**15. Модуль векторного добутку:**

а) $|\vec{x}||\vec{y}|cos(\vec{x},\vec{y})$; б) $|\vec{x}||\vec{y}|$; в) $|\vec{x}||\vec{y}|sin(\vec{x},\vec{y})$.

**16. Векторним добутку двох векторів називають вектор, ортогональний цим векторах, який:**

а) утворює з ними ліву трійку і по модулю дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах; б) утворює з ними праву трійку і по модулю дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах; в) утворює з ними праву трійку і по модулю дорівнює площі трикутника, побудованого на цих векторах.

**17. Векторний добуток двох векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ дорівнює:**

а) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$; б) $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$; в) $(a_x + b_x)\cdot(a_y + b_y)\cdot(a_z + b_z)$.

**18. Властивістю векторного добутку є:**

а) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$; б) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$; в) $\vec{a} \times \vec{b} = 2 \cdot \vec{b} \times \vec{a}$.

**19. Властивістю векторного добутку є:**

а) $(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}$; б) $(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{b})$; в) $(\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{b})$.

**20. Якщо $\vec{a} \| \vec{b}$, то:**

а) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$; б) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$; в) $\vec{a} \times \vec{b} = 1$.

**21. Змішаним добутком трьох векторів називають:**

а) векторний добуток одного вектора і векторного добутку двох інших векторів; б) скалярний добуток одного вектора і векторного добутку двох інших векторів; в) скалярний добуток одного вектора і скалярного добутку двох інших векторів.

**22. Властивістю змішаного добутку векторів є:**

а) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$; б) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$; в) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

**23. Властивістю змішаного добутку векторів є:**

а) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$; б) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$; в) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

**24. Змішаний добуток трьох векторів $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ і $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ дорівнює:**

а) $a_x \cdot b_x \cdot c_x + a_y \cdot b_y \cdot c_y + a_z \cdot b_z \cdot c_z$; б) $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$;

в) $(a_x + b_x + c_x)\cdot(a_y + b_y + c_y)\cdot(a_z + b_z + c_z)$.

**25. Геометричний зміст змішаного добутку - це по модулю обєм:**

а) піраміди, побудованої на заданих векторах; б) куба, побудованого на заданих векторах; в) паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах.

**26. Трійка векторів називається правою трійкою, якщо їх змішаний добуток:**

а) дорівнює нулю; б) менше нуля; в) більше нуля.

**27. Трійка векторів називається лівої трійкою, якщо їх змішаний добуток:**

а) менше нуля; б) дорівнює нулю; в) більше нуля.

**28. Обєм піраміди, основа якої трикутник, дорівнює по модулю:**

а) однієї шостої змішаного добутку векторів, на яких побудована піраміда; б) однієї третини змішаного добутку векторів, на яких побудована піраміда; в) однієї другої змішаного добутку векторів, на яких побудована піраміда.

## 6.7. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

2. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ і $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 12$. Обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

3. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, Обчислити: а) $\left|\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\right|$; б) $\left|\left[\left(3\vec{a}-\vec{b}\right),\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]\right|$.

4. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задовольняють умові $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Довести, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

5. Задані вектори $\vec{a}(3,-1,-2)$ і $\vec{b}(1,\ 2,-1)$. Знайти координати векторних добутків: а) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; б) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{b}\right]$; в) $\left[\left(2\vec{a}-b\right),\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]$.

6. Задано вектори $\vec{a}(2,-3,\ 1)$, $\vec{b}(-3,\ 1,\ 2)$, $\vec{c}(1,\ 2,\ 3)$. Обчислити $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a},\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]$.

7. Визначити, якою являється трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (Правою або лівою), якщо:

а) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$; б) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}$; в) $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{k}$; г) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$; д) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{j}$; е) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

8. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

9. Встановити, компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чин і, якщо: а) $\vec{a}(2,\ 3,-1)$, $\vec{b}(1,-1,\ 3)$, $\vec{c}(1,\ 9,-11)$; б) $\vec{a}(3,-2,\ 1)$, $\vec{b}(2,\ 1,\ 2)$, $\vec{c}(3,-1,-2)$; в) $\vec{a}(2,-1,\ 2)$, $\vec{b}(1,\ 2,-3)$, $\vec{c}(3,-4,\ 7)$.

10. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2,-1,\ 1)$, $B(5,\ 5,\ 4)$, $C(3,\ 2,-1)$, $D(4,\ 1,\ 3)$.

11. Задані вершини тетраедра: $A(2,\ 3,\ 1)$, $B(4,\ 1,-2)$, $C(6,\ 3,\ 7)$, $D(4,\ 1,\ 3)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини $D$.

## 6.8. Самостійна робота

### *6.8.1. Практика для самостійної роботи*

1. Задані дві суміжні вершини паралелограма $A(-2,\ 6)$, $B(2,\ 8)$ і точка перетину його діагоналей $M(2,\ 2)$. Знайти дві інші вершини.

2. Задані вершини трикутника $A(1,-1,-3)$, $B(2,\ 1,-2)$, $C(-5,\ 2,-6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині $A$.

3. На осі ординат знайти точку $M$ , Рівновіддаленість від точок $A(1,-4,\ 7)$ і $B(5,\ 6,-5)$.

4. Відрізок з кінцями в точках $A(3,-2)$ і $B(6,\ 4)$ розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення.

5. Пряма проходить через точки $M_1(-12,-13)$ і $M_2(-2,-5)$. На цій прямій знайти точку, абсциса якої дорівнює -5.

6. Пряма проходить через точки $A(-3,\ 12)$ і $B(-4,-7)$. Знайти точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

7. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{\pi}{6}$. знаючи що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{c}| = 5$, обчислити:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; в) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

9. Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, щоб вектор $\bar{a} + \bar{b}$ був перпендикулярний до вектора $\bar{a} - \bar{b}$?

10. Задані точки $A(-1,\ 3,-7)$, $B(2,-1,\ 5)$, $C(0,\ 1,-5)$. Обчислити:

а) $\left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\right)\left(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$; б) $\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}\right)^2}$; в) $\sqrt{\left(\overrightarrow{AC}\right)^2}$. Знайти координати векторів $\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$.

11. Визначити, при якому значенні $\alpha$ вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

12. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}=(6,\ -8,\ -7.5)$, утворює гострий кут з віссю $Oz$. Знаючи, що $|\vec{x}|=50$, знайти його координати.

13. Задані вектори: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умовам $\vec{x}\vec{a}=-5$, $\vec{x}\vec{b}=-11$, $\vec{x}\vec{c}=20$.

14. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2,\ 3,\ -1)$ та $\vec{b}=(1,\ -2,\ 3)$ і задовольняє умові $\vec{x}\left(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)=-6$.

15. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ і $\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|=72$. Обчислити $(\vec{a},\vec{b})$.

16. $|\vec{a}_1|=1$, $|\vec{a}_2|=2$ і $\widehat{\vec{a}_1\vec{a}_2}=\dfrac{2\pi}{3}$. Обчислити: а) $\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|$; б) $\left|\left[2\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_1+2\vec{a}_2\right]\right|$; в) $\left|\left[\vec{a}_1+3\vec{a}_2,3\vec{a}_1-\vec{a}_2\right]\right|$.

17. Спростити: а) $\left[2\vec{a}+\vec{b},\vec{c}-\vec{a}\right]+\left[\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right]$; б) $2\vec{i}\left[\vec{j},\vec{k}\right]+3\vec{j}\left[\vec{i},\vec{k}\right]+4\vec{k}\left[\vec{i},\vec{j}\right]$ в) $\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$; г) $\left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}\right]+\left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{b}\right]+\left[\vec{b}-\vec{c},\vec{a}\right]$.

18. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ і $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=\dfrac{\pi}{6}$. Записати через вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ одиничний вектор $\vec{c}_0$, перпендикулярний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і такий, що: а) трійка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_0)$- права; б) трійка $(\vec{b},\vec{c}_0,\vec{a})$ - ліва.

19. У трикутнику з вершинами $A(1,-1,\ 2)$, $B(5,-6,\ 2)$, $C(1,\ 3,-1)$ знайти висоту $h=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

20. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(4,-2,-3)$ і $\vec{b}=(0,\ 1,\ 3)$, утворює з віссю $Oy$ тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}|=26$, знайти його координати.

21. Знайти вектор $\bar{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2,-3,\ 1)$ та $\vec{b}=(1,-2,\ 3)$ і задовольняє умові $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

22. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що задовольняють умові $\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]=0$, компланарность.

23. Задано: $\vec{a}=(1,-1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 2,\ 1)$, $\vec{c}=(3,-2,\ 5)$. Обчислити $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

24. Довести, що чотири точки $A(1,\ 2,-1)$, $B(5,\ 5,\ 4)$, $C(3,\ 2,-1)$, $D(4,\ 1,\ 3)$ лежать в одній площині.

25. Об’єм тетраедра $v=5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2,\ 1,-1)$, $B(3,\ 0,\ 1)$, $C(2,-1,\ 3)$. Знайти координати четвертої вершини $D$, якщо відомо, що вона лежить на осі $Oy$.

*Пряма лінія. Пряма лінія в лінійному просторі. Паралельність прямих ліній. Пряма лінія в евклідовому просторі. Пряма лінія на площині. Загальне рівняння прямої лінії на площині. Нормальне рівняння прямої лінії на площині. Перетворення рівняння прямої лінії в загальному виді в нормальне рівняння. Взаємне розміщення прямих ліній на площині. Поняття півплощині. Взаємне розташування точки і прямої на площині*

# 7. ПРЯМА ЛІНІЯ

## 7.1. Пряма лінія в лінійному просторі

Нехай в просторі $L^n$ задано вектор $\vec{m}$, який називається направляючим. задані точка $M$ і радіус-вектор $\vec{r}_M$ .

**Def. Прямою лінією** $l$, **яка проходить через точку** $M$ **і має направляючий вектор** $\vec{m}$**, називається множина точок, для кожної з яких вектор** $\vec{r}-\vec{r}_M$ **є колінеарним направляючому вектору** $\vec{m}$.

Це можна записати так

$$\vec{r}-\vec{r}_M = t\cdot\vec{m},$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор перемінної точки прямої (рисунок 7.1); $t$ - число, яке називають параметром перемінної точки.

З побудованої залежності можна отримати і інші форми запису прямої лінії.

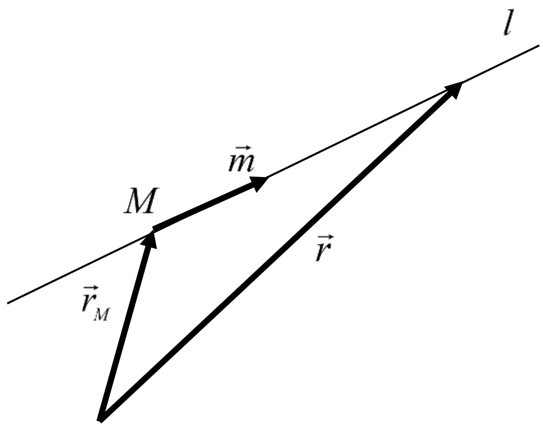


Рисунок. 7.1

**1. Векторно-параметричне форма** рівняння прямої лінії, що проходить через одну точку:

$$\vec{r} = \vec{r}_M + t\cdot\vec{m}.$$

**2. Параметрична форма** рівняння прямої лінії:

$$x_1 = x_{1M} + tm_1,$$
$$x_2 = x_{2M} + tm_2,$$
$$\dots$$
$$x_n = x_{nM} + tm_n.$$

Скорочено це можна записати так:

$$x_i = x_{i\,M} + tm_i \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

**3. Канонічна форма** рівняння прямої (ця форма утворюється з параметричної форми, якщо з ній вилучити параметр $t$):

$$\frac{x_1 - x_{1M}}{m_1} = \frac{x_2 - x_{2M}}{m_2} = \dots = \frac{x_n - x_{nM}}{m_n}.$$

Ця запис являє собою систему $n-1$ лінійних рівнянь.

**4. Векторно-параметричне форма** рівняння прямої лінії, що проходить через дві точки.

Нехай задано дві точки прямої $A$ і $B$. Тоді за точку $M$ можна прийняти точку $A$, а в якості направляючого вектора вибрати вектор

$$\vec{m} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

Отже, рівняння прямої лінії, що проходить через дві точки, буде мати вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = (1-t) \cdot \vec{r}_A + t \cdot \vec{r}_B.$$

5. Канонічна форма рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Оскільки $\vec{m} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, в координатах направляючий вектор можна записати у вигляді $\vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_{1B} - x_{1A}, x_{2B} - x_{2A}, \ldots, x_{nB} - x_{nA})$. Отже, рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x_1 - x_{1M}}{x_{B1} - x_{A1}} = \frac{x_2 - x_{2M}}{x_{B2} - x_{A2}} = \ldots = \frac{x_n - x_{nM}}{x_{Bn} - x_{An}}.$$

## 7.2. Паралельність прямих ліній

Паралельність прямих ліній визначається паралельністю направляючих векторів прямих.

**Def. Дві прямі називаються паралельними, якщо їх направляючі вектори колінеарні.**

*Висновок.* Для перевірки паралельності двох прямих ліній досить перевірити пропорційність координат їх направляючих векторів.

ПРИКЛАД. Прямі

$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 2}{-3} = \frac{x_3 + 2}{5} = \frac{x_4 - 3}{5}$ і $\frac{x_1 + 1}{-4} = \frac{x_2 + 3}{6} = \frac{x_3 - 2}{-10} = \frac{x_4 + 5}{-10}$ паралельні, так як їх направляють вектори колінеарні:

$$(2, -3, 5, 5) = -0{,}5 \cdot (-4, 6, -10, -10).$$

## 7.3. Пряма лінія в евклідовому просторі

Рівняння прямих ліній, які наведені для лінійного простору $L^n$, в евклідовому просторі мають додаткові властивості. Це пов'язано з тим, що в евклідовому просторі у зв'язку з введенням поняття скалярного добутку вводяться також поняття довжини вектора, відстані між точками, кута між векторами, ортонормованого базису.

**Def. За кут між двома прямими лініями приймається кут між направляючими векторами цих прямих:**

$$\cos\left(l_1 \hat{,} l_2\right) = \cos\left(\vec{m}_1 \hat{,} \vec{m}_2\right) = \frac{(\vec{m}_1, \vec{m}_2)}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}.$$

**Def. Дві прямі називаються ортогональними, якщо ортогональні їх направляючі вектори, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю:**

$$(\vec{m}_1, \vec{m}_2) = 0.$$

## 7.4. Пряма лінія на площині

Розглянемо площину як двомірний евклідовий простір $\left(L^2\right)$. Для вирішення задач використовують кілька форм рівняння прямої на площині.

1. Рівняння прямої у векторно-параметричній формі:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{m}.$$

2. Рівняння прямої в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_A + tm_x, \\ y = y_A + tm_y. \end{cases}$$

3. Рівняння прямої в канонічній формі:

$$\frac{x - x_A}{m_x} = \frac{y - y_A}{m_y}.$$

4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

5. Рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку А.

Рівняння прямої в канонічній формі $\frac{x - x_A}{m_x} = \frac{y - y_A}{m_y}$ запишемо у вигляді

$$y - y_A = \frac{m_y}{m_x}\left(x - x_A\right)$$

і позначимо $k = \frac{m_y}{m_x}$ (Це тангенс кута нахилу прямої до осі $Ox$).

Таким чином, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y - y_A = k\left(x - x_A\right).$$

6. Стандартна форма рівняння прямої або рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Попереднє рівняння запишемо у вигляді $y = kx + y_A - kx_A$ і введемо позначення: $b = y_A - kx_A$. Отримаємо запис рівняння прямої лінії в стандартній формі:

$$y = kx + b.$$

7. Рівняння прямої лінії у відрізках (рисунок 7.2).

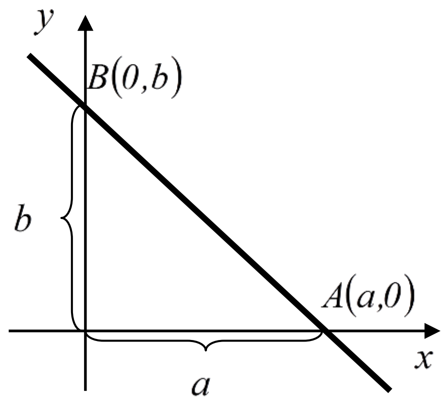


Рисунок. 7.2

Нехай пряма проходить через точки $A$ та $B$, що лежать на осях $Ox$ і $Oy$. Ці точки можна записати через координати: $A(a,0)$ і $B(0,b)$. В рівняння прямої лінії, що проходить через дві точки,

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

підставимо координати точок

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b}.$$

Отже, рівняння прямої у відрізках має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де $a$ і $b$ - коефіцієнти, які з точністю до знака дорівнюють відрізкам, що відсікає пряма лінія на осях координат.

## 7.5. Загальне рівняння прямої лінії на площині

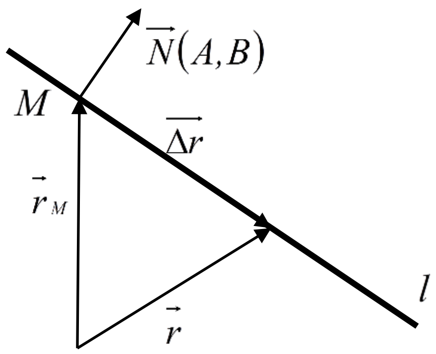



Рисунок. 7.3

Нехай на площині (в просторі $L^2$) задана пряма лінія $l$, що проходить через точку $M(x_M, y_M)$, радіус-вектор якої $\vec{r}_M$. Нехай заданий вектор $\overrightarrow{N}(A,B)$, ортогональний прямій лінії $l$. Тоді для будь-якої точки $(x,y)$ з радіусом-вектором $\vec{r}$ можна побудувати вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_M$, ортогональний вектору $\overrightarrow{N}(A,B)$ (рисунок 7.3). Отже,

$$\left(\Delta\vec{r}, \vec{N}\right) = 0.$$

Через координати точки цей вираз можна записати так:

$$\left((x - x_M, y - y_M), (A,B)\right) = 0,$$

або

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) = 0.$$

Це рівняння називається загальним рівнянням прямої, що проходить через задану точку. розкриємо дужки

$$Ax + By - Ax_M - By_M = 0$$

і введемо позначення

$$C = -Ax_M - By_M.$$

Отримане рівняння

$$Ax + By + C = 0$$

називається загальним рівнянням прямої лінії.

*Зауваження 1.* Геометричне значення коефіцієнтів $A$ і $B$ в загальному рівнянні прямої на площині $Ax + By + C = 0$ полягає в тому, що вони є координатами вектора нормалі до прямої лінії.

*Зауваження 2* (Ознака тотожності прямих ліній). Якщо в двох рівняннях прямих ліній коефіцієнти $A$, $B$ і $C$ пропорційні, то ці рівняння описують одну й ту ж пряму лінію.

ПРИКЛАД. Рівняння прямої лінії $2x - y + 3 = 0$, Можна записати в такому вигляді:

$$4x - 2y + 6 = 0;$$
$$-2x + y - 3 = 0;$$
$$200x - 100y + 300 = 0;\dots$$

## 7.6. Нормальне рівняння прямої лінії на площині

Нехай на площині (в просторі $L^2$) задана пряма лінія $l$, що проходить через точку $M(x_M, y_M)$ з радіусом-вектором $\vec{r}_M$. А також задано вектор $\vec{N}(A, B)$, ортогональний прямій лінії $l$. Тоді можна записати

$$(\Delta\vec{r}, \vec{N}) = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{N}) = 0.$$

Вектор нормалі запишемо через його орт

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}.$$

Знак вибираємо так, щоб орт нормалі мав напрямок від початку координат в бік прямої, тобто, щоб виконувалася нерівність

$$(\vec{r}_M, \vec{n}) > 0.$$

Тоді рівняння прямої лінії через нормаль набуває вигляду

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{n}) = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{r}, \vec{n}) - (\vec{r}_M, \vec{n}) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (\vec{r}, \vec{n}) - p = 0,$$

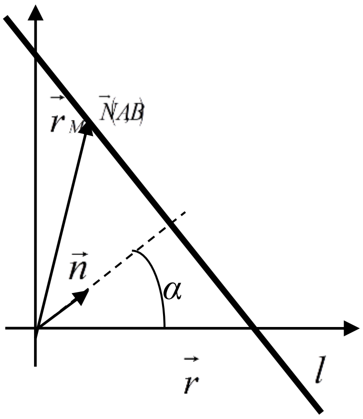



Рисунок. 7.4

де $p$ - проекція вектора $\vec{r}_M$ на орт $\vec{n}$. Ця проекція дорівнює відстані від початку координат до прямої лінії (рисунок 7.4).

Рівняння виду

$$(\vec{r}, \vec{n}) - p = 0$$

називають нормальним рівнянням прямої лінії у векторній формі.

Запишемо вектори одержаного рівняння через їх координати:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j};$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \vec{j} = \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\right) \cdot \vec{i} + \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}\right) \cdot \vec{j}.$$

Тут

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\right), \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{j}}\right),$$

де

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}\right) = \cos\alpha \text{ і } \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

отже,

$$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}.$$

Тоді

$$(\vec{r},\vec{n}) - p = 0 \;\Rightarrow\; \left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}, cos\,\alpha\cdot\vec{i} + sin\,\alpha\cdot\vec{j}\right) - p = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Це рівняння називають нормальним рівнянням прямої лінії в аналітичному вигляді.

## 7.7. Перетворення рівняння прямої лінії в загальному виді в нормальне рівняння

Нехай задано загальне рівняння прямої лінії $Ax + By + C = 0$. Розділимо його на величину $\sqrt{A^2 + B^2}$ :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

В цьому випадку:

а) якщо $C > 0$, то $p = -\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$;

б) якщо $C < 0$, то $p = +\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

При цьому $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = cos\,\alpha$, $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = sin\,\beta$.

Отже, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

*Висновок.* Для перетворення рівняння прямої лінії у загальному вигляді в рівняння лінії в нормальній формі необхідно задане рівняння в загальному вигляді помножити на коефіцієнт

$$\mu = -\frac{sign(C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

В цьому випадку $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$.

## 7.8. Взаємне розміщення прямих ліній на площині

1. Нехай задано дві прямі ($l_1$ і $l_2$, рисунок 7.5), рівняння яких записані в стандартній формі:

$$l_1:\quad y = k_1x + b_1; \qquad l_2:\quad y = k_2x + b_2.$$

У цьому випадку маємо вираз

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

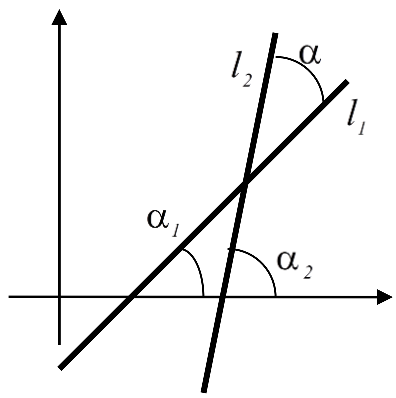



Рисунок. 7.5

Але $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, отже,

$$tg(l_1, l_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

З цього запису витікає:

а) якщо прямі лінії паралельні $(l_1 \| l_2)$, то

$$tg\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2;$$

б) якщо прямі лінії перпендикулярні $(l_1 \perp l_2)$, то

$$tg\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \infty \;\Rightarrow\; 1 + k_1 k_2 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 k_2 = -1.$$

2. Нехай задано дві прямі ($l_1$ і $l_2$), рівняння яких записано в загальному вигляді:

$$l_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \qquad l_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

В цьому разі коефіцієнти при $x$ та $y$ являють собою координати нормалей прямих:

$$l_1: \quad \vec{N}_1(A_1, B_1); \qquad l_2: \quad \vec{N}_2(A_2, B_2).$$

Кут між прямими визначається як кут між нормалями прямих:

$$\cos\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

З цього запису витікає:

а) якщо прямі лінії паралельні $(\vec{N}_1 \| \vec{N}_2)$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$;

б) якщо лінії перпендикулярні $(\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2)$, то $\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$

### 7.9. Напівплощина

Розглянемо лінійну функцію від координат точки $(x, y)$ на площині:

$$f(x, y) = Ax + By + C.$$

**Def. Множина точок, для яких $f(\vec{r}) = Ax + By + C = 0,$ утворюють пряму лінію.**

**Def. Множина точок на площині, для яких $f(\vec{r}) = Ax + By + C > 0$ або $f(\vec{r}) = Ax + By + C < 0,$ називаються напівплощиною.**

***Теорема.*** **Якщо дві точки належать одній півплощині, то цій півплощини належать і всі точки відрізка, який з'єднує їх.**

◄ Задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, для яких

$$f(\vec{r}_1) = Ax_1 + By_1 + C > 0 \text{ або } f(\vec{r}_2) = Ax_2 + By_2 + C > 0.$$

Відрізок, що з'єднує задані точки, можна записати у вигляді

$$\vec{r} = t\vec{r}_1 + (1-t)\vec{r}_2,$$

де $0 \le t \le 1$.

Для радіуса-вектора відрізка можна записати

$$\vec{r} = t\vec{r}_1 + (1-t)\vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad x\vec{i} + y\vec{j} = t(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (1-t)(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} = (tx_1 + (1-t)x_2)\vec{i} + (ty_1 + (1-t)y_2)\vec{j}.$$

Отже, $x = tx_1 + (1-t)x_2$ і $y = ty_1 + (1-t)y_2$. Підставимо отримані значення:

$$f(\vec{r}) = Ax + By + C = A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C \Rightarrow$$

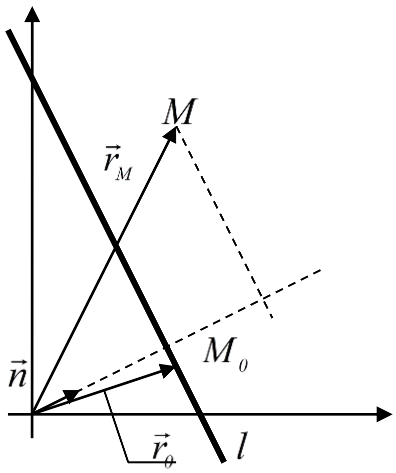
$$\Rightarrow f(\vec{r}) = t(Ax_1 + By_1 + C) - tC + (1-t)(Ax_2 + By_2 + C) - (1-t)C + C.$$

Отже, $f(\vec{r}) = t(Ax_1 + By_1 + C) + (1-t)(Ax_2 + By_2 + C)$,

$$f(\vec{r}) = t f(\vec{r}_1) + (1-t) f(\vec{r}_2) > 0. \blacktriangleright$$

### 7.10. Взаємне розташування точки і прямої на площині

Нехай задані пряма $l$ і орт її нормалі $\vec{n}$ (рисунок 7.6), направлений в бік прямої лінії.




Мал. 7.6

Скалярний добуток орта $\vec{n}$ і радіуса-вектора $\vec{r}_M$ будь якої точки $M$

$$(\vec{n}, \vec{r}_M)$$

є проекцією цього вектора на орт $\vec{n}$.

Якщо точка $M_0$ з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ належить прямій $l$, то скалярний добуток орта і радіуса-вектора $\vec{r}_0$ - це відстань від початку координат до прямої лінії $l$:

$$(\vec{n}, \vec{r}_0) = p.$$

**Def. Різниця виду**

$$(\vec{n}, \vec{r}_M) - p = d(\vec{r}_M),$$

**де $\vec{r}_M$ - радіус-вектор будь якої точки $M$, що не належить прямій лінії, а $p$ - відстань від центру системи координат до прямої лінії, називається *відхиленням* точки $M$ від прямої.**

Можливі такі випадки:

а) якщо відхилення від'ємне $(d(\vec{r}_M) < 0)$, то точка $M$ і початок координат знаходяться в одній півплощині;

б) якщо відхилення додатне $(d(\vec{r}_M) > 0)$, То точка $M$ і початок координат знаходяться в різних півплощинах.

**Def. Відстанню від точки $M$ з радіусом-вектором $\vec{r}_M$ до прямої лінії $l$ називають абсолютну величину відхилення цієї точки від прямої:**

$$\rho(M,l)=\left|d\left(\vec{r}_M\right)\right|=\left|\left(\vec{n},\vec{r}_M\right)-p\right|.$$

*Висновок.* Щоб визначити відстань від точки $M$ до прямої лінії, заданої в загальному вигляді рівнянням $Ax+By+C=0$, Необхідно:

а) привести загальне рівняння до нормального вигляду:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0;$$

б) підставити замість $x$ і $y$ координати точки $M$, тоді модуль отриманого значення дорівнює шуканій відстані:

$$\rho(M,l)=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_M+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_M+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

### 7.11. Висновки

***Def. Прямою лінією*** $l$***, яка проходить через точку*** $M$ ***і має направляючий вектор*** $\vec{m}$***, називається множина точок, для кожної з яких вектор*** $\vec{r}-\vec{r}_M$ ***є колінеарним направляючому вектору*** $\vec{m}$***.***

*Це можна записати так:*

$$\vec{r}-\vec{r}_M=t\cdot\vec{m},$$

*де* $\vec{r}$ *- радіус-вектор перемінної точки прямої;* $t$ *- число, яке називають параметром перемінної точки.*

*Форми запису прямої лінії:*

***1. Векторно-параметричне рівняння*** *прямій лінії, що проходить через одну точку:*

$$\vec{r}=\vec{r}_M+t\cdot\vec{m}.$$

***2. Параметричне рівняння*** *прямій лінії:*

$$x_1=x_{1M}+tm_1,$$
$$x_2=x_{2M}+tm_2,$$
$$\ldots$$
$$x_n=x_{nM}+tm_n.$$

*Скорочено це можна записати так:*

$$x_i=x_{iM}+tm_i\quad\left(i=1,2,\ldots,n\right).$$

***3. Канонічна форма*** *рівняння прямої*

$$\frac{x_1-x_{1M}}{m_1}=\frac{x_2-x_{2M}}{m_2}=\ldots=\frac{x_n-x_{nM}}{m_n}.$$

*Це є запис системи* $n-1$ *лінійних рівнянь.*

***4. Векторно-параметричне форма*** *рівняння прямої, що проходить через дві точки* $A$ *і* $B$*:*

$$\vec{r}=\vec{r}_A+t\left(\vec{r}_B-\vec{r}_A\right)\quad\Rightarrow\quad\vec{r}=\left(1-t\right)\vec{r}_A+t\vec{r}_B.$$

***5. Канонічна форма*** *рівняння прямої, що проходить через дві точки:*

$$\frac{x_1 - x_{1M}}{x_{B1} - x_{A1}} = \frac{x_2 - x_{2M}}{x_{B2} - x_{A2}} = \ldots = \frac{x_n - x_{nM}}{x_{Bn} - x_{An}}.$$

***Def. Дві прямі називаються паралельними, якщо їх направляючі вектори колінеарні.***

*<u>Висновок.</u> Для перевірки паралельності двох прямих ліній треба перевірити пропорційність координат їх направляючих векторів.*

***Def. За кут між двома прямими лініями приймається кут між направляючими векторами цих прямих:***

$$\cos\left(l_1 \hat{,} l_2\right) = \cos\left(\vec{m}_1 \hat{,} \vec{m}_2\right) = \frac{\left(\vec{m}_1, \vec{m}_2\right)}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}.$$

***Def. Дві прямі називаються ортогональними, якщо ортогональні їх направляючі вектори, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю:***

$$\left(\vec{m}_1, \vec{m}_2\right) = 0.$$

*Для рішення задач використовують кілька форм записи рівняння прямої на площині, тобто в двомірному евклідовому просторі* $\left(L^2\right)$.

*1. Рівняння прямої в векторно-параметричної формі:*

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{m}.$$

*2. Рівняння прямої в параметричній формі:*

$$\begin{cases} x = x_A + t m_x, \\ y = y_A + t m_y. \end{cases}$$

*3. Рівняння прямої в канонічній формі:*

$$\frac{x - x_A}{m_x} = \frac{y - y_A}{m_y}.$$

*4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки:*

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

*5. Рівняння прямої лінії з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку А:*

$$y - y_A = k\left(x - x_A\right).$$

*6. Стандартна форма рівняння прямої або рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:*

$$y = kx + b.$$

*7. Рівняння прямої лінії у відрізках:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

*де* $a$ *і* $b$ *- коефіцієнти, які з точністю до знака дорівнюють відрізкам, що відсікає пряма лінія на осях координат.*

*Якщо на площині (в просторі* $L^2$*) Задана пряма лінія* $l$*, що проходить через точку* $M\left(x_M, y_M\right)$*, і задано вектор* $\overrightarrow{N}\left(A, B\right)$*, ортогональний прямій лінії* $l$*,* *то для будь-якої точки* $(x, y)$ *з радіусом-вектором* $\vec{r}$ *можна побудувати вектор* $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_M$, *ортогональний вектору* $\vec{N}(A, B)$. *Отже,*

$$\left(\Delta\vec{r}, \vec{N}\right) = 0,$$

*що можна записати в вигляді*

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) = 0.$$

*Це рівняння називається загальним рівнянням прямої, що проходить через задану точку.*

*Рівняння виду*

$$Ax + By + C = 0$$

*називається просто загальним рівнянням прямої лінії.*

*Зауваження 1. Геометричний зміст коефіцієнтів* $A$ *і* $B$ *в загальному рівнянні прямої на площині* $Ax + By + C = 0$ *полягає в тому, що вони є координатами вектора нормалі до прямої лінії.*

*Зауваження 2 (Ознака тотожності прямих ліній). Якщо в двох рівняннях прямих ліній коефіцієнти* $A$, $B$ *і* $C$ *пропорційні, то ці рівняння описують одну й ту ж пряму лінію.*

*Для прямої на площині (в просторі* $L^2$*) Можна записати*

$$\left(\Delta\vec{r}, \vec{N}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{N}\right) = 0.$$

*Орт вектора нормалі*

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}.$$

*Знак вибирають так, щоб орт нормалі мав напрямок від початку координат в бік прямої:*

$$\left(\vec{r}_M, \vec{n}\right) > 0.$$

*Рівняння прямої лінії через нормаль тоді має вигляд*

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{n}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\vec{r}, \vec{n}\right) - \left(\vec{r}_M, \vec{n}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\vec{r}, \vec{n}\right) - p = 0,$$

*де* $p$ *- проекція вектора* $\vec{r}_M$ *на орт* $\vec{n}$, *яка дорівнює відстані від початку координат до прямої лінії.*

*Рівняння виду*

$$\left(\vec{r}, \vec{n}\right) - p = 0$$

*називають нормальним рівнянням прямої лінії у векторній формі.*

*Рівняння*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

*називають нормальним рівнянням прямої лінії в аналітичному вигляді.*

*Для перетворення рівняння прямої лінії в загальному вигляді в рівняння лінії в нормальній формі необхідно задане рівняння в загальному вигляді помножити на коефіцієнт*

$$\mu = -\frac{sign(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

*де* $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$.

*При взаємному розміщені прямих ліній на площині, якщо:*

*1. Дві прямі* $(l_1,\ l_2)$ *описані рівняннями в стандартній формі:*

$$l_1:\quad y = k_1x + b_1;\ \ l_2:\quad y = k_2x + b_2,$$

*тоді*

$$tg(l_1, l_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}.$$

*Звідси випливає:*

*а) якщо лінії паралельні* $(l_1 \| l_2)$, *то* $tg\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$;

*б) якщо лінії перпендикулярні* $(l_1 \perp l_2)$, *то* $tg\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \infty \Rightarrow k_1k_2 = -1.$

*2. Дві прямі* $(l_1 \| l_2)$ *описані рівняннями в загальному вигляді:*

$$l_1:\quad A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ \ l_2:\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

*де* $\vec{N}_1(A_1, B_1),\ \vec{N}_2(A_2, B_2)$.

*Кут між прямими визначається як кут між нормалями прямих:*

$$\cos\left(\widehat{l_1, l_2}\right) = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

*Звідси випливає:*

*а) якщо лінії паралельні* $(\vec{N}_1 \| \vec{N}_2)$, *то* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$;

*б) якщо лінії перпендикулярні* $(\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2)$, *то* $\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

***Def. Множина точок, для яких***

$$f(\vec{r}) = Ax + By + C = 0,$$

***утворюють пряму лінію.***

***Def. Множина точок на площині, для яких***

$$f(\vec{r}) = Ax + By + C > 0 \ \textbf{\textit{або}}\ f(\vec{r}) = Ax + By + C < 0,$$

***називаються напівплощиною.***

***Теорема. Якщо дві точки належать одній півплощині, то цієї півплощини належать і всі точки відрізка який з'єднує їх.***

***Def. Різниця виду***

$$(\vec{n}, \vec{r}_M) - p = d(\vec{r}_M),$$

***де*** $\vec{r}_M$ ***- радіус-вектор довільної точки*** $M$, ***що не належить прямій лінії, а*** $p$ ***- відстань від центру системи координат до прямої лінії, називається відхиленням точки*** $M$ ***від прямої.***

*Можливі такі випадки:*

*а) якщо відхилення від'ємне* $\left(d(\vec{r}_M) < 0\right)$, то точка $M$ *і початок координат знаходяться в одній півплощині;*

*б) якщо відхилення додатне* $\left(d(\vec{r}_M) > 0\right)$, то точка $M$ *і початок координат знаходяться в різних півплощинах.*

***Def. Відстанню від точки $M$ з радіусом-вектором $\vec{r}_M$ до прямої лінії $l$ називають абсолютну величину відхилення цієї точки від прямої:***

$$\rho(M,l)=\left|d(\vec{r}_M)\right|=\left|(\vec{n},\vec{r}_M)-p\right|.$$

*Висновок. Щоб визначити відстань від точки $M$ до прямої лінії, заданої в загальному вигляді рівнянням $Ax+By+C=0$, Необхідно:*

*а) привести загальне рівняння до нормального вигляду:*

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0;$$

*б) підставити замість $x$ і $y$ координати точки $M$, тоді модуль отриманого значення дорівнює шуканій відстані:*

$$\rho(M,l)=\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_M+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_M+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

### 7.12. Питання для перевірки

**1. Пряму в векторній формі можна задати:**

а) вектором нормалі і точкою; б) Направляючим вектором і точкою; в) двома точками.

**2. Векторно-параметрична форма рівняння прямої:**

а) $x_i=x_{Ai}+tm_i$; б) $\frac{x-x_A}{m_x}=\frac{y-y_A}{m_y}$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**3. Канонічна форма рівняння прямої на площині:**

а) $x_i=x_{Ai}+tm_i$; б) $\frac{x-x_A}{m_x}=\frac{y-y_A}{m_y}$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

**4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки на площині:**

а) $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$; б) $\frac{x_B-x_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{y-y_A}$; в) $\frac{x-x_A}{x_B-x}=\frac{y-y_A}{y_B-y}$.

**5. Рівняння прямої у відрізках на площині:**

а) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$; б) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; в) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$.

**6. Коефіцієнти рівняння прямої у відрізках на площині з точністю до знака дорівнюють:**

а) координатам вектора нормалі прямої; б) координатам направляючого вектора прямої; в) відрізкам, які відсікає пряма на осях координат.

**7. Коефіцієнти при $x$ і $y$ в рівнянні прямої на площині в загальному вигляді являють собою:**

а) координати вектора нормалі прямої; б) координати направляючого вектора прямої; в) відрізки, що відсікаються прямою по осях координат.

**8. Рівняння прямої на площині в загальному вигляді, що проходить через задану точку, має вигляд:**

а) $\frac{x-x_A}{m_x}=\frac{y-y_A}{m_y}$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)=0$; в)$(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**9. У нормальному рівнянні прямої на площині величина *p* - це:**

а) тангенс кута нахилу прямої до осі *0x*; б) переміщення прямої вздовж осі *0y*; в) відстань від центру системи координат до прямої.

**10. Векторна форма нормального рівняння прямої на площині:**

а) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)=0$; в) $(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**11. Аналітична форма нормального рівняння прямої на площині:**

а) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)=0$; в) $(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**12. Для перетворення рівняння прямої на площині в загальному вигляді в нормальне рівняння необхідно всі його складові помножити на коефіцієнт:**

а) $M=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$; б) $M=-\frac{sign(C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$; в) $M=\frac{sign(C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

**13. Якщо прямі лінії, описані рівняннями в стандартній формі, паралельні, то:**

а) $k_1k_2=-1$; б) $k_1=k_2$; в) $k_1k_2=1$.

**14. Якщо прямі лінії, описані рівняннями в стандартній формі, ортогональні, то:**

а) $k_1k_2=-1$; б) $k_1=k_2$; в) $k_1k_2=1$.

**15. За кут між двома прямими на площині, заданими рівняннями в загальному вигляді, приймають кут між:**

а) направляючими векторами цих прямих; б) двома відрізками цих прямих; в) нормалями цих прямих.

**16. Якщо прямі лінії на площині які описані рівняннями в загальному вигляді, паралельні, то:**

а) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; б) $A_1A_2+B_1B_2=0$; в) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

**17. Якщо прямі лінії на площині які описані рівняннями в загальному вигляді, ортогональні, то:**

а) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; б) $A_1A_2+B_1B_2=0$; в) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

**18. Якщо в нормальне рівняння прямої на площині підставити замість *x* і *y* координати будь якої точки, то отримане значення по модулю дорівнює:**

а) відстані від точки до прямої; б) відстані від точки до початку системи координат; в) відстані від прямої до початку системи координат.

### 7.13. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Задані пряма $L$ і точка $M$. Потрібно: обчислити відстань $\rho(M,L)$ від точки $M$ до прямої $L$; написати рівняння прямої $L'$, що проходить через точку $M$ перпендикулярно заданій прямій $L$; написати рівняння прямої $L''$, що проходить через точку $M$ паралельно заданій прямій $L$. Вихідні дані:
а) $L: -2x+y-1=0$, $M(-1,\ 2)$; б) $L: 2y+1=0$, $M(1,\ 0)$; в) $L: x+y+1=0$, $M(0,\ 1)$.

2. Дослідити взаємне розташування заданих прямих $L_1$ і $L_2$. При цьому в разі паралельності прямих знайти відстань $\rho(L_1,L_2)$ між ними, а в разі пересічних прямих - косинус кута $\left(L_1,\hat{}L_2\right)$ і точку $M_0$ перетину прямих:

а) $L_1: -2x+y-1=0$, $L_2: 2y+1=0$; б) $L_1: \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}$;

в) $L_1: x+y-1=0$, $L_2: 2x-2y+1=0$; г) $L_1: x+y-1=0$, $L_2: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}$;

д) $L_1: x+2y+1=0$, $L_2: 2x-4y-2=0$.

3. Показати, що точка $M(-1,\ 2)$ належить прямій $L:\ x=2t$, $y=-1-6t$. Знайти відповідне цій точці значення параметра $t$.

4. Написати рівняння прямої, паралельної двом заданим прямим $L_1$ і $L_2$ і що проходить посередині між ними, якщо:

а) $L_1: 3x-2y-1=0$, $L_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}$; б) $L_1: 3x-15y-1=0$, $L_2: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{1}$.

5. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-2,\ 3)$ на однакових відстанях від точок $M_1(5,-1)$ і $M_2(3,\ 7)$.

6. Написати рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2,-7)$, а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.

7. Пряма $L$ задана точкою $M_0(x_0,y_0)\in L$ і нормальним вектором $\vec{n}(A,\ B)$. Написати рівняння прямої, привести його до загального виду, побудувати пряму, привести загальне рівняння до нормального вигляду, вказати відстань від початку координат до прямої. а) $M_0(-1,\ 2)$, $\vec{n}(2,\ 2)$; б) $M_0(2,\ 1)$, $\vec{n}(2,\ 0)$; в) $M_0(1,\ 1)$, $\vec{n}(2,-1)$.

8. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ з координатними площинами.

9. Довести, що пряма $\begin{cases} 2x-3y+5z-6=0, \\ x+5y-7z+10=0 \end{cases}$ перетинає вісь $Oy$.

10. Визначити, які з наступних рівнянь прямих є нормальними:

а) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; б) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$; в) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$;

г) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$; д) $-x+2=0$; е) $x-2=0$; ж) $y+2=0$; і) $-y-2=0$.

11. Точка $A(2,-5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого належить прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрата.

12. Установити, чи знаходяться точка $M(1,-3)$ і початок координат по одну або по різні сторони відносно наступних прямих: а) $2x-y+5=0$; б) $x-3y-5=0$; в) $3x+2y-1=0$; г) $x-3y+2=0$; д) $10x+24y+15=0$.

13. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,\ 0,-3)$ паралельно: а) вектору $\vec{a}=(2,-3,\ 5)$; б) прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; в) осі $Ox$; г) осі $Oy$; д) осі $Oz$.

14. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходять через дві задані точки: а) $(3,-1,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 1)$; б) $(1,\ 1,-2)$, $(3,-1,\ 0)$; в) $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,-2)$.

15. Довести перпендикулярність прямих:

а) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ і $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\2x+3y-8z+3=0;\end{cases}$

б) $x=2t+1,\quad y=3t-2,\ z=-6t+1$ і $\begin{cases}2x+y-4z+2=0,\\4x-y-5z+4=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\2x-y-9z-2=0\end{cases}$ і $\begin{cases}2x+y+2z+5=0,\\2x-2y-z+2=0.\end{cases}$

16. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,\ 2,-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}=(6,-2,-3)$ і перетинає пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

17. Визначити відстань $d$ від точки $M(1,-1,-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

## 7.14. Самостійна робота

1. Трикутник $ABC$ заданий координатами вершин. Потрібно:

- написати рівняння сторони $(AB)$;
- написати рівняння висоти $(CD)$ і обчислити її довжину $h=|CD|$;
- знайти кут $\varphi$ між висотою $(CD)$ і медіаною $(BM)$;
- написати рівняння бісектрис $L_1$ і $L_2$ внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині $A$.

Вихідні дані: а) $A(1,\ 2)$, $B(2,-2)$, $C(6,\ 1)$; б) $A(2,-2)$, $B(6,\ 1)$, $C(-2,\ 0)$.

2. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,\ 1)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $L:\ x=1+t,\ y=-2-\frac{2}{3}t$.

3. Написати рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2,\ 6)$, а також рівняння висоти $x-7y+15=0$ і бісектриси $7x+y+5=0$, проведених з однієї вершини.

4. Пряма $L$ задана точкою $M_0(x_0, y_0)\in L$ і направляючим вектором $\vec{q}(l,\ m)$. Написати рівняння прямої, привести його до загального вигляду, побудувати пряму, привести загальне рівняння до нормального вигляду, визначити відстань від початку координат до прямої. Вихідні дані: а) $M_0(-1,\ 2)$, $\vec{q}(3,-1)$; б) $M_0(1,\ 1)$, $\vec{q}(0,-1)$; в) $M_0(-1,\ 1)$, $\vec{q}(2,\ 0)$.

5. Визначити, при якому значенні $D$ пряма $\begin{cases}2x+3y-z+D=0,\\3x-2y+2z-6=0\end{cases}$ перетинає: а) вісь $Ox$; б) вісь $Oy$; в) вісь $Oz$.

6. Привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду в кожному з наступних випадків: а) $4x-3y-10=0$; б) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; в) $12x-5y+13=0$; г) $x+2=0$; д) $2x-y-\sqrt{5}=0$.

7. Обчислити величину відхилення $\delta$ і відстань $d$ точки до прямої:
а) $A(2,-1)$, $4x+3y+10=0$; б) $B(0,-3)$, $5x-12y-23=0$;
в) $P(-2,\ 3)$, $3x-4y-2=0$; г) $Q(1,-2)$, $x-2y-5=0$.

8. Задано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$, $2x-3y+6=0$ і одна з його вершин $A(-2,\ 1)$. Обчислити площу прямокутника.

9. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: а) $(1,-2,\ 1)$, $(3,\ 1,-1)$; б) $(3,-1,\ 0)$, $(1,\ 0,-3)$; в) $(0,-2,\ 3)$, $(3,-2,\ 1)$; г) $(1,\ 2,-4)$, $(-1,\ 2,-4)$.

10. Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,-1,-3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}=(2,-3,\ 4)$; б) прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$; в) прямій $x=3t-1,\ y=-2t+3,\ z=5t+2$.

11. Довести, що прямі, які задані параметричними рівняннями $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$ і $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$, перетинаються.

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-4,-5,\ 3)$ і перетинає дві прямі $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

13. Обчислити відстань $d$ від точки $M(2,\ 3,-3)$ до прямої:
а) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$; б) $x=t+1,\ y=t+2,\ z=4t+13$; в) $\begin{cases}2x-2y+z+3=0,\\3x-2y+2z+17=0.\end{cases}$

*Площина в лінійному просторі. Площина в $L^3$. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини в загальному вигляді. Нормальне рівняння площини. Перетворення рівняння площини в загальному вигляді в нормальне рівняння. Взаємне розташування площин. Взаємне розташування площини і прямої лінії. Поняття півпростору. Взаємне розташування точки і площини.*

# 8. ПЛОЩИНА

## 8.1. Площина в лінійному просторі

Розглянемо лінійне простір $L^n$ $(n \geq 3)$ і в ньому два лінійно незалежних вектора $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$.

**Def. Площиною, що проходить через точку $M$ і має направляючі вектори $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$, називають множину точок, для кожної з яких вектор $\vec{r} - \vec{r}_M$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$:**

$$\vec{r} - \vec{r}_M = t \cdot \vec{m}_1 + s \cdot \vec{m}_2 .$$

Існує кілька видів опису площини:

1. Векторно-параметричний:

$$\vec{r} = \vec{r}_M + t \cdot \vec{m}_1 + s \cdot \vec{m}_2 .$$

2. Параметричний (як наслідок прирівнювання координат лівої і правої частин рівняння у векторній формі):

$$\begin{cases} x_1 = x_{M1} + t \cdot m_{11} + s \cdot m_{21}, \\ x_2 = x_{M2} + t \cdot m_{12} + s \cdot m_{22}, \\ \qquad \dots \\ x_n = x_{Mn} + t \cdot m_{1n} + s \cdot m_{2n}. \end{cases}$$

Скорочено цю систему можна записати у вигляді

$$x_i = x_{Mi} + t \cdot m_{1i} + s \cdot m_{2i} ,$$

де $i = 1,\dots,n$.

## 8.2. Площина в просторі $L^3$

Якщо простір є тримірним, то в параметричній формі площину можна уявити як систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_M + t \cdot m_{1x} + s \cdot m_{2x}, \\ y = y_M + t \cdot m_{1y} + s \cdot m_{2y}, \\ z = z_M + t \cdot m_{1z} + s \cdot m_{2z}. \end{cases}$$

Для перших двох рівнянь, тобто

$$\begin{cases} t\cdot m_{1x} + s\cdot m_{2x} = x - x_M \\ t\cdot m_{1y} + s\cdot m_{2y} = y - y_M \end{cases},$$

використовуючи властивості визначників, можна записати:

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} m_{1x} & m_{2x} \\ m_{1y} & m_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ m_{2x} & m_{2y} \end{vmatrix}.$$

Рішенням записаної системи двох рівнянь є:

$$t = \frac{\begin{vmatrix} x - x_M & m_{2x} \\ y - y_M & m_{2y} \end{vmatrix}}{\Delta_{xy}}, \quad s = \frac{\begin{vmatrix} m_{1x} & x - x_M \\ m_{1y} & y - y_M \end{vmatrix}}{\Delta_{xy}}.$$

Підставляємо отримані значення в третє рівняння:

$$z = z_M + \frac{\begin{vmatrix} x - x_M & m_{2x} \\ y - y_M & m_{2y} \end{vmatrix}}{\Delta_{xy}} m_{1z} + \frac{\begin{vmatrix} m_{1x} & x - x_M \\ m_{1y} & y - y_M \end{vmatrix}}{\Delta_{xy}} m_{2z} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (z - z_M)\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} x - x_M & m_{2x} \\ y - y_M & m_{2y} \end{vmatrix} m_{1z} + \begin{vmatrix} m_{1x} & x - x_M \\ m_{1y} & y - y_M \end{vmatrix} m_{2z} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (z - z_M)\Delta_{xy} = \big((x - x_M)m_{2y} - (y - y_M)m_{2x}\big)m_{1z} +$$
$$+ \big(m_{1x}(y - y_M) - m_{1y}(x - x_M)\big)m_{2z} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (z - z_M)\Delta_{xy} = (x - x_M)m_{2y}m_{1z} - (y - y_M)m_{2x}m_{1z} +$$
$$+ m_{1x}(y - y_M)m_{2z} - m_{1y}(x - x_M)m_{2z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (z - z_M)\Delta_{xy} = (x - x_M)(m_{2y}m_{1z} - m_{1y}m_{2z}) - (y - y_M)(m_{2x}m_{1z} - m_{1x}m_{2z}) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x - x_M)(m_{1y}m_{2z} - m_{2y}m_{1z}) - (y - y_M)(m_{1x}m_{2z} - m_{2x}m_{1z}) + (z - z_M)\Delta_{xy} = 0,$$

або

$$(x - x_M)\begin{vmatrix} m_{1y} & m_{1z} \\ m_{2y} & m_{2z} \end{vmatrix} - (y - y_M)\begin{vmatrix} m_{1x} & m_{1z} \\ m_{2x} & m_{2z} \end{vmatrix} + (z - z_M)\begin{vmatrix} m_{1x} & m_{1y} \\ m_{2x} & m_{2y} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - x_M & y - y_M & z - z_M \\ m_{1x} & m_{1y} & m_{1z} \\ m_{2x} & m_{2y} & m_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Цей запис називають **рівнянням площини у вигляді визначника**.

Подання площині у вигляді визначника еквівалентно твердженню про компланарность векторів $\vec{r} - \vec{r}_M$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$. Отже, площину, що проходить через точку $M$ і має направляючі вектори $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$, можна уявити як рівність нулю змішаного добутку векторів $\vec{r} - \vec{r}_M$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{m}_1, \vec{m}_2) = 0.$$

## 8.3. Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай площині належать три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$(рисунок 8.1). Направляючими векторами будемо вважати вектори

$$\vec{m}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j} + (z_2 - z_1)\cdot \vec{k},$$

$$\vec{m}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (x_3 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_3 - y_1)\cdot \vec{j} + (z_3 - z_1)\cdot \vec{k}.$$

Визначником цієї системи буде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

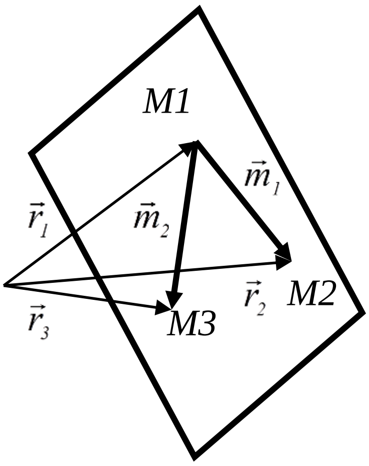



Рисунок. 8.1

Використовуючи властивість визначників, запишемо цей визначник у вигляді

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## 8.4. Рівняння площини у загальному вигляді

В евклідовому просторі, описуючи площину як рівність нулю змішаного добутку векторів $\vec{r} - \vec{r}_M$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{m}_1, \vec{m}_2) = 0,$$

можна ввести вектор $\vec{N}$, ортогональний до направляючих векторів $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$, тобто рівний векторному добутку $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$:

$$\vec{N} = \vec{m}_1 \times \vec{m}_2.$$

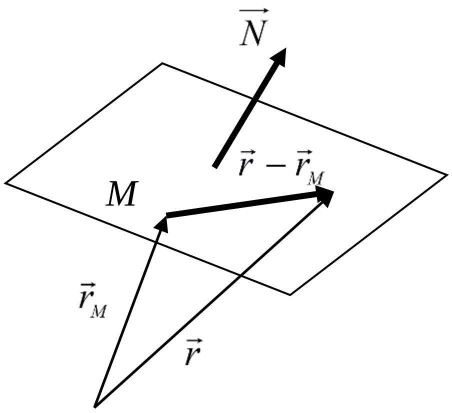



Рисунок. 8.2

Вектор $\vec{N}$ назвемо вектором нормалі або просто нормаллю площини. У цьому випадку умову

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \vec{m}_1, \vec{m}_2) = 0$$

можна розглядати як умову ортогональності довільного вектора $\vec{r} - \vec{r}_M$, що належить площині, до вектора нормалі $\vec{N}$, ортогонального цій площині (рисунок 8.2).

Отже,

$$(\vec{r} - \vec{r}_M, \overrightarrow{N}) = 0.$$

Нехай вектор $\vec{N}$ записаний через координати як $\vec{N}(A,B,C)$, а вектор $\vec{r}-\vec{r}_M$ - як $\vec{r}-\vec{r}_M=(x-x_M, y-y_M, z-z_M)$. Тоді умова ортогональності має вигляд

$$A(x-x_M)+B(y-y_M)+C(z-z_M)=0\,.$$

Цей вираз називається **рівнянням площини, що проходить через задану точку, в загальному виді**.

Розкривши дужки

$$Ax+By+Cz-Ax_M-By_M-Cz_M=0$$

і ввівши позначення

$$D=-Ax_M-By_M-Cz_M\,,$$

отримаємо рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0\,,$$

яке називається **рівнянням площини в загальному виді**.

*Зауваження 1*. Коефіцієнти $A$, $B$, $C$ в загальному рівнянні площини $Ax+By+Cz+D=0$ мають геометричний зміст координат вектора нормалі площини.

*Зауваження 2*. (Ознака тотожності площин). Якщо в двох рівняннях площин у загальному виді коефіцієнти $A$, $B$, $C$ і $D$ пропорційні, то вони описують одну й ту ж площину.

## 8.5. Нормальне рівняння площини

Нехай площина $\pi$, що проходить через точку $M(x_M, y_M, z_M)$ радіус вектор якої $\vec{r}_M$, має нормаль $\vec{N}(A,B,C)$. Тоді можна записати

$$(\vec{r}-\vec{r}_M, \vec{N})=0\,.$$

Візьмемо в якості вектора нормалі його орт (рисунок 8.3):

$$\vec{n}=\pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\,.$$

Знак вибираємо так, щоб орт нормалі мав напрямок від початку координат в сторону площини, тобто щоб виконувалася нерівність

$$(\vec{r}_M, \vec{n})>0\,.$$

Тоді рівняння площини через нормаль буде мати вигляд

$$(\vec{r}-\vec{r}_M, \vec{n})=0 \;\Rightarrow\; (\vec{r},\vec{n})-(\vec{r}_M,\vec{n})=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\vec{r},\vec{n})-p=0\,,$$

де $p$ - проекція вектора $\vec{r}_M$ на орт $\vec{n}$, яка дорівнює відстані від початку координат до площини.

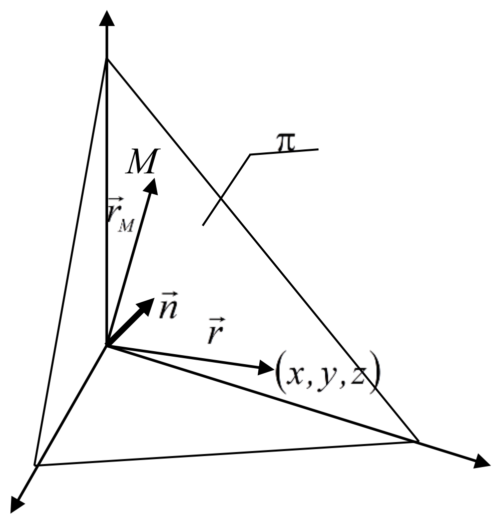


Рисунок. 8.3

Рівняння виду

$$(\vec{r},\vec{n}) - p = 0$$

називають **нормальним рівнянням прямої лінії у векторній формі**.

Запишемо вектори через їх координати:

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k};$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{j} + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{k} =$$

$$= cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{i}}\right)\cdot\vec{i} + cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right)\cdot\vec{j} + cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)\cdot\vec{k}.$$

Тут $cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{i}}\right) = cos\,\alpha$, $cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right) = cos\,\beta$, $cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right) = cos\,\gamma$ - називають **направляючими косинусами** орта $\vec{n}$. Отже,

$$\vec{n} = \vec{i}\,cos\,\alpha + \vec{j}\,cos\,\beta + \vec{k}\,cos\,\gamma.$$

Тоді $(\vec{r},\vec{n}) - p = 0 \;\Rightarrow\; x\,cos\,\alpha + y\,cos\,\beta + z\,cos\,\gamma - p = 0$.

Це рівняння називають **нормальним рівнянням площини в аналітичному вигляді.**

## 8.6. Перетворення рівняння площини в загальному вигляді в нормальне рівняння

Нехай задано загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Поділимо його на величину $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, отримаємо

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

В цьому випадку:

а якщо $D>0$, то $p = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

б) якщо $D<0$, то $p = +\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

При цьому

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = cos\,\alpha,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = cos\,\beta,\quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = cos\,\gamma.$$

Отже, ми одержали:

$$x\,cos\,\alpha + y\,cos\,\beta + z\,cos\,\gamma - p = 0.$$

*Висновок*. Для перетворення рівняння площини у загальному вигляді в рівняння площини в нормальній формі необхідно задане рівняння в загальному вигляді помножити на коефіцієнт

$$\mu = -\frac{sign(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В цьому випадку

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p.$$

## 8.7. Взаємне розташування площин

Розрізняють паралельні площині, перпендикулярні площині і площині, що перетинаються під певним кутом.

**Def. Кут між площинами - це кут між нормалями цих площин.**

Нехай задані площини $\pi_1$ і $\pi_2$, через рівняння в загальному вигляді:

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

В цьому випадку коефіцієнти при змінних $x$, $y$ і $z$ являють собою координати нормалей площин:

$$\pi_1: \quad \vec{N}_1(A_1, B_1, C_1);$$

$$\pi_2: \quad \vec{N}_2(A_2, B_2, C_2).$$

Кут між площинами визначається як кут між нормалями площин:

$$\cos\left(\pi_1 \hat{,} \pi_2\right) = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}.$$

Звідси випливає:

а) якщо площині паралельні $\left(\vec{N}_1 \| \vec{N}_2\right)$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$;

б) якщо площині перпендикулярні $\left(\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2\right)$, то

$$\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2\right) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

## 8.8. Взаємне розташування площини і прямої лінії

Розрізняють прямі лінії, паралельні площині, прямі лінії, перпендикулярні площині, і прямі лінії, які перетинають площину під певним кутом.

Зі шкільного курсу геометрії відомо, що кут між прямою і площиною - це кут між прямою і її проекцією на площину. В аналітичній геометрії є відмінність у визначенні кута між прямою і площиною щодо геометрії.

**Def. Кут між прямою і площиною - це кут між нормаллю площини і направляючим вектором прямої.**

Нехай задано площину $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ з вектором нормалі $\vec{N}(A,B,C)$ і пряма лінія в канонічній формі $l: \ \dfrac{x - x_M}{\tau_x} = \dfrac{y - y_M}{\tau_y} = \dfrac{z - z_M}{\tau_z}$ з направляючим вектором $\vec{\tau}(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$, яка перетинає площину під кутом $\alpha$ (Рисунок 8.4).

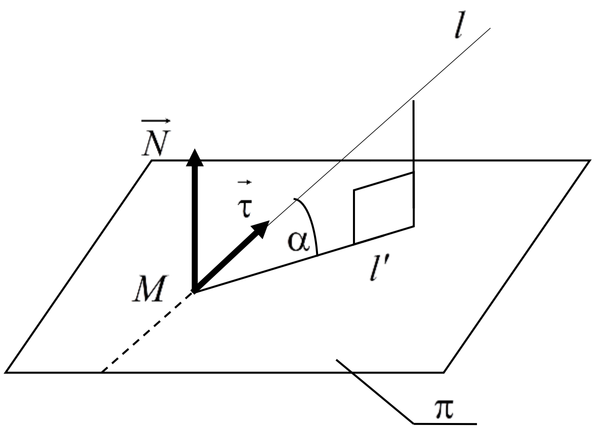



Рисунок. 8.4

Нехай $l'$ - проекція прямої лінії $l$ на площину $\pi$, $\pi$ - кут між прямою лінією і площиною.

В цьому разі

$$cos\left(\vec{N} \hat{,} \vec{\tau}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\,\alpha .$$

Отже, кут між прямою лінією і площиною визначається виразом

$$sin\,\alpha = \frac{\left(\vec{N}, \vec{\tau}\right)}{\left|\vec{N}\right| \cdot \left|\vec{\tau}\right|}.$$

Якщо пряма лінія і площина паралельні, то $\vec{N} \perp \vec{\tau}$ і

$$\left(\vec{N} \cdot \vec{\tau}\right) = A\tau_x + B\tau_y + C\tau_z = 0 .$$

Якщо пряма лінія і площина перпендикулярні, то $\vec{N} \| \vec{\tau}$ і

$$\frac{A}{\tau_x} = \frac{B}{\tau_y} = \frac{C}{\tau_z} .$$

## 8.9. Поняття напівпростору

Розглянемо лінійну функцію від координат точки $(x,y,z)$

$$f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D .$$

**Def. Множина точок, для яких**

$$f(\vec{r}) = Ax + By + Cz + D = 0 \,\textbf{,}$$

**утворює площину.**

**Def. Множина точок, для яких**

$$f(\vec{r}) = Ax + By + Cz + D > 0 \ \textbf{або} \ f(\vec{r}) = Ax + By + Cz + D < 0\textbf{,}$$

**називається напівпростором.**

*Теорема*. Якщо дві точки належать одному напівпростору, то цьому напівпростору належать і всі точки відрізка який з'єднує їх.

## 8.10. Взаємне розташування точки і площини

Нехай задано площину і орт її нормалі $l$ (рисунок 8.5), направлений від початку системи координат в сторону площини. Скалярний добуток орта $\vec{n}$ і радіуса-вектора $\vec{r}_M$ будь якої точки $M$

$$\left(\vec{n}, \vec{r}_M\right)$$

є проекція цього вектора на напрямок орта $\vec{n}$.

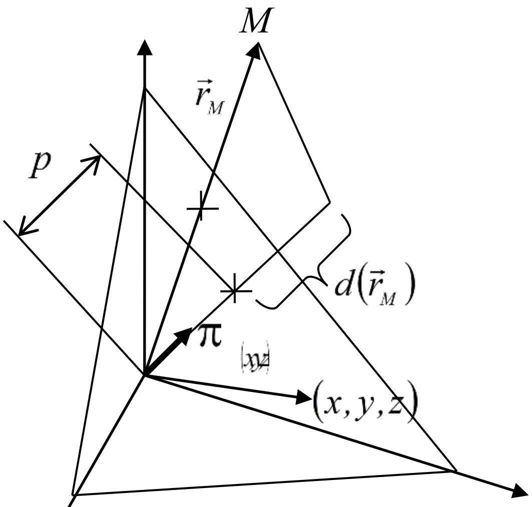
Якщо точка з радіусом-вектором $\vec{r}$ належить площині, то скалярний добуток орта і радіуса-вектора $\vec{r}$ - це відстань від початку координат до площини:

$$\left(\vec{n}, \vec{r}\right) = p.$$

**Def. різниця**

$$\left(\vec{n}, \vec{r}_M\right) - p = d\left(\vec{r}_M\right),$$

**де $\vec{r}_M$ - радіус-вектор любої точки $M$, що не належить площині, а $p$ - відстань від центру системи координат до площини, називається відхиленням точки $M$ від площини.**



Мал. 8.5

Можливі такі випадки:

а) якщо відхилення від'ємне $\left(d\left(\vec{r}_M\right) < 0\right)$, то точка $M$ і початок координат знаходяться в одному напівпросторі;

б) якщо відхилення додатне $\left(d\left(\vec{r}_M\right) > 0\right)$, то точка $M$ і початок координат знаходяться в різних напівпросторах.

**Def. Відстанню від точки $M$ з радіусом-вектором $\vec{r}_M$ до площини π називають абсолютну величину відхилення цієї точки від площини:**

$$\rho(M, \pi) = \left|d\left(\vec{r}_M\right)\right| = \left|\left(\vec{n}, \vec{r}_M\right) - p\right|.$$

*Висновок*. Щоб визначити відстань від точки $M$ до площини, заданої рівнянням в загальному вигляді $Ax + By + Cz + D = 0$, необхідно:

а) привести загальне рівняння до нормального вигляду:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0;$$

б) підставити замість $x$, $y$ і $z$ координати точки $M$, Тоді модуль отриманого значення дорівнює шуканій відстані:

$$\rho(M, \pi) = \left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x_M + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y_M + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z_M + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

## 8.11. Висновки

***Def. Площиною, яка проходить через точку*** $M$ ***і має направляючі вектори*** $\vec{m}_1$ ***і*** $\vec{m}_2$***, називають множину точок, для кожної з яких вектор*** $\vec{r}-\vec{r}_M$ ***є лінійною комбінацією векторів*** $\vec{m}_1$ ***і*** $\vec{m}_2$***:***

$$\vec{r}-\vec{r}_M=t\cdot\vec{m}_1+s\cdot\vec{m}_2.$$

*Існує кілька видів опису площині:*

***1. Векторно-параметричний:*** $\vec{r}=\vec{r}_M+t\cdot\vec{m}_1+s\cdot\vec{m}_2$.

***2. Параметричний:***

$$\begin{cases} x_1=x_{M1}+t\cdot m_{11}+s\cdot m_{21}, \\ x_2=x_{M2}+t\cdot m_{12}+s\cdot m_{22}, \\ \qquad\qquad\dots \\ x_n=x_{Mn}+t\cdot m_{1n}+s\cdot m_{2n}. \end{cases}$$

*Скорочено цю систему можна записати у вигляді*

$$x_i=x_{Mi}+t\cdot m_{1i}+s\cdot m_{2i},$$

*де* $i=1,\dots,n$.

*3. Рівняння площини* ***у вигляді визначника*** *( в тривимірному просторі):*

$$\begin{vmatrix} x-x_M & y-y_M & z-z_M \\ m_{1x} & m_{1y} & m_{1z} \\ m_{2x} & m_{2y} & m_{2z} \end{vmatrix}=0$$

*Подання площині у вигляді визначника еквівалентно твердженню про компланарность векторів* $\vec{r}-\vec{r}_M$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$. *Це можна записати як рівність нулю змішаного добутку векторів* $\vec{r}-\vec{r}_M$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$*:*

$$(\vec{r}-\vec{r}_M,\vec{m}_1,\vec{m}_2)=0.$$

*При цьому якщо* $\vec{N}=\vec{m}_1\times\vec{m}_2$, *то* $(\vec{r}-\vec{r}_M,\vec{N})=0$.

*Рівняння площини, що проходить через три точки, має вигляд*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

*або*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

*Рівність*

$$A(x-x_M)+B(y-y_M)+C(z-z_M)=0$$

*називається* ***рівнянням площини, що проходить через задану точку, в загальному вигляді.***

*Рівність*

$$Ax + By + Cy + D = 0$$

*називається* ***рівнянням площини в загальному виді.***

*Коефіцієнти* $A$, $B$, $C$ *в загальному рівнянні площини мають геометричний зміст координат вектора нормалі площини.*

*Ознака тотожності площин: якщо в двох рівняннях площин в загальному вигляді коефіцієнти* $A$, $B$, $C$ *і* $D$ *пропорційні, то вони описують одну й ту ж площину.*

*Рівняння виду*

$$(\vec{r}, \vec{n}) - p = 0$$

*називають* ***нормальним рівнянням прямої лінії у векторній формі.*** *Тут* $p$ – *відстань від початку координат до площини,*

$$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma .$$

*Рівняння виду*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

*називають* ***нормальним рівнянням площини в аналітичному вигляді.***

*Тут* $\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{i}}\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{j}}\right) = \cos\beta$, $\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right) = \cos\gamma$ - ***направляючі косинуси*** *орта* $\vec{n}$.

*При цьому* ***направляючі косинуси*** *дорівнюють:*

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos\beta, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos\gamma .$$

*Для перетворення рівняння площини в загальному вигляді в рівняння площини в нормальній формі необхідно задане рівняння в загальному вигляді помножити на коефіцієнт*

$$\mu = -\frac{sign(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

*В цьому випадку*

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma, \quad \mu D = -p .$$

***Def. Кут між площинами - це кут між нормалями цих площин.***

*Кут між заданими площинами* $\pi_1$ *і* $\pi_2$, *рівняння яких приведені в загальному вигляді:*

$$\pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 ; \qquad \pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

*де* $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$, *визначається формулою*

$$\cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} .$$

*Звідси випливає:*

*а) якщо площині паралельні* $\left(\vec{N}_1 \| \vec{N}_2\right)$, *то* $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$*;*

*б) якщо площині перпендикулярні* $\left(\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2\right)$, *то* $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

***Def. Кут між прямою і площиною - це кут між нормаллю площини і направляючим вектором прямої.***

*Кут між заданими площиною* $Ax+By+Cz+D=0$ *і прямою лінією* $\frac{x-x_M}{\tau_x}=\frac{y-y_M}{\tau_y}=\frac{z-z_M}{\tau_z}$ *визначається формулою*

$$\sin\alpha=\frac{\left(\vec{N},\vec{\tau}\right)}{\left|\vec{N}\right|\cdot\left|\vec{\tau}\right|}.$$

*Якщо пряма лінія і площина паралельні, то*

$$\left(\vec{N}\cdot\vec{\tau}\right)=A\tau_x+B\tau_y+C\tau_z=0;$$

*якщо пряма лінія і площина перпендикулярні, то*

$$\frac{A}{\tau_x}=\frac{B}{\tau_y}=\frac{C}{\tau_z}.$$

***Def. Множина точок, для яких***

$$f(\vec{r})=Ax+By+Cz+D=0,$$

***утворює площину.***

***Def. Множина точок, для яких***

$$f(\vec{r})=Ax+By+Cz+D>0 \ \textbf{або}\ f(\vec{r})=Ax+By+Cz+D<0,$$

***називається напівпростором.***

*Теорема. Якщо дві точки належать одному півпросторі, то цьому напівпростору належать і всі точки відрізка який з'єднує їх.*

***Def. Різниця виду***

$$\left(\vec{n},\vec{r}_M\right)-p=d\left(\vec{r}_M\right),$$

***називається відхиленням точки*** $M$ ***від площини.***

*В цьому записі* $\vec{r}_M$ *- радіус-вектор будь якій точки* $M$, *яка не належить площині, а* $p$ *- відстань від центру системи координат до площини,*

*Можливі такі випадки:*

*а) якщо відхилення від'ємне* $\left(d\left(\vec{r}_M\right)<0\right)$, *то точка* $M$ *і початок координат знаходяться в одному напівпросторі;*

*б) якщо відхилення додатне* $\left(d\left(\vec{r}_M\right)>0\right)$, *то точка* $M$ *і початок координат знаходяться в різних напівпросторах.*

***Def. Відстанню від точки*** $M$ ***з радіусом-вектором*** $\vec{r}_M$ ***до площини*** $\pi$ ***називають абсолютну величину відхилення цієї точки від площини:***

$$\rho(M,\pi)=\left|d\left(\vec{r}_M\right)\right|=\left|\left(\vec{n},\vec{r}_M\right)-p\right|.$$

***Відстань від точки*** $M$ ***до площини, заданої рівнянням в загальному вигляді*** $Ax+By+Cz+D=0$***, визначається формулою***

$$\rho(M,\pi)=\left|\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left(Ax_M+By_M+Cz_M+D\right)\right|.$$

## 8.12. Питання для перевірки

**1. Площину можна задати у векторній формі:**

а) вектором нормалі і точкою площині; б) двома направляючими векторами і точкою площини; в) трьома точками площини.

**2. Рівняння площини у векторній формі:**

а) $\vec{r}=\vec{r}_A+t\cdot\vec{m}_1+s\cdot\vec{m}_2$; б) $(\vec{n}\cdot\vec{r})-p=0$; в) $Ax+By+Cz+D=0$.

**3. Рівняння площини в векторно-параметричній формі:**

а) $x_i=x_{Ai}+t\cdot m_{1i}+s\cdot m_{2i}$; б) $\frac{x-x_A}{m_x}=\frac{y-y_A}{m_y}=\frac{z-z_A}{m_z}$; в) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

**4. Рівняння площини у відрізках:**

а) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$; б) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; в) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$.

**5. Коефіцієнти рівняння площини у відрізках з точністю до знака дорівнюють:**

а) координатам вектора нормалі площини; б) координатам направляючих векторів площини; в) відрізкам, що відсікає площина на осях координат.

**6. Коефіцієнти при *x, y* і *z* в рівнянні площини в загальному вигляді - це:**

а) координати вектора нормалі площини; б) координати направляючих векторів площини; в) відрізки, що відсікаються площиною на осях координат.

**7. Рівняння площини, що проходить через задану точку, в загальному вигляді:**

а) $\frac{x-x_A}{m_x}=\frac{y-y_A}{m_y}=\frac{z-z_A}{m_z}$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)+C(z-z_A)=0$;

в) $(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**8. Величина *p* в нормальному рівнянні площини - це:**

а) тангенс кута нахилу нормалі площини до горизонтальної площини;
б) зміщення площини уздовж нормалі; в) відстань від центру системи координат до площини.

**9. Нормальне рівняння площини у векторній формі:**

а) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)+C(z-z_A)=0$; в) $(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**10. Нормальне рівняння площини в аналітичній формі:**

а) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$; б) $A(x-x_A)+B(y-y_A)+C(z-z_A)=0$; в) $(\vec{r},\vec{n})-p=0$.

**11. Для перетворення рівняння площини в загальному виді в нормальне рівняння необхідно всі складові заданого рівняння помножити на коефіцієнт:**

а) $M = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; б) $M = -\dfrac{sign(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; в) $M = \dfrac{sign(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

**12. Кут між двома площинами, заданими рівняннями в загальному виді, - це кут між:**

а) направляючими векторами цих площин; б) двома відрізками цих площин; в) нормалями цих площин.

**13. Якщо площини, представлені рівняннями в загальному виді, паралельні, то:**

а) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$; б) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; в) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

**14. Якщо площині, представлені рівняннями в загальному виді, ортогональні, то:**

а) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$; б) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; в) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

**15. Якщо в нормальному рівнянні площини замість *x, y* і *z* підставити координати довільної точки, то отримане значення по модулю дорівнює:**

а) відстані від точки до площини; б) відстані від точки до початку системи координат; в) відстані від площини до початку системи координат.

## 8.13. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Написати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, якщо: а) $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(2,\ 1,\ 1)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$; б) $M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(0, -1,\ 2)$, $M_3(2,\ 3, -1)$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2, -1,\ 3)$ і $M_2(3,\ 1,\ 2)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3, -1,\ 4)$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(3, -1,\ 2)$, $M_2(4, -1, -1)$, $M_3(2,\ 0,\ 2)$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

5. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -1,\ 1)$ перпендикулярно двом площинам $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-5,\ 2, -1)$ паралельно площині $Oyz$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2, -1,\ 1)$ і $M_2(3,\ 1,\ 2)$ паралельно осі $Oy$.

9. Привести рівняння площини $4x - 6y - 12z - 11 = 0$ до нормального виду.

10. Визначити кути, між нормаллю площини і осями координат, та відстань від початку координат до площини $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$.

11. Визначити відстань від площини $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ до початку координат.

## 8.14. Самостійна робота

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, 1, -1)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (1, -2, 3)$.

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n} = (5, 0, -3)$.

3. Точка $P = (2, -1, -1)$ служить основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

4. Задано точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3, 4, -5)$ паралельно векторам $\vec{a}_1 = (3, 1, -1)$ і $\vec{a}_2 = (1, -2, 1)$.

6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2, -3, 3)$ паралельно площині $Oxy$.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7, 2, -3)$ і $M_2(5, 6, -4)$ паралельно осі $Ox$.

8. Привести рівняння площини $2x - 2y + z - 18 = 0$ до нормального вигляду.

9. Обчислити кути між нормаллю площини і осями координат, і визначити відстань від початку координат до площини $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$.

10. Визначити направляючі косинуси прямої, перпендикулярної до площини $2x - y + 2z + 9 = 0$.

11. Визначии координати спільної точки трьох площин: $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$.

12. Знайти точки перетину площини $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ з координатними осями.

13. Площина задана рівнянням $x + 2y - 3z - 6 = 0$. Написати для неї рівняння площини у відрізках.

14. Знайти відрізки, що відсікаються площиною $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ на координатних осях.

15. Обчислити площу трикутника, який відсікається площиною $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ на площині проекцій $Oxy$.

16. Обчислити об’єм піраміди, обмеженою площиною $2x-3y+6z-12=0$ і координатними площинами.

17. Площина проходить через точку $M(6,-10,\ 1)$ і відсікає на осі абсцис відрізок $a=-3$, А на осі аплікат відрізок $c=2$. Скласти для цієї площини рівняння у відрізках.

18. Скласти рівняння площини, паралельної вектору $\vec{l}=(2,\ 1,-1)$ яка відсікає на координатних осях $Ox$ і $Oy$ відрізки $a=2$, $b=-2$.

19. Скласти рівняння площини, перпендикулярної площині $2x-2y+4z-5=0$ і яка відсікає на координатних осях відрізки $a=-2,\ b=\dfrac{2}{3}$.

20. Обчислити відстань від точки $P=(-1,\ 1,-2)$ до площини, що проходить через точки $M_1(1,-1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 1,\ 3)$ і $M_3(3,-5,-2)$.

21. Через точку $P=(7,-5,\ 1)$ провести площину, яка відсікає на осях координат позитивні і рівні між собою відрізки.

*Перетворення системи координат. Паралельне переміщення. Обертальний рух. Полярні координати. Зв'язок між полярною і декартовою системами координат. Криві другого порядку. Конічні перерізи. Рівняння конічного перерізу в полярній системі координат. Аналіз конічних перерізів*

# 9. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ТА КРИВІ 2-ГО ПОРЯДКУ

## 9.1. Перетворення системи координат

Рішення задач часто значно спрощується завдяки вибору зручного розташування системи координат. В цьому випадку для вирішення завдання, заданої в одній системі координат, задають іншу, більш зручну систему координат і розглядають задачу щодо вже нової системи координат. Для цього вводять поняття старої системи координат і нової системи координат. При цьому розрізняють два види перетворення систем координат:

- паралельне перенесення;
- обертання.

### *9.1.1. Паралельне перенесення*

Нехай задані стара система координат з базисом $\{\vec{i}\,',\vec{j}\,'\}$ і точка $M$ в цьому базисі, радіус-вектор якої $\vec{r}$. Задамо нову систему координат з базисом $\{\vec{i},\vec{j}\}$ так, щоб базисні вектори були паралельними: $\vec{i}\parallel\vec{i}\,'$, $\vec{j}\parallel\vec{j}\,'$.

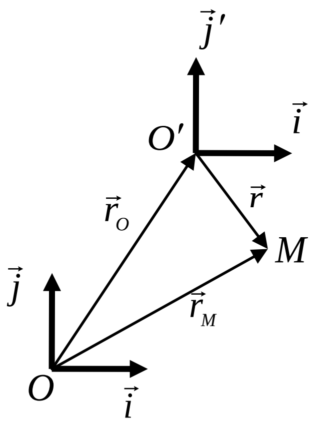



Рисунок. 9.1

Радіус-вектором центру старої системи координат щодо нової системи є $\vec{r}_O$, а радіус-вектором точки $M$ в новій системі координат – $\vec{r}_M$ (рисунок 9.1). Щодо радіус-векторів в новій системі координат можна записати

$$\vec{r}_O = x_O\cdot\vec{i} + y_O\cdot\vec{j},$$

$$\vec{r}_M = x_M\cdot\vec{i} + y_M\cdot\vec{j}.$$

Отже,

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_O = (x_M - x_O)\cdot\vec{i} + (y_M - y_O)\cdot\vec{j}.$$

Координати точки $M$ у старому базисі:

$$x'_M = (\vec{r},\vec{i}\,') = (x_M - x_O)(\vec{i},\vec{i}\,') + (y_M - y_O)(\vec{j},\vec{i}\,') = x_M - x_O;$$

$$y'_M = (\vec{r},\vec{j}\,') = (x_M - x_O)(\vec{i},\vec{j}\,') + (y_M - y_O)(\vec{j},\vec{j}\,') = y_M - y_O.$$

Отже, координати точки у новій системі мають вигляд

$$x_M = x'_M + x_O;$$

$$y_M = y'_M + y_O,$$

де $(x'_M, y'_M)$ - координати точки в старій системі; $(x_O, y_O)$ - координати центру старої системи координат в новій системі координат.

*9.1.2. Обертання*

Нехай стара система координат $x'O'y'$ розташована наклонно, а нова система $xOy$ (рисунок 9.2) отримана поворотом старої системи координат на кут $\varphi$. Точка $M$ характеризується вектором $\vec{r}(x,y)$, а кут між $\vec{r}$ і віссю $Ox'$ дорівнює $\theta$. Тоді можна записати координати точки $M$ у новій системі координат:

$$x_M = r\,cos(\theta+\varphi) = r\,cos\,\theta\,cos\,\varphi - r\,sin\,\theta\,sin\,\varphi,$$
$$y_M = r\,sin(\theta+\varphi) = r\,sin\,\theta\,cos\,\varphi + r\,cos\,\theta\,sin\,\varphi.$$

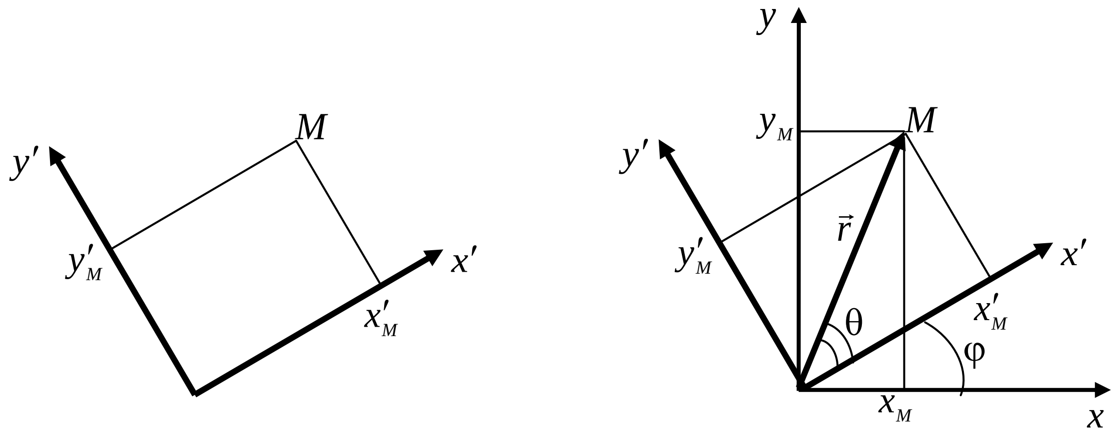



Рисунок. 9.2

Оскільки в даному випадку

$$r\,cos\,\theta = x'_M$$
$$r\,sin\,\theta = y'_M,$$

маємо

$$x_M = x'_M\,cos\,\varphi - y'_M\,sin\,\varphi,$$
$$y_M = x'_M\,sin\,\varphi + y'_M\,cos\,\varphi.$$

Для загального випадку, коли застосовуються і паралельне переміщення, і обертання, формули перетворення координат при переході від однієї системи до іншої мають вигляд

$$x_M = x'_M\,cos\,\varphi - y'_M\,sin\,\varphi + a,$$
$$y_M = x'_M\,sin\,\varphi + y'_M\,cos\,\varphi + b.$$

Кажуть, що вибір системи координат визначається вибором координат центру системи координат та кутом повороту системи координат.

### *9.1.3. Полярні координати*

Задамо наступні елементи (рисунок 9.3): довільну точку $O$; промінь $g$, що виходить з точки $O$; напрям відліку кутів $\varphi$ навколо точки $O$.

У конструкції, побудованої з таких елементів, кожній точці $M$ площини ставиться у відповідність два числа: $\rho$ - відстань від точки $O$ до точки $M$; $\varphi$ - кут, утворений відрізком $OM$ і променем $g$ (рисунок 9.4).

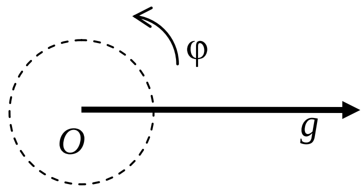



Рисунок. 9.3

В цьому випадку називають:

- $\rho,\varphi$ - полярні координати точки;
- точка $O$ - полюс;
- $g$ - полярна вісь.

Якщо рівняння кривої лінії задано в полярній системі координат, тобто $f(\rho,\varphi)=0$, то кажуть, що задано рівняння кривої у полярних координатах.

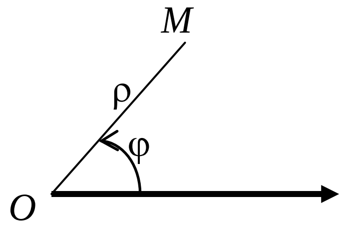



Рисунок. 9.4

ПРИКЛАД:

1. Рівняння кола, центр якого розташований в полюсі. Для будь-якої точки кола (рисунок 9.5) виконується умова

$$\rho=R,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Це і є рівняння кола у полярній системі координат.

2. Коло, центр якого розташований на полярній осі на відстані одного радіуса від полюса (рисунок 9.6). В цьому випадку $\angle OMA=\dfrac{\pi}{2}$, тоді

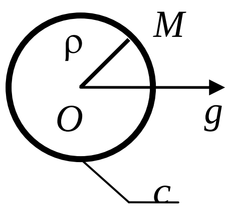



Рисунок. 9.5

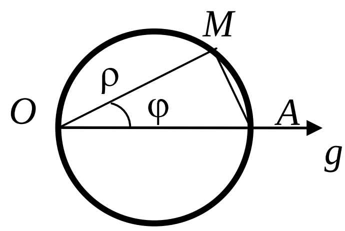



Рисунок. 9.6

$$OA\cos\varphi=OM \Rightarrow 2R\cos\varphi=\rho.$$

Отже, рівняння кола у полярній системі координат в цьому випадку має вигляд

$$2R\cos\varphi=\rho\text{, де } -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

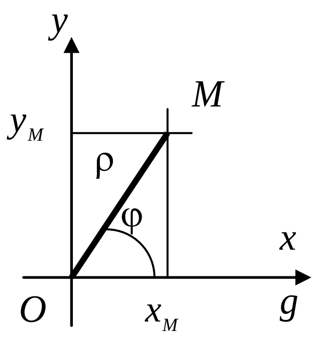



Рисунок. 9.7

### *9.1.4. Зв'язок між полярною і декартовою системами координат*

Для того щоб показати зв'язок між полярною і декартовою системами координат, сумістим ці системи (рисунок 9.7). Тоді очевидно, що перехід від полярної системи координат до декартової системи координат наступний:

$$x = \rho \cos\varphi,$$
$$y = \rho \sin\varphi.$$

І навпаки, перехід від декартових координат до полярних:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Зауваження*. Для визначення кута, зокрема для аналізу, в якій чверті знаходиться кут, можуть бути використані наступні залежності

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

ПРИКЛАД. Записати загальне рівняння прямої на площині у полярній системі координат.

*Рішення*

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд $Ax + By + C = 0$.

Підставами у це рівняння $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ і розділимо його на $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\rho\cos\varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\rho\sin\varphi + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Для одержаного виразу введемо позначення:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha,\ \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha,\ \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -p.$$

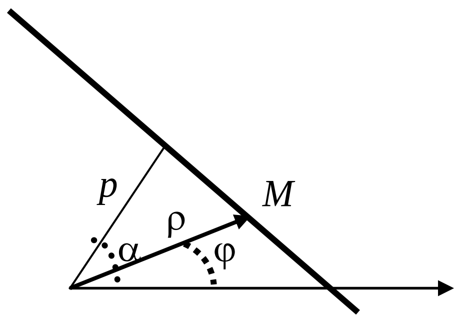



Рисунок. 9.8

Запишемо рівняння прямої на площині:

$$\cos\alpha\rho\cos\varphi + \sin\alpha\rho\sin\varphi - p = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) - p = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho\cos(\alpha - \varphi) - p = 0.$$

Таким чином, отримаємо загальне рівняння прямої на площині у полярній системі координат (рисунок. 9.8):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

## 9.2. Криві 2-го порядку

### *9.2.1. Конічні перерізи*

**Def. Конічним перерізом називається крива, по якій перерізає круговий конус довільна площина, що не проходить через його вершину** (рисунок 9.9).

**Твердження**(Про конічні перерізи). Кожний конічний переріз, крім кола, являє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від деякої точки $F$, Що називається фокусом, і деякої прямої $\delta$, що називається директрисою є постійною (рисунок 9.10):

$$\frac{d_{MF}}{d_{M\delta}} = \lambda .$$

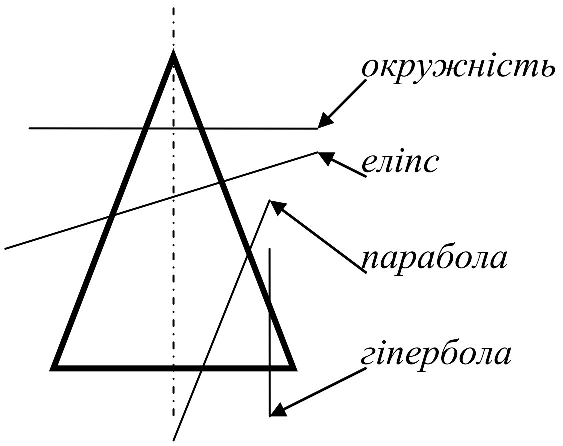



Рисунок. 9.9

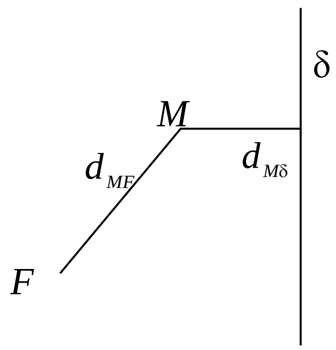



Рисунок. 9.10

### *9.2.2. Рівняння конічного перерізу у полярній системі координат*

Сумістимо полюс полярної системи координат із фокусом, а полярну вісь направимо перпендикулярно до директриси конічного перерізу (рисунок 9.11).

Нехай $d_{FM} = \rho$, $\angle MFg = \varphi$, $d_{F\delta} = p$, $d_{M\delta} = p - \rho\cos\varphi$. Тоді $\dfrac{d_{MF}}{d_{M\delta}} = \lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{p - \rho\cos\varphi} = \lambda \Rightarrow \rho = \lambda p - \lambda\rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(1 + \lambda\cos\varphi) = \lambda p .$$

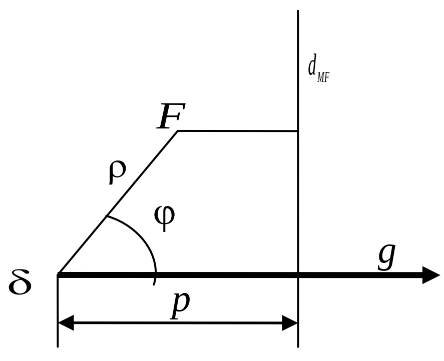



Рисунок. 9.11

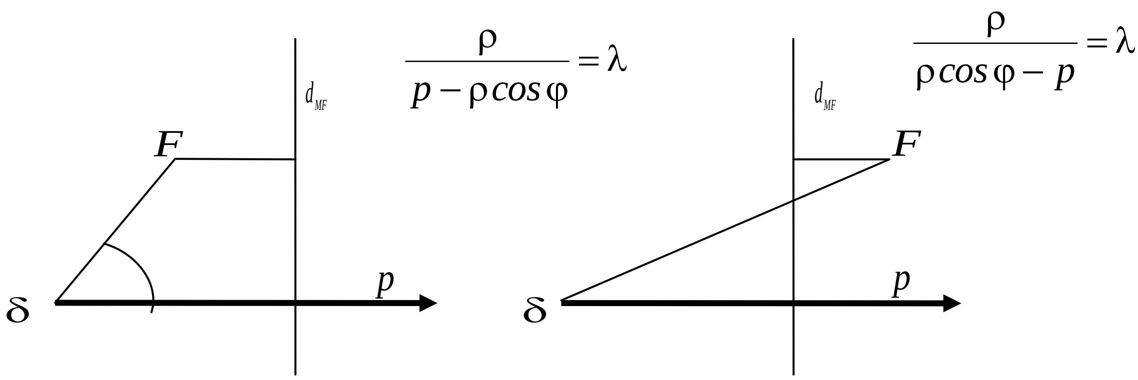
Звідси отримуємо

$$\rho = \frac{\lambda p}{1 + \lambda \cos\varphi}.$$

Це і є рівняння конічного перерізу в полярній системі координат.

*Зауваження*. Оскільки можливі різні випадки розташування фокуса і директриси щодо точки (рисунок. 9.12), наведемо рівняння конічного перерізу у загальному вигляді:

$$\rho = \frac{\pm \lambda p}{1 \pm \lambda \cos\varphi}.$$




Римунок. 9.12

### *9.2.3. Аналіз конічних перерізів*

Рівняння конічного перерізу

$$\rho = \frac{\lambda p}{1 + \lambda \cos\varphi}$$

запишемо в декартовій системі координат. Для цього спочатку проведемо перетворення:

$$\rho(1 + \lambda\cos\varphi) = \lambda p \Rightarrow \rho = \lambda p - \lambda\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = \lambda(p - \rho\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = \lambda^2(p - \rho\cos\varphi)^2.$$

Підставимо $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho\cos\varphi = x$:

$$x^2 + y^2 = \lambda^2(p - x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \lambda^2\left(p^2 - 2px + x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - \lambda^2 x^2 + 2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2.$$

Таким чином, отримаємо рівняння конічного перерізу в декартовій системі координат:

$$x^2\left(1 - \lambda^2\right) + 2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2.$$

Виконаємо перетворення цього рівняння в декартовій системі координат:

$$\left(1 - \lambda^2\right)\left(x^2 + 2\frac{p\lambda^2}{1 - \lambda^2}x + \frac{p^2\lambda^4}{\left(1 - \lambda^2\right)^2}\right) + y^2 = \lambda^2 p^2 + \frac{p^2\lambda^4}{1 - \lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda^2)\left(x+\frac{p\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2}.$$

Введемо нові координати:

$$x' = x + \frac{p\lambda^2}{1-\lambda^2},\ y' = y.$$

У новій системі координат, отриманої паралельним перенесенням, рівняння набуває вигляду

$$(1-\lambda^2)x'^2 + y'^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2} \Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{\lambda^2 p^2}{(1-\lambda^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2}} = 1.$$

Введемо позначення:

$$\frac{\lambda^2 p^2}{(1-\lambda^2)^2} = a^2,\ \frac{\lambda^2 p^2}{|1-\lambda^2|} = b^2.$$

Розглянемо три випадки:

1. Якщо $1-\lambda^2 > 0$, то $\lambda < 1$, Значить, $\frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2} = b^2$. Отримуємо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

2. Якщо $1-\lambda^2 < 0$, то $\lambda > 1$, Значить, $\frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2} = -b^2$. Отримуємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

3. Випадок, коли $\lambda = 1$. Запишемо рівняння у вигляді

$$x^2(1-\lambda^2) + 2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2 \Rightarrow 2px + y^2 = p^2 \Rightarrow 2px + y^2 - p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 2p\left(-x + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Перейдемо до нової системи координат:

$$x' = -x + \frac{p}{2},\ y' = y.$$

У новій системі координат отримуємо канонічне рівняння параболи

$$y'^2 - 2px' = 0.$$

*Висновки*. Рівняння конічного перерізу в декартовій системі координат

$$x^2(1-\lambda^2) + 2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2$$

може описувати:

а) якщо $\lambda < 1$ - **еліпс**:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;$$

б) якщо $\lambda = 1$ **- параболу**:

$$y'^2 - 2px' = 0;$$

в) якщо $\lambda > 1$ **- гіперболу**:

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Крім того, для конічних перерізів можливі й інші випадки: коло, пряма, точка.

## 9.3. Висновки

*Розрізняють два види перетворення системи координат:*

*- паралельне перенесення;*

*- обертання.*

*Нехай задані стара система координат з базисом $\{\vec{i}\,', \vec{j}\,'\}$ і точка $M$ в цьому базисі. Задана нова система координат з базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, вектори якого паралельні векторам старого базису: $\vec{i}\parallel\vec{i}\,'$, $\vec{j}\parallel\vec{j}\,'$.*

*Координати точки в новій системі координат мають вигляд*

$$x_M = x'_M + x_O;$$
$$y_M = y'_M + y_O,$$

*де $(x'_M, y'_M)$ - координати точки в старій системі, $(x_O, y_O)$ - координати центру старої системи координат в новій системі координат.*

*Нехай стара система координат $x'O'y'$ розташована похило. Нова система $xOy$ отримана поворотом старої системи координат на кут $\varphi$.*

*Координати точки в новій системі координат:*

$$x_M = x'_M \cos\varphi - y'_M \sin\varphi;$$
$$y_M = x'_M \sin\varphi + y'_M \cos\varphi.$$

*Кажуть, що вибір системи координат визначається вибором координат центру системи координат і кута повороту системи координат.*

*Полярна система координат являє собою конструкцію, що складається з наступних елементів:*

*- довільна точка $O$, звана полюсом;*

*- промінь $g$, що виходить з точки $O$, званий полярною віссю;*

*- напрямок відліку кута $\varphi$ навколо точки $O$.*

*В полярній системі координат кожній точці $M$ ставиться у відповідність два числа: $\rho$ - відстань від точки $O$ до точки $M$; $\varphi$ - кут, утворений відрізком $OM$ і променем $g$.*

*В цьому випадку $\rho$ і $\varphi$ називають полярними координатами точки.*

*Якщо рівняння кривої лінії задано в полярних координатах, тобто* $f(\rho,\varphi)=0$*, то говорять, що задано рівняння кривої в полярних координатах.*

*1. Рівняння кола в полярній системі координат, центр якого розташований в полюсі, має вигляд*

$$\rho=R,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

*2. Рівняння кола, центр якого розташований на полярній осі на відстані одного радіуса від полюса, має вигляд*

$$2R\cos\varphi=\rho,\ \text{де}\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

*Перехід від полярної системи координат до декартової системі координат:*

$$x=\rho\cos\varphi;$$

$$y=\rho\sin\varphi.$$

*Перехід від декартових координат до полярних:*

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{і}\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

*Зауваження. Для визначення кута, зокрема для аналізу, в якій чверті знаходиться кут, можуть бути використані залежно*

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ tg\varphi=\frac{y}{x}\Rightarrow\varphi=arctg\frac{y}{x}.$$

*Рівняння прямої на площині в полярній системі координат має вигляд*

$$\rho=\frac{p}{\cos(\alpha-\varphi)}.$$

***Def. Конічним перерізом називається крива, по якій перерізає круговий конус довільна площина, що не проходить через його вершину.***

***Твердження****(Про конічні перерізи). Кожне конічний переріз, крім кола, являє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких від деякої точки* $F$*, званої фокусом, і деякої прямої* $\delta$*, званої директрисою, постійне:*

$$\frac{d_{MF}}{d_{M\delta}}=\lambda.$$

*Нехай* $d_{FM}=\rho$, $\angle MFg=\varphi$, $d_{F\delta}=p$, $d_{M\delta}=p-\rho\cos\varphi$. *тоді* $\frac{d_{MF}}{d_{M\delta}}=\lambda\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\rho}{p-\rho\cos\varphi}=\lambda\Rightarrow\rho=\lambda p-\lambda\rho\cos\varphi\Rightarrow\rho(1+\lambda\cos\varphi)=\lambda p.$$

*Звідси отримуємо*

$$\rho=\frac{\lambda p}{1+\lambda\cos\varphi}.$$

*Це і є рівняння конічного перерізу в полярній системі координат.*

*Зауваження. Рівняння конічного перерізу в загальному вигляді:*

$$\rho = \frac{\pm \lambda p}{1 \pm \lambda \cos\varphi}.$$

*Рівняння конічного перерізу в декартовій системі координат:*

$$x^2\left(1-\lambda^2\right)+2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2.$$

*може описувати:*

*а) якщо* $\lambda < 1$ *- **еліпс:***

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;$$

*б) якщо* $\lambda = 1$ *- **параболу:***

$$y'^2 - 2px' = 0;$$

*в) якщо* $\lambda > 1$ *- **гіперболу:***

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

*Крім того, для конічних перерізів можливі й інші випадки: коло, пряма, точка.*

## 9.4. Питання для перевірки

**1. Назвіть види перетворення систем координат:**

а) паралельне перенесення системи координат; б) паралельне перенесення і обертання системи координат; в) обертання системи координат.

**2. Запис координат точки в новій системі координат при паралельному перенесенні, коли $\left(x'_M, y'_M\right)$ - координати точки в старій системі, $\left(x_O, y_O\right)$ - координати центру системи координат старої системи:**

а) $x_M = x'_M + x_O$, $y_M = y'_M + y_O$; б) $x_O = x'_M + x_M$, $y_O = y'_M + y_M$; в) $x'_M = x_M + x_O$, $y'_M = y_M + y_O$.

**3. Запис координат точки в новій системі координат при обертанні системи координат на кут $\varphi$, коли $\left(x'_M, y'_M\right)$ - координати точки в старій системі:**

а) $x_M = x'_M \cos\varphi + y'_M \sin\varphi$, $y_M = x'_M \sin\varphi - y'_M \cos\varphi$;
б) $x_M = x'_M \sin\varphi - y'_M \cos\varphi$, $y_M = x'_M \cos\varphi + y'_M \sin\varphi$; в) $x_M = x'_M \cos\varphi - y'_M \sin\varphi$, $y_M = x'_M \sin\varphi + y'_M \cos\varphi$.

**4. Вибір системи координат визначається:**

а) вибором напрямку осей системи координат; б) вибором базису системи координат і центру системи координат; в) вибором координат центру системи координат і кута повороту системи координат.

**5. Полярна система координат визначається:**

а) відстанню від точки $O$ - центру полярної системи координат - і кутом повороту радіуса-вектора точки; б) точкою $O$ - центром полярної системи координат - і променем $g$, який виходить з $O$; в) променем $g$, який виходить з $O$, і кутом повороту радіуса-вектора точки.

**6. Центр полярної системи координат називають:**

а) полюсом; б) центром системи координат; в) початком системи координат.

**7. Промінь $g$, що виходить з центру полярної системи координат, називається:**

а) віссю системи координат; б) віссю проекцій; в) полярною віссю.

**8. Координати точки $M$ в полярній системі координат є:**

а) $\rho$ - відстань від точки $M$ до осі $g$; $\varphi$ - кут, утворений відрізком $OM$ і полярною віссю $g$; б) $\rho$ - відстань від центру системи координат до точки $M$; $\varphi$ - кут, утворений відрізком $OM$ і віссю $g$; в) $\rho$ - відстань від центру полярної системи координат до точки $M$; $\varphi$ - кут, утворений відрізком $OM$ і перпендикуляром до осі $g$.

**9. Полярними координатами точки є:** а) $\rho, g$; б) $\rho, \varphi$; в) $x, y$.

**10. Кажуть, що задано рівняння кривої в полярних координатах:**

а) якщо рівняння кривої лінії задано в залежності від полярних координат; б) якщо рівняння кривої лінії задано в явному вигляді; в) якщо задані початкова і кінцева точки кривої лінії.

**11. Рівняння кола з центром в полюсі у полярній системі координат:**

а) $\rho = R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; б) $2R\cos\varphi = \rho$, де $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$; в) $\rho = \dfrac{p}{cos(\alpha - \varphi)}$.

**12. Перехід від полярної системи координат до декартової:**

а) $\varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; б) $x = \rho\sin\varphi,\ y = \rho\cos\varphi$;

в) $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$.

**13. Перехід від декартових координат до полярних:**

а) $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$; б) $\varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$;

в) $\varphi = \arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

**14. Залежність, яку можна використовувати для визначення кута при переході від декартової системи координат до полярної:**

а) $\varphi = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $\varphi = \arccos\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; в) $\varphi = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**15. Залежність, яку можна використовувати для визначення кута при переході від декартової системи координат до полярної:**

а) $\varphi = arctg\dfrac{x}{y}$; б) $\varphi = arcctg\dfrac{y}{x}$; в) $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$.

**16. Загальне рівняння прямої на площині в полярній системі координат має вигляд:**

а) $\rho = \dfrac{\lambda p}{1+\lambda\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{p}{cos(\alpha-\varphi)}$; в) $2R\cos\varphi = \rho$, де $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

**17. Конічним перерізом називається крива, по якій перерізає круговий конус довільна площина,:**

а) .. що не проходить через його вершину; б) … що проходить через його вершину; в) … паралельна основі конуса.

**18. Конічний переріз являє собою геометричне місце точок площини, відношення відстаней яких:**

а) від деякої прямої, званої директоркою, і деякою точки, званої фокусом, постійне; б) від деякої точки, званої фокусом, і деякої прямої, званої директоркою, постійне; в) від деякої прямої, званої директоркою, і деякою точки, званої фокусом, не постійне.

**19. Якщо $d_{MF}$ - відстань від точки до фокусу, а $d_{M\delta}$ - відстань від точки до директриси, то конічний переріз можна представити так:**

а) $\dfrac{d_{M\delta}}{d_{MF}} = \lambda$; б) $d_{M\delta} d_{MF} = \lambda$; в) $\dfrac{d_{MF}}{d_{M\delta}} = \lambda$.

**20. Рівняння конічного перерізу в полярній системі координат:**

а) $\rho = \dfrac{p}{cos(\alpha-\varphi)}$; б) $2R\cos\varphi = \rho$, де $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$; в) $\rho = \dfrac{\lambda p}{1+\lambda\cos\varphi}$.

**21. Рівняння конічного перерізу в декартовій системі координат:**

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) $x^2\left(1-\lambda^2\right) + 2p\lambda^2 x + y^2 = \lambda^2 p^2$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**22. Канонічне рівняння еліпса:**

а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 - 2px = 0$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**23. Значення $\lambda$ для канонічного рівняння еліпса:**

а) $\lambda < 1$; б) $\lambda > 1$; в) $\lambda = 1$.

**24. Канонічне рівняння гіперболи:**

а) $y^2 - 2px = 0$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**25. Значення $\lambda$ для канонічного рівняння гіперболи:**

а) $\lambda > 1$; б) $\lambda < 1$; в) $\lambda = 1$.

**26. Канонічне рівняння параболи:**

а) $y^2 - 2px = 0$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**27. Значення $\lambda$ для канонічного рівняння параболи:**

а) $\lambda = 1$; б) $\lambda < 1$; в) $\lambda > 1$.

### 9.5. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. В полярній системі координат задано вершини $A\left(3;\ -\frac{4}{5}\pi\right)$ і $B\left(5;\ \frac{3}{14}\pi\right)$ паралелограма $ABCD$, точка перерізу діагоналей якого збігається з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.

2. В полярній системі координат задані протилежні вершини квадрата $P\left(6;\ -\frac{7}{12}\pi\right)$ і $Q\left(4;\ \frac{1}{6}\pi\right)$. Знайти його площу.

3. Написати формули перетворення координат, якщо початок координат (без зміни напрямку осей) перенесено: а) в точку $A(3;\ 4)$; б) в точку $B(-2;\ 1)$; в) в точку $C(-3;\ 5)$.

4. Задані точки $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 3)$ і $C(-2;\ 5)$. Знайти їх координати в новій системі координат, якщо початок координат перенесено (без зміни напрямку осей): а) в точку $A$; б) в точку $B$; в) в точку $C$.

5. Початок координат перенесено в точку $O'(-1;\ 2)$, осі координат повернені на кут $\alpha = arctg\frac{5}{12}$. координати точок $M_1(3;\ 2)$, $M_2(2;\ -3)$ і $M_3(13;\ -13)$ визначені в новій системі координат. Обчислити координати цих точок в старій системі координат.

6. Рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння еліпса у полярній системі координат, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з позитивним напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться: а) в лівому фокусі еліпса; б) в правому фокусі.

7. В полярній системі координат задано точки $A\left(8;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ і $B\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка, що з'єднує точки $A$ та $B$.

8. Початок координат перенесено (без зміни напрямку осей) в точку $O'(3;\ -4)$. координати точок $A(1;\ 3)$, $B(-3;\ 0)$ і $C(-1;\ 4)$ визначені в новій системі. Обчислити координати цих точок в старій системі координат.

9. Осі координат повернені на кут $\alpha = 60^0$. координати точок $A(2\sqrt{3};\ -4)$, $B(\sqrt{3};\ 0)$ і $C(0;\ -2\sqrt{3})$ визначені в новій системі координат. Обчислити координати цих точок в старій системі координат.

10. Задано три точки: $A(5;\ 5)$, $B(2;\ -3)$ і $C(12;\ -6)$. Знайти їх координати в новій системі координат, якщо початок координат перенесено в точку $B$, а вісі координат повернені на кут $\alpha = arctg\frac{3}{4}$.

11. Рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$. Скласти рівняння правої гілки гіперболи в полярній системі координат, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з додатнім напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться: а) в правому фокусі гіперболи; б) в лівому фокусі.

12. Рівняння параболи має вигляд $y^2=6x$. Скласти рівняння параболи в полярній системі координат, вважаючи, що напрямок полярної осі збігається з додатнім напрямком осі абсцис, а полюс знаходиться у фокусі параболи.

## 9.6. Самостійна робота

1. В полярній системі координат визначити відстань $d$ між точками $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{4}\right)$ і $M_2\left(8;\ -\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартовою системи координат, а полярна вісь збігається з додатною віссю абсцис. В полярній системі координат задані точки $M_1\left(6;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;\ 0)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10;\ -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(12;\ -\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити їх декартові координати.

3. Задані дві точки: $M_1(9;\ -3)$ і $M_2(-6;\ 5)$. Початок координат перенесено в точку $M_1$, а осі координат повернені так, що додатній напрямок нової осі абсцис збігається з напрямком відрізка $\overline{M_1M_2}$. Вивести формули перетворення координат.

4. Визначити координати точки $O'$ - нового початку координат, якщо точка $A(3;\ -4)$ лежить на новій осі абсцис, а точка $B(2;\ 3)$ лежить на новій осі ординат, причому осі старої і нової систем координат мають однаковий напрямок.

5. На еліпсі $\rho=\frac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює $6$.

6. Встановити, що рівняння $\rho=\frac{18}{4-5\cos\theta}$ визначає праву гілку гіперболи, і знайти її піввісь.

7. Установити, що рівняння $\rho=\frac{144}{13-5\cos\theta}$ визначає еліпс, і знайти його півосі.

# 10. КРИВІ 2-ГО ПОРЯДКУ

## 10.1. Загальне рівняння кривої 2-го порядку

**Def. Кривою 2-го порядку називається геометричне місце точок площини, декартові координати яких задаються рівнянням другого ступеня:**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0,$$

**у якому хоча б один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ відмінний від нуля.**

Останню умова можна ще записати в такому вигляді: $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0$.

**Твердження (щодо приведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду). Для будь-якої дійсної лінії 2-го порядку**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

**існує така система прямокутних координат, в якій це рівняння в залежності від значень числових коефіцієнтів $a_{ij}$ приймає один з наступних дев'яти канонічних видів:**

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **- еліпс;**

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ **- порожня множина;**

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ **- точка;**

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **- гіпербола;**

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ **- пара пересічних прямих;**

6) $y^2 - 2px = 0$ **- парабола;**

7) $y^2 - a^2 = 0$ **- пара паралельних прямих;**

8) $y^2 + a^2 = 0$ **- порожня множина;**

9) $y^2 = 0$ **- пара співпадаючих прямих.**

## 10.2. Дослідження конічних перерізів. Еліпс

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $\lambda < 1,\ a^2 = \dfrac{\lambda^2 p^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2},\ b^2 = \dfrac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2}.$

Коли $a = b$, еліпс перетворюється в коло $x^2 + y^2 = a^2$.

Особливості еліпса:

1. Весь еліпс знаходиться всередині прямокутника (рисунок 10.1):

$$|x| \le a,\ |y| \le b.$$

2. Еліпс лінійно симетричний відносно осей координат і має центральну симетрію відносно початку координат.

3. Еліпс має велику піввісь $a$ (дві) і малу піввісь $b$ (дві).

4. Еліпс має два фокуси і дві директриси (рисунок 10.2).

5. Для еліпса введені поняття фокальних радіусів-векторів і просто фокальних радіусів (рисунок 10.3).

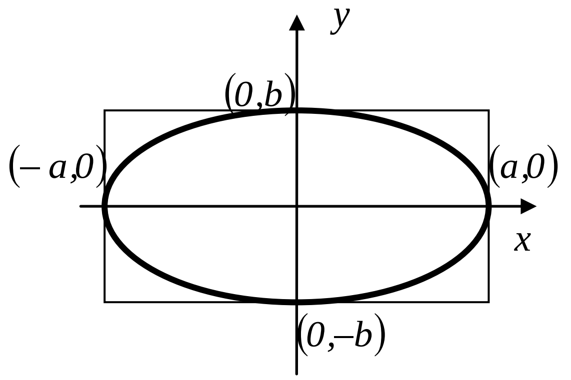



Рисунок. 10.1

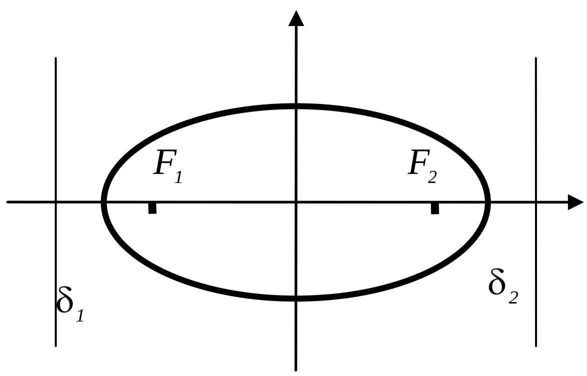



Рисунок. 10.2

**Def. Вектори точок еліпса, проведені з фокусів еліпса** $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, **називаються фокальними радіусами-векторами точок еліпса.**

**Def. Довжину фокальних радіусів-векторів точок еліпса називають фокальними радіусами:** $r_1 = \vec{r}_1, r_2 = \vec{r}_2$.

6. Властивості фокальних радіусів (рисунок 10.4).

Для еліпса можна записати вирази $\dfrac{r_1}{d_{M\delta 1}} = \lambda$ і $\dfrac{r_2}{d_{M\delta 2}} = \lambda,$ звідки отримуємо $r_1 = \lambda d_{M\delta 1}$ і $r_2 = \lambda d_{M\delta 2}$. Отже, $r_1 + r_2 = \lambda\left(d_{M\delta 1} + d_{MF}\right) = const.$

Нехай координати фокусів $F_1(-c,\ 0),\ F_2(c,\ 0)$. Для точки $A(a,\ 0)$ можна записати $r_1 = c + a$ і $r_2 = a - c$ (рисунок 10.5). Оскільки сума фокальних радіусів - величина постійна, то $r_1 + r_2 = 2a.$

З цієї особливості фокальних радіусів випливає альтернативне визначення еліпса.

**Def. Еліпс - це геометричне місце точок, сума відстаней яких від фокусів** $F_1$ **і** $F_2$ **- величина постійна і дорівнює** $2a$.

7. Координати фокусів (рисунок 10.6).

Для точки $B(0,\ b)$ можна записати $r_1 = \sqrt{c^2 + b^2}$ і $r_2 = \sqrt{c^2 + b^2}$. тоді $r_1 + r_2 = 2\sqrt{c^2 + b^2} = 2a$ або $c^2 + b^2 = a^2$. Отже, можна записати координати фокусів:

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}\ .$$

8. Координати директриси (див. рисунок 10.4).

Відстань між директрисами $d_{M\delta 1} + d_{MF}$. Тоді можна записати координату директриси: $x_{\delta 2} = \dfrac{d_{M\delta 1} + d_{MF}}{2}$. З виразів $\dfrac{r_1}{d_{M\delta 1}} = \lambda$ і $\dfrac{r_2}{d_{M\delta 2}} = \lambda$ знаходимо $d_{M\delta 1} = \dfrac{r_1}{\lambda}$ і $d_{M\delta 2} = \dfrac{r_2}{\lambda}$. отримуємо $x_{\delta 2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r_1}{\lambda} + \dfrac{r_2}{\lambda}\right) = \dfrac{r_1 + r_2}{2\lambda} = \dfrac{2a}{2\lambda} = \dfrac{a}{\lambda}$. Отже, маємо координати директрис:

$$x_{\delta 1} = -\frac{a}{\lambda};\ x_{\delta 2} = \frac{a}{\lambda}\ .$$

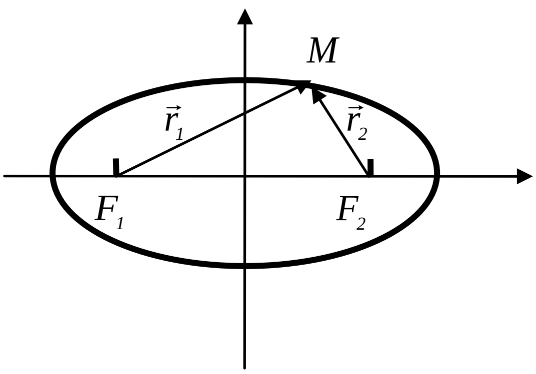



Рисунок. 10.3

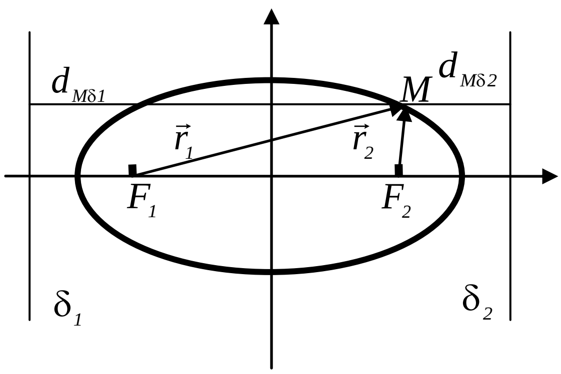



Рисунок. 10.4

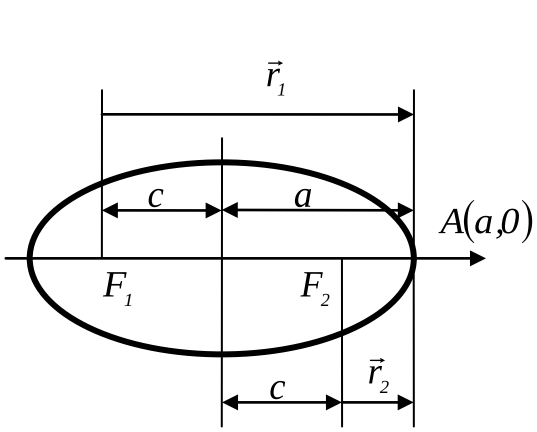



Рисунок. 10.5

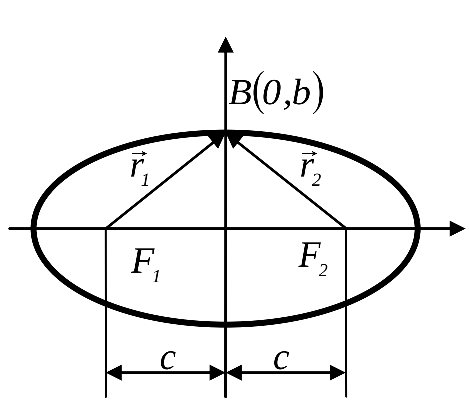



Рисунок. 10.6

9. Величина ексцентриситету еліпса (рисунок 10.7).

Для точки $A(a,\ 0)$ можна записати

$$\lambda=\frac{d_{AF}}{d_{A\delta}}=\frac{a-c}{x_{\delta 2}-a}=\frac{a-c}{\dfrac{a}{\lambda}-a}\Rightarrow a-\lambda a=a-c\Rightarrow \lambda a=c.$$

Отже, величина ексцентриситету еліпса визначається формулою

$$\lambda=\frac{c}{a}.$$

10. Величина фокальних радіусів (рисунок 10.8).

Нехай задана довільна точка еліпса $M(x,y)$. Для цієї точки можна записати $r_2^2=(c-x)^2+y^2$, А з $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ випливає, що $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$. Тоді

$$r_2^2=(c-x)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\Rightarrow r_2^2=c^2-2cx+x^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^2=c^2+b^2-2cx+x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\Rightarrow r_2^2=a^2-2a\lambda x+x^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^2=a^2-2a\lambda x+x^2\,\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow r_2^2=a^2-2a\lambda x+\lambda^2x^2\Rightarrow r_2^2=(a-\lambda x)^2.$$

Як остаточний результат запишемо

$$r_2^2=(a-\lambda x)^2.$$

Аналогічно можна записати для $r_1$:

$$r_1^2=(a+\lambda x)^2.$$

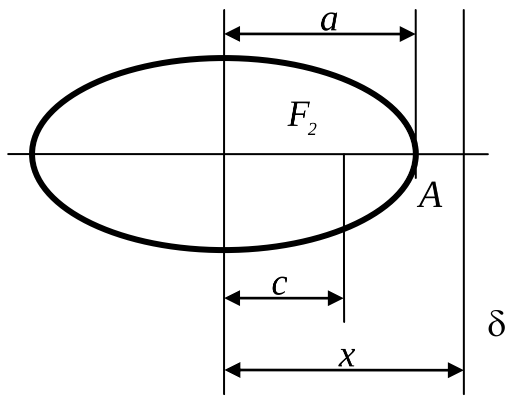



Рисунок. 10.7

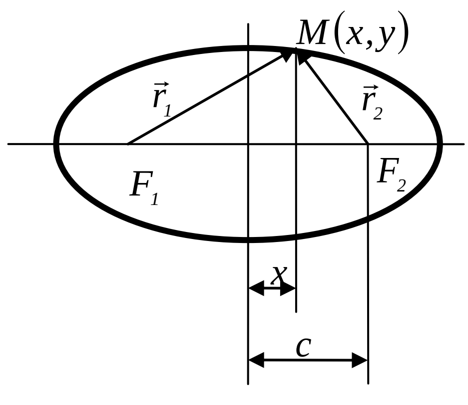



Рисунок. 10.8

11. Дотична до еліпсу.

Рівняння дотичної до еліпса в точці $M(x_M, y_M)$ має вигляд

$$y-y_M=f'(x_M)(x-x_M).$$

Продиференцюємо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0\Rightarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y}\Rightarrow f'(x_M)=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}.$$

Отримаємо рівняння дотичної:

$$y-y_M=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}(x-x_M)\Rightarrow\frac{y-y_M}{b^2x_M}=-\frac{x-x_M}{a^2y_M}\Big|x_My_M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{yy_M-y^2{}_M}{b^2}=-\frac{xx_M-x^2{}_M}{a^2}\Rightarrow\frac{yy_M}{b^2}+\frac{xx_M}{a^2}=\frac{x^2{}_M}{a^2}+\frac{y^2{}_M}{b^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{yy_M}{b^2}+\frac{xx_M}{a^2}=1.$$

12. Твердження про відображення.

Світлові промені, що йдуть від одного фокуса еліпса, після дзеркального відображення від еліпса проходять через другий фокус (рисунок 10.9).

Це означає, що якщо провести через точку $M$ дотичну $\sigma$, то фокальні раді-

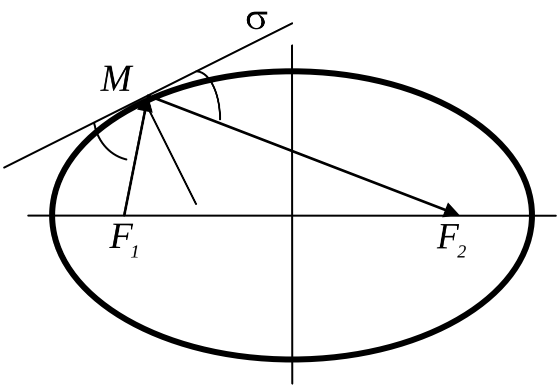



Рисунок. 10.9

уси-вектори $\overrightarrow{F_1M}$ і $\overrightarrow{F_2M}$ утворюють з цієї дотичної рівні кути.

13. Параметрична форма завдання еліпса:

$$x=a\cos(t);$$
$$y=b\sin(t).$$

Дійсно,

$$\frac{x}{a}=cos(t),\ \frac{y}{b}=sin(t)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cos^2(t)+sin^2(t)=1.$$

## 10.3. Висновки

***Def.* Кривою 2-го порядку називається геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння вигляду**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0,$$

***в якому хоча б один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ відмінний від нуля.***

***Твердження (щодо приведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду). Для будь-якої лінії 2-го порядку***

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

***існує така система прямокутних координат, в якій це рівняння в залежності від значень числових коефіцієнтів $a_{ij}$ приймає один з наступних дев'яти канонічних видів:***

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ***- еліпс;***

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ ***- порожня множина;***

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ***- точка;***

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ***- гіпербола;***

5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ***- пара пересічних прямих;***

6) $y^2 - 2px = 0$ ***- парабола;***

7) $y^2 - a^2 = 0$ ***- пара паралельних прямих;***

8) $y^2 + a^2 = 0$ ***- порожня множина;***

9) $y^2 = 0$ ***- пара співпадаючих прямих.***

*Канонічне рівняння еліпса має вигляд*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*де* $\lambda < 1,\ a^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2},\quad b^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2}.$

*Коли* $a = b$ *еліпс перетворюється в коло* $x^2 + y^2 = a^2$.

*Особливості еліпса:*

*1. Весь еліпс знаходиться всередині прямокутника:*

$$|x| \le a,\ |y| \le b.$$

*2. Еліпс лінійно симетричний відносно осей координат і має центральну симетрію відносно початку координат.*

*3. Еліпс має велику піввісь $a$ (дві) і малу піввісь $\chi$ (дві).*

*4. Еліпс має два фокуси і дві директриси.*

*5. Для еліпса введені поняття фокальних радіусів-векторів точок еліпса і просто фокальних радіусів.*

***Def. Вектори точок еліпса, проведені з фокусів еліпса*** $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, ***називають-ся фокальними радіусами-векторами точок.***

***Def. Довжину фокальних радіусів-векторів точок еліпса називають фо-кальними радіусами:*** $r_1 = \vec{r}_1, r_2 = \vec{r}_2$**.**

*6. Властивості фокальних радіусів. Сума фокальних радіусів - величина по-стійна:*

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

***<u>Альтернативне визначення еліпса</u>. Еліпс - це геометричне місце точок, сума відстаней яких від фокусів*** $F_1$ ***і*** $F_2$ ***- величина постійна і дорівнює*** $2a$**.**

*7. Координати фокусів:*

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

*8. Координати директрис:*

$$x_{\delta 1} = -\frac{a}{\lambda};\ x_{\delta 2} = \frac{a}{\lambda}.$$

*9. Величина ексцентриситету еліпса:*

$$\lambda = \frac{c}{a}.$$

*10. Величина фокальних радіусів:*

$$r_2^2 = (a - \lambda x)^2; \quad r_1^2 = (a + \lambda x)^2.$$

*11. Дотична до еліпсу:*

$$\frac{yy_M}{b^2} + \frac{xx_M}{a^2} = 1.$$

*12. Твердження про відображення. Світлові промені, що йдуть від одного фокуса еліпса, після дзеркального відображення від еліпса проходять через дру-гий фокус.*

*13. Параметрична форма запису еліпса:*

$$x = a\cos(t);$$
$$y = b\sin(y).$$

### 10.4. Питання для перевірки

**1. Загальне рівняння кривої 2-го порядку:**

а) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$; б) $2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$;
в) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$.

**2. У рівнянні кривої 2-го порядку коефіцієнти $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ повинні відповідати умові:**

а) хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля; б) всі коефіцієнти не нульові; в) хоча б один коефіцієнт дорівнює нулю.

**3. Кількість канонічних видів рівняння кривої 2-го порядку:**

а) 17; б) вісім; в) дев'ять.

**4. Різні канонічні види рівняння кривої другого порядку існують в залежності:**

а) від знака числових коефіцієнтів $a_{ij}$; б) від вибору системи координат; в) від значень числових коефіцієнтів $a_{ij}$.

**5. Канонічна крива** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається:

а) еліпсом; б) гіперболою; в) параболою.

**6. Канонічна крива** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ **називається:**

а) порожньою множиною; б) гіперболою; в) парою пересічних прямих.

**7. Канонічна крива** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ **називається:**

а) порожньою множиною; б) точкою; в) парою пересічних прямих.

**8. Канонічна крива** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **називається:**

а) гіперболою; б) еліпсом; в) параболою.

**9. Канонічна крива** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ **називається:**

а) порожньою множиною; б) точкою; в) парою пересічних прямих.

**10. Канонічна крива** $y^2 - 2px = 0$ називається:

а) прямою лінією; б) колом; в) параболою.

**11. Умова виродження еліпса в коло:**

а) $a > b$; б) $a = b$; в) $a < b$.

**12. Обмеження для еліпса:**

а) $|x| \geq a$, $|y| \leq b$; б) $|x| \leq a$, $|y| \geq b$; в) $|x| \leq a$, $|y| \leq b$.

**13. Чи має еліпс лінійну симетрію:**

а) ні; б) так; в) має тільки центральну симетрію?

**14. Чи має еліпс центральну симетрію:**

а) ні; б) так; в) має тільки лінійну симетрію?

**15. У канонічному рівнянні еліпса $a$ і $b$ називаються:**

а) великої і малої осями; б) осями; в) великої і малої півосями.

**16. Скільки фокусів має еліпс:**

а) два; б) один; в) три?

**17. Скільки директрис має еліпс:**

а) дві; б) одну; в) три?

**18. Фокальний радіус-вектор - це:**

а) вектор точки еліпса, проведений з фокуса еліпса; б) вектор між фокусами еліпса; в) вектор між фокусом і вершиною еліпса.

**19. Фокальний радіус - це:**

а) радіус кола з центром у фокусі; б) довжина фокальних радіусів-векторів; в) радіус кола, що проходить через фокуси еліпса.

**20. Альтернативне визначення еліпса:**

а) геометричне місце точок деформованої окружності; б) геометричне місце точок, сума відстаней яких від фокусів - величина постійна і рівна $2a$; в) геометричне місце точок, сума відстаней яких від фокусів - величина постійна і рівна $2b$.

**21. Величина $\lambda$ для еліпса називається:**

а) між фокусною відстанню; б) деформацією еліпса; в) ексцентриситетом еліпса.

**22. Рівняння дотичної до еліпса:**

а) $\frac{x \cdot x_M}{a^2} + \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1$; б) $\frac{x \cdot x_M}{a^2} - \frac{y \cdot y_M}{b^2} = 1$ в) $x \cdot x_M \cdot a + y \cdot y_M \cdot b = 1$.

**23. Твердження про відображення.** Світлові промені, що йдуть від одного фокуса еліпса, після дзеркального відображення від еліпса…

а) … не проходять через другий фокус; б) … проходять через другий фокус; в) … проходять через фокус еліпса.

**24. Параметрична форма завдання еліпса:**

а) $x = a\sin(t),\ y = b\cos(t)$; б) $x = a\cos(t),\ y = b\sin(t)$; в) $x = ach(t),\ y = bsh(t)$.

## 10.5. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Скласти рівняння кола з центром в точці $(2;\ -5)$ та радіусом 4.

2. Скласти рівняння кола з центром в точці $(-3;\ 4)$, що проходить через початок координат.

3. Привести до нормального вигляду рівняння кола
$x^2 + y^2 + 2x - 10y + +1 = 0$.

4. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що відстань між фокусами дорівнює 6 і велика піввісь дорівнює 5.

5. Прямі $x = \pm 8$ є директрисами еліпса, мала вісь якого дорівнює 8. Знайти рівняння цього еліпса.

6. Скласти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат, знаючи, що відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами - 10.

7. Скласти рівняння гіперболи, що має загальні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, за умови, що її ексцентриситет $e$ = 1,25.

8. Визначити координати вершини параболи, величину параметра і напрямок осі, якщо парабола задана рівнянням $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.

9. Рівняння гіперболи $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$ привести до канонічного виду.

10. Рівняння кривої $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$ привести до канонічного виду.

### 10.6. Практика для самостійної роботи

1. Скласти рівняння кола з центром в точці $(0;\ 4)$, що проходить через точку $(\ 5;\ -8)$.

2. Знайти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з її діаметрів $AB$: $A(\ 1;\ 4)$ і $B(-3;\ 2)$.

3. Привести до нормального вигляду рівняння кола $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.

4. Скласти канонічного рівняння еліпса, знаючи, що мала піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .

5. Рівняння еліпса має вигляд $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Обчислити довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпса.

6. Скласти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат, знаючи, що дійсна вісь дорівнює $6$ і гіпербола проходить через точку $(9;\ -4)$.

7. Гіпербола задана рівнянням $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Потрібно обчислити координати фокусів і ексцентриситет, написати рівняння асимптот і директрис.

8. Визначити координати вершини параболи, величину параметра і напрямок осі, якщо парабола задана рівнянням $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$.

9. Рівняння гіперболи $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$ привести до канонічного виду.

10. Рівняння кривої $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$ привести до канонічного виду.

11. На осі абсцис знайти центр кола, що проходить через точки $A(2;\ 3)$ і $B(5;\ 2)$, і написати рівняння цього кола.

12. Написати рівняння кола, що проходить через точки $(3;\ 0)$ і $(-1;\ 2)$, Знаючи, що центр його лежить на прямій $x - y + 2 = 0$.

13. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки: $A(0;\ 2)$, $B(1;\ 1)$ і $C(2;\ -2)$.

14. Скласти найпростіше рівняння еліпса, знаючи, що сума півосей дорівнює $8$ і відстань між фокусами дорівнює 8.

15. Скласти рівняння гіперболи, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що гіпербола проходить через дві точки: $P(-5;\ 2)$ і $Q(2\sqrt{5};\ \sqrt{2})$.

16. Обчислити півосі гіперболи, знаючи, що відстань між фокусами дорівнює $8$ і відстань між директрисами дорівнює 6.

17. Знайти точки перетину параболи $y^2 = 12x$ з еліпсом $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

18. Обчислити параметр параболи $y^2 = 2px$, якщо відома до неї дотична $x - 2y + 5 = 0$.

19. Рівняння гіперболи $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$ привести до канонічного виду.

20. Еліпс дотичний до осі ординат на початку координат, а центр його знаходиться в точці $(5;\ 0)$. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що ексцентриситет $e = 0{,}8$.

# 11. КРИВІ І ПОВЕРХНІ 2-ГО ПОРЯДКУ

## 11.1. Криві 2-го порядку

### *11.1.1. Гіпербола*

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $\lambda>1$, $a^2=\dfrac{\lambda^2 p^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2}$, $b^2=-\dfrac{\lambda^2 p^2}{1-\lambda^2}$.

Коли $a=b$ гіпербола називається рівнобічною і описується рівнянням $x^2-y^2=a^2$.

Особливості гіперболи:

1. Гіпербола складається з двох гілок, розташованих поза прямокутника всередині двох кутів, утворених його діагоналями (рисунок 11.1):

$$|x|\le a,\ |y|\ge b.$$

2. Гіпербола лінійно симетрична щодо осей координат і має центральну симетрію щодо початку координат.
3. Гіпербола має дійсну піввісь $a$ (дві) і уявну піввісь $\chi$ (дві).
4. Гіпербола має два фокуси і дві директриси (рис. 11.2).

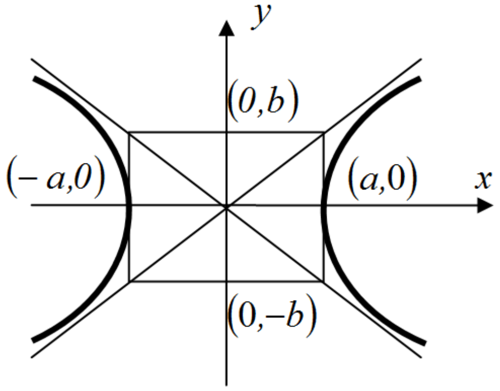



Рисунок. 11.1

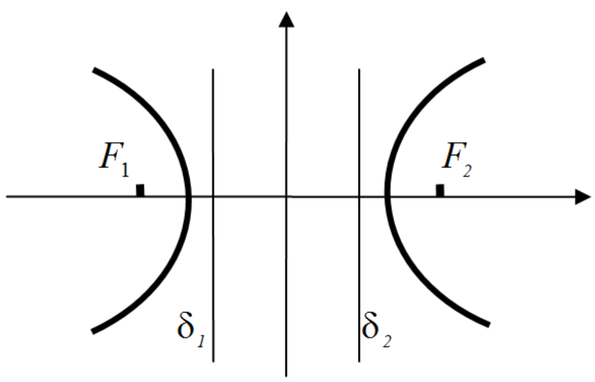



Рисунок. 11.2

5. Як і для еліпса, для гіперболи введені поняття фокальних радіусів-векторів і просто фокальних радіусів (рисунок 11.3).
6. Гіпербола виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

є спряженою до гіперболи вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Вона розташована в додаткових верхніх кутах (рисунок 11.4).

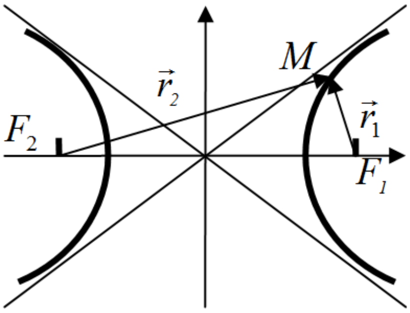



Рисунок. 11.3

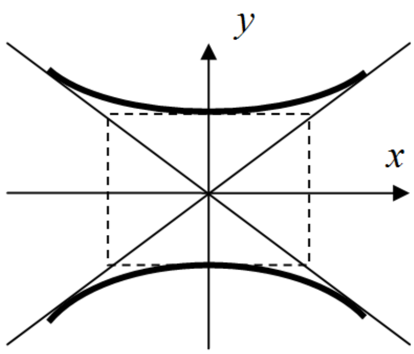



Рисунок. 11.4

7. Якщо точку гіперболи $(x,y)$ віддаляти від початку системи координат в нескінченність, то вона наближається як завгодно близько до одного з продовжень діагоналі прямокутника. Так наприклад, в першій чверті діагональ прямокутника можна записати у вигляді

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \Rightarrow bx-ay=0.$$

Відстань від точки гіперболи $M$ до цієї прямої $\sigma$ (рисунок 11.5) визначається формулою

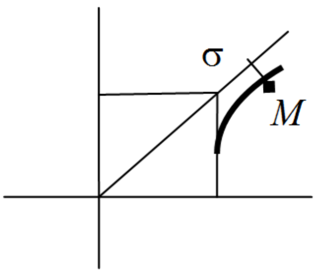



Рисунок. 11.5

$$d=\left|\frac{bx_M}{\sqrt{b^2+a^2}}-\frac{ay_M}{\sqrt{b^2+a^2}}\right|.$$

З рівняння гіперболи знаходимо

$$x_M=\frac{a}{b}\sqrt{y_M^2+b^2}.$$

Отже,

$$d=\left|\frac{a\sqrt{y_M^2+b^2}-ay_M}{\sqrt{b^2+a^2}}\right|.$$

Якщо розглянути цю відстань при віддалені точки в нескінченність, то маємо

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\left|a\sqrt{y_M^2+b^2}-ay_M\right|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2+a^2}\left(a\sqrt{y_M^2+b^2}+ay_M\right)}=0.$$

**Def. Пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько, називається асимптотою графіка.**

*Висновок*. Гіпербола має дві асимптоти:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \Rightarrow bx-ay=0\,,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \Rightarrow bx+ay=0\,.$$

Основні співвідношення між параметрами для гіперболи виводяться так само, як і для еліпса. Основні співвідношення для параметрів еліпса та гіперболи наведені в таблиці 11.1:

Таблиця 11.1 − Співвідношення для параметрів еліпса та гіперболи.

| геометричний образ | властивості | $F$ | δ | λ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Еліпс | $r_1+r_2=2a$ | $c^2+b^2=a^2$ | $x=\frac{a}{\lambda}$ | $\frac{c}{a}$ | $a\pm\lambda x$ |
| Гіпербола | $r_1-r_2=2a$ | $c^2=b^2+a^2$ | $x=\frac{a}{\lambda}$ | $\frac{c}{a}$ | $\pm a\pm\lambda x$ |

Як і для еліпса, для гіперболи існує альтернативне визначення.

**Def. Гіпербола - це геометричне місце точок, різниця відстаней яких від фокусів $F_1$ і $F_2$ - величина постійна і рівна $2a$.**

Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M(x_M, y_M)$ має вигляд

$$\frac{yy_M}{b^2}-\frac{xx_M}{a^2}=1.$$

Твердження про відображення для гіперболи: промінь світла, що виходить з одного фокуса гіперболи, після дзеркального відбивання рухається так, ніби він виходить з другого фокуса (рисунок 11.6). Це означає, що якщо через точку гіперболи $M$ провести дотичну $\sigma$, то фокальні радіуси-вектори $\overrightarrow{F_1M}$ і $\overrightarrow{F_2M}$ утворюють з цієї дотичної рівні кути.

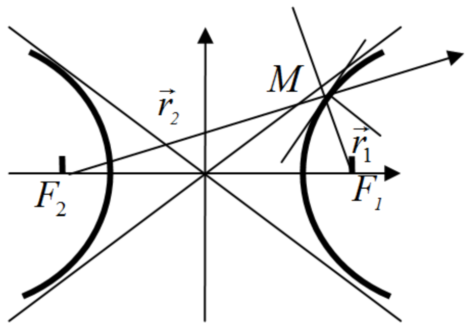


Рисунок. 11.6

Параметрична форма запису гіперболи:

$$x=ach(t);$$
$$y=bsh(t).$$

Дійсно, $\frac{x}{a}=ch(t)$, $\frac{y}{b}=sh(t) \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=ch^2(t)-sh^2(t)=1.$$

*Зауваження*:

1. Осі симетрії еліпса і гіперболи називаються головними осями кривих.
2. Центри симетрії гіперболи і еліпса називаються центрами кривих.

3. Точки перетину кривих з головними осями називають вершинами кривих.

### *11.1.2. Парабола*

Канонічне рівняння параболи $(\lambda = 1)$ має вигляд

$$y^2 - 2px = 0.$$

Парабола зображена на рисунку 11.7, де вісь $Ox$ є віссю симетрії параболи.

**Def. Точка перетину осі симетрії параболи з параболою називається вершиною параболи.**

Основні властивості параболи:

1. Парабола має один фокус і одну директрису.

Координати фокуса параболи: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Рівняння директриси параболи має вигляд $x = -\frac{p}{2}$.

2. Загальне рівняння дотичної до параболи можна записати у вигляді

$$y - y_M = f'(x_M)(x - x_M).$$

Побудуємо похідну параболи:

$$y^2 - 2px = 0 \Rightarrow 2yy' - 2p = 0 \Rightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Підставами значення похідної в рівняння дотичної:

$$y - y_M = f'(x_M)(x - x_M) \Rightarrow y - y_M = \frac{p}{y_M}(x - x_M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yy_M - y^2{}_M = px - px_M \Rightarrow \left| y_M^2 = 2px_M \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yy_M - 2px_M = px - px_M \Rightarrow yy_M - px - px_M = 0.$$

Рівняння дотичної має вигляд

$$yy_M - p(x + x_M) = 0.$$

3. Твердження про відображення для параболи: світлові промені, що йдуть від фокуса параболи, після дзеркального відображення від параболи паралельні її осі симетрії (рисунок 11.8). Це означає, що якщо через точку параболи $M$ провести дотичну $\sigma$, то $FM$ і відбитий промінь утворюють з цієї дотичної рівні кути.

## 11.2. Поверхні 2-го порядку

Аналогом ліній 2-го порядку є в просторі поверхні 2-го порядку.

**Def. Поверхнею 2-го порядку називають множину точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння виду**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0,$$

**де хоча б один з коефіцієнтів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ відмінний від нуля.**

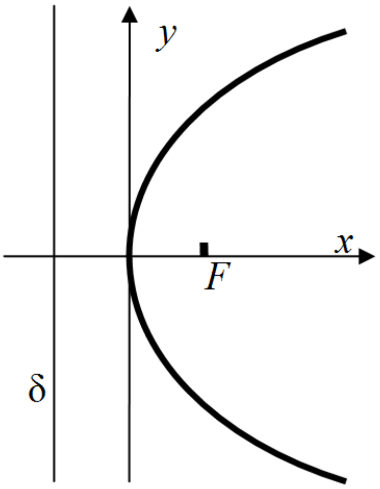



Рисунок. 11.7

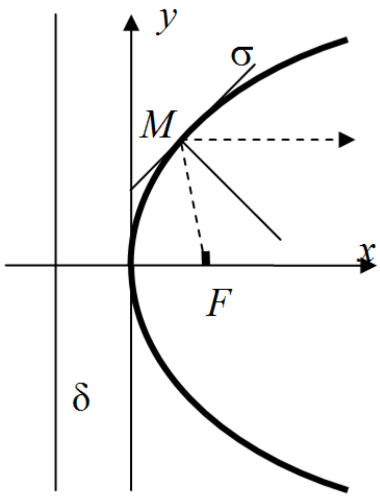



Рисунок. 11.8

Останню умову ще можна записати в вигляді

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$$

*Зауваження*. Будь-яка площина перетинає поверхню 2-го порядку по кривій 2-го порядку (яка може бути виродженою).

Можна дати і інше визначення поверхні 2-го порядку.

**Def. Поверхнею 2-го порядку називають множину точок, що задовольняють рівняння виду**

$$F(x,y,z) = 0,$$

**де $F(x,y,z)$ - деякий многочлен 2-го порядку від $x,y,z$.**

### *11.2.1. Поверхня тіла обертання*

**Def. поверхня $\Omega$ називається поверхнею тіла обертання з віссю $\sigma$, якщо вона складена з кіл, які мають центри на прямий $\sigma$ і лежать в площинах, перпендикулярних до цієї прямої.**

Нехай вісь обертання $\sigma$ збігається з віссю координат $Oz$. Лінія $L$ обертається навколо осі $\sigma$ і утворює поверхню тіла обертання. Нехай лінія $L$ описується рівнянням

$$L: \begin{cases} \varphi(x,z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

для площини $\pi_2$. Через будь-яку точку $M(x,y,z)$ простору, що належить поверхні $\Omega$, але не лежить на осі $\sigma$, проходить коло, що має центр на осі $\sigma$ і це коло лежить в площині $\pi_1$, перпендикулярній цієї осі. Радіус кола дорівнює відстані від точки $M$ до осі $\sigma$: $\sqrt{x^2 + y^2}$. Точка $M$ належить поверхні тіла обертання $\Omega$ тоді і тільки тоді, коли на зазначеному колі є точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, що належить лінії $L$, яка обертається навколо осі $\sigma$. Якщо точка $M_1$ належить $\pi_2$, то

$$z_1 = z,\ y_1 = 0,\ x_1 = r_M = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Оскільки $M_1 \in L$, для $M_1$

$$\varphi(x_1, z_1) = 0,$$

або

$$\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0\ .$$

Це рівняння і є рівнянням поверхні утвореною обертання лінії $L$ навколо осі $\sigma$, що збігається з віссю координат $Oz$. Більш строго можна записати:

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0\ .$$

### *11.2.2. Твердження про класифікації поверхонь 2-го порядку*

**Твердження (щодо приведення рівняння поверхні 2-го порядку до канонічного вигляду). Для будь-якої поверхні 2-го порядку**

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0$$

**існує така система прямокутних координат, в якій це рівняння в залежності від значень числових коефіцієнтів $a_{ij}$ приймає один з наступних видів:**

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - **еліпсоїд дійсний**;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ - **еліпсоїд уявний**;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - **гіперболоїд одно порожнинний**;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ - **гіперболоїд дво порожнинний**;

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ - **параболоїд еліптичний**;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ - **параболоїд гіперболічний (сідло);**

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ - **уявний конус (точка);**

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ - **конус дійсний;**

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - **циліндр еліптичний;**

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ - **порожня множина;**

11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - **пересічні площині (вісь $Oz$);**

12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **- циліндр гіперболічний;**

13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ **- пересічні площини;**

14) $y^2-2px=0$ **- циліндр параболічний;**

15) $y^2-a^2=0$ **- пара паралельних площин;**

16) $y^2+a^2=0$ **- порожня множина;**

17) $y^2=0$ **- пара співпадаючих площин.**

## 11.3. Висновки

### *Гіпербола*

*Канонічне рівняння гіперболи має вигляд*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

*де* $\lambda>1$, $a^2=\frac{\lambda^2p^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2}$, $b^2=-\frac{\lambda^2p^2}{1-\lambda^2}$.

*При* $a=b$ *гіпербола називається рівнобічною:* $x^2-y^2=a^2$.

*Особливості гіперболи:*

*1. Гіпербола складається з двох гілок, розташованих поза прямокутником всередині двох кутів, утворених його діагоналями:* $|x|\le a$, $|y|\ge b$.

*2. Гіпербола лінійно симетрична щодо осей координат і має центральну симетрію щодо початку координат.*

*3. Гіпербола має дійсну піввісь* $a$ *(дві) і уявну піввісь* $b$ *(дві).*

*4. Осі симетрії еліпса і гіперболи називаються головними осями кривих.*

*5. Центри симетрії гіперболи і еліпса називаються центрами кривих.*

*6. Точки перетину кривих з головними осями називають вершинами кривих.*

*7. Гіпербола має два фокуси і дві директриси.*

*8. Для гіперболи введені поняття фокальних радіусів-векторів і просто фокальних радіусів.*

*9. Гіпербола вигляду*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

*по відношенню до гіперболи вигляду*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

*називається спряженою. Вона розташована в додаткових верхніх кутах.*

*10. Якщо точку гіперболи $(x,y)$ віддаляти від початку системи координат в нескінченність, то вона наближається як завгодно близько до одного з продовжень діагоналі прямокутника.*

***Def. Пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько, називається асимптотою графіка.***

*Висновок. Гіпербола має дві асимптоти:*

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \Rightarrow bx-ay=0\,,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \Rightarrow bx+ay=0\,.$$

*Альтернативне визначення гіперболи.*

***Def. Гіпербола - це геометричне місце точок, різниця відстаней яких від фокусів $F_1$ і $F_2$ - величина постійна і рівна $2a$.***

*Основні співвідношення для параметрів еліпса та гіперболи наведені в таблиці:*

| *геометричний образ* | *властивості* | $F$ | $\delta$ | $\lambda$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Еліпс* | $r_1+r_2=2a$ | $c^2+b^2=a^2$ | $x=\frac{a}{\lambda}$ | $\frac{c}{a}$ | $a\pm\lambda x$ |
| *Гіпербола* | $r_1-r_2=2a$ | $c^2=b^2+a^2$ | $x=\frac{a}{\lambda}$ | $\frac{c}{a}$ | $\pm a\pm\lambda x$ |

*Властивості гіперболи:*

*1. Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M(x_M, y_M)$ має вигляд*

$$\frac{yy_M}{b^2}-\frac{xx_M}{a^2}=1.$$

*2. Твердження про відображення: промінь світла, що виходить з одного фокуса гіперболи, після дзеркального відбивання рухається так, ніби він виходить з другого фокуса*

*3. Параметрична форма завдання гіперболи:*

$$x=a\cdot ch(t),$$
$$y=b\cdot sh(t).$$

## *Парабола*

*Канонічне рівняння параболи $(\lambda=1)$ має вигляд $y^2-2px=0$.*

*Вісь $Ox$ є віссю симетрії параболи.*

**Def. Точка перетину осі симетрії параболи з параболою називається вершиною параболи.**

*Основні властивості параболи:*

*1. Парабола має один фокус і одну директрису.*

*Координати фокуса параболи:* $F\left(\frac{p}{2},\,0\right)$.

*Рівняння директриси параболи має вигляд* $x=-\frac{p}{2}$.

*2. Рівняння дотичної має вигляд*

$$yy_M-p(x+x_M)=0.$$

*3. Твердження про відображення: світлові промені, що йдуть від фокуса параболи, після дзеркального відображення від параболи паралельні її осі симетрії.*

***Def.* Поверхнею 2-го порядку називають множину точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння вигляду**

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+a_{00}=0,$$

**в якому хоча б один з коефіцієнтів** $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ **відмінний від нуля.**

*Зауваження. Будь-яка площина перетинає поверхню 2-го порядку по кривій 2-го порядку (яка може бути виродженою).*

*Альтернативне визначення. Поверхнею 2-го порядку називають геометричне місце точок, що задовольняють рівняння вигляду*

$$F(x,y,z)=0,$$

**де** $F(x,y,z)$ **- деякий многочлен від** $x,y,z$ **2-го порядку.**

***Def.* поверхня** $\Omega$ **називається поверхнею тіла обертання з віссю** $\sigma$**, якщо вона складена з кіл, які мають центри на прямій** $\sigma$ **і лежать в площинах, перпендикулярних цієї прямої.**

*Рівняння поверхні тіла обертання лінії* $L:\begin{cases}\varphi(x,z)=0,\\ y=0\end{cases}$ *навколо осі* $\sigma$*, що збігається з віссю координат* $Oz$*, Можна записати так:*

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0.$$

*Твердження (щодо приведення рівняння поверхні 2-го порядку до канонічного вигляду). Для будь-якої поверхні 2-го порядку*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+a_{00}=0$$

*існує така система прямокутних координат, в якій це рівняння в залежності від значень числових коефіцієнтів* $a_{ij}$ *приймає один з наступних видів:*

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - *еліпсоїд дійсний;*

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ - *еліпсоїд уявний;*

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - *гіперболоїд одно порожнинний;*

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ - *гіперболоїд дво порожнинний;*

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ - *параболоїд еліптичний;*

6) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$ - *параболоїд гіперболічний (сідло);*

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ - *уявний конус (точка);*

8) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ - *конус дійсний ;.*

9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - *циліндр еліптичний;*

10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ - *порожня множина;*

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ - *пересічні площини (вісь* $Oz$ *);*

12) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - *циліндр гіперболічний;*

13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ - *пересічні площини;*

14) $y^2-2px=0$ - *циліндр параболічний;*

15) $y^2-a^2=0$ - *пара паралельних площин;*

16) $y^2+a^2=0$ - *порожня множина;*

17) $y^2=0$ - *пара співпадаючих площин.*

## 11.4. Питання для перевірки

**1. Канонічне рівняння гіперболи має вигляд:**
а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; б) $y^2-2px=0$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

**2. При $a=b$ гіперболу називають:**
а) симетричною; б) спряженою; в) рівнобічною.

**3. Рівняння рівносторонній гіперболи має вигляд:**
а) $x^2-y^2=a^2$; б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$.

**4. Скільки гілок має гіпербола:**
а) чотири; б) дві; в) одну?

**5. Розташування гілок гіперболи:**
а) $|x|\le a$, $|y|\le b$; б) $|x|\ge a$, $|y|\ge b$; в) $|x|\le a$, $|y|\ge b$.

**6. Чи має гіпербола лінійну симетрію щодо осей координат:**
а) так; б) немає; в) тільки спряжена гіпербола?

**7. Чи має гіпербола центральну симетрію:**

а) ні; б) так; в) тільки при $a=b$?

**8. Чи має гіпербола дійсні півосі:**

а) півосі гіперболи дійсні; б) півосі гіперболи уявні; в) одна піввісь дійсна?

**9. Чи має гіпербола уявні півосі:**

а) півосі гіперболи дійсні; б) півосі гіперболи уявні; в) одна піввісь уявна?

**10. Скільки фокусів має гіпербола:**

а) дві; б) оду; в) жодної?

**11. Скільки директрис має гіпербола:**

а) одну; б) дві; в) жодної?

**12. Фокальний радіус-вектор точок гіперболи - це:**

а) вектор точки гіперболи, проведений з фокуса гіперболи; б) вектор між фокусами гіперболи; в) вектор між фокусом і вершиною гіперболи.

**13. Фокальний радіус точок гіперболи - це:**

а) радіус кола з центром у фокусі; б) довжина фокальних радіусів-векторів; в) радіус кола, що проходить через фокуси еліпса.

**14. Гіпербола вигляду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ по відношенню до гіперболи вигляду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ є:**

а) спряженою; б) симетричною; в) відображеною.

**15. Гіпербола вигляду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ по відношенню до гіперболи вигляду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ :**

а) розташована в додаткових верхніх кутах; б) повернена на $45^0$ щодо заданої; в) дзеркально відображається щодо заданої.

**16. Якщо точку гіперболи $(x,y)$ віддаляти від початку системи координат в нескінченність, то відстань від точки до одного з продовжень діагоналі прямокутника прямує:**

а) до константи; б) до нуля; в) до нескінченності.

**17. Пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько, називається:**

а) головною віссю; б) асимптотою; в) направляючою.

**18. Канонічні рівняння асимптот гіперболи:**

а) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$; б) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; в) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1$.

**19. Альтернативне визначення гіперболи. Гіпербола - це геометричне місце точок:**

а) сума відстаней яких від фокусів $F_1$ і $F_2$ - величина постійна і рівна $2a$;
б) різниця відстаней яких від фокусів $F_1$ і $F_2$ - величина постійна і рівна $2b$;
в) різниця відстаней яких від фокусів $F_1$ і $F_2$ - величина постійна і рівна $2a$.

**20. Рівняння дотичної до гіперболи в точці $M(x_M, y_M)$ має вигляд:**

а) $yy_M - p(x + x_M) = 0$; б) $\frac{yy_M}{b^2} - \frac{xx_M}{a^2} = 1$; в) $\frac{yy_M}{b^2} + \frac{xx_M}{a^2} = 1$.

**21. Твердження про відображення для гіперболи: світлові промені, що йдуть від одного фокуса гіперболи, після дзеркального відображення від гіперболи:**

а) здаються що виходять із іншого фокусу; б) паралельні її осі симетрії; в) проходять через інший фокус гіперболи.

**22. Геометричний сенс твердження про відображенні для гіперболи полягає в тому, що якщо через точку гіперболи $M$ провести дотичну $\sigma$, то фокальні радіуси-вектори $\overrightarrow{F_1M}$ і $\overrightarrow{F_2M}$ утворюють з цієї дотичної:**

а) прямі кути; б) гострі кути; в) рівні кути.

**23. Параметрична форма запису гіперболи:**

а) $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$; б) $x = a \cdot ch(t)$, $y = b \cdot sh(t)$; в) $x = a \cdot sh(t)$, $y = b \cdot ch(t)$.

**24. Осі симетрії еліпса і гіперболи називають:**

а) осями симетрії; б) головними осями кривих; в) осями кривих.

**25. Центри симетрії гіперболи і еліпса називають:**

а) центрами кривих; б) центрами симетрії; в) основами кривих.

**26. Точки перетину кривих з головними осями називають:**

а) особливими точками кривих; б) точками основами кривих; в) вершинами кривих.

**27. Канонічне рівняння параболи має вигляд:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $y^2 - 2px = 0$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**28. Ексцентриситет параболи:**

а) $\lambda < 1$; б) $\lambda > 1$; в) $\lambda = 1$.

**29. Точка перетину осі симетрії параболи з параболою називається:**

а) фокусом параболи; б) вершиною параболи; в) центром параболи.

**30. Скільки фокусів має парабола:**

а) два; б) жодного; в) один?

**31. Скільки директрис має парабола:**

а) одну; б) дві; в) жодної?

**32. Директриса параболи:**

а) $x = -\frac{p}{2}$; б) $x = \frac{p}{2}$; в) $x = -2p$.

**33. Рівняння дотичної в точці $M$ до параболи має вигляд:**

а) $\frac{yy_M}{b^2} - \frac{xx_M}{a^2} = 1$; б) $yy_M - p(x + x_M) = 0$; в) $\frac{yy_M}{b^2} + \frac{xx_M}{a^2} = 1$.

**34. Твердження про відображення для параболи: світлові промені, що йдуть від фокуса параболи, після дзеркального відображення від параболи:**

а) здаються що виходять із фокуса; б) паралельні її осі симетрії; в) не паралельні її осі симетрії.

**35. Геометричний сенс твердження про відображенні для параболи полягає в тому, що якщо через точку параболи $M$ провести дотичну $\sigma$, то $FM$ і відбитий промінь утворюють з цієї дотичної**:

а) прямі кути; б) гострі кути; в) рівні кути.

**36. Поверхнею 2-го порядку називають множину точок простору, декартові координати яких задовольняють рівняння вигляду:**

а) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + {}$ $+ a_{00} = 0$; б) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + {}$ $+ a_{00} = 0$; в) $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + + a_{23}yz + a_{00} = 0$.

**37. Для числових коефіцієнтів у рівнянні поверхні 2-го порядку має виконуватися умова:**

а) $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \neq 0$; б) $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$; в) $a_{12}^2 + a_{13}^2 + + a_{23}^2 \neq 0$ .

**38. Будь-яка площина перетинає поверхню 2-го порядку:**

а) по кривій 2-го порядку; б) по прямій; в) по колу.

**39. Поверхнею 2-го порядку називають множину точок, що задовольняють рівняння вигляду $F(x,y,z) = 0$, де $F(x,y,z)$ є:**

а) функцією трьох змінних; б) многочленом 2-го порядку від $x,y,z$; в) неявно заданою функцією.

**40. Поверхня $\Omega$ називається поверхнею тіла обертання з віссю $\sigma$, якщо:**

а) вона складена з кіл, які мають центри на прямий $\sigma$ і лежать в площинах, перпендикулярних цієї прямої; б) ця поверхня описується многочленом 2-го порядку; в) точки поверхні симетричні щодо осі $\sigma$.

**41. Рівняння поверхні обертання лінії $L$ навколо осі $\sigma$ , що збігається з віссю координат $Oz$, можна записати у вигляді:**

а) $\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 - y^2}, z\right) = 0$; б) $\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$; в) $\varphi\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$.

**42. Для будь-якої поверхні 2-го порядку $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + {}$ $+ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0$ існує така система прямокутних координат, в якій це рівняння в залежності від значень числових коефіцієнтів $a_{ij}$ приймає один з:**

а) сімнадцяти видів; б) семи видів; в) дев'яти видів.

**43. Еліпсоїд дійсний:**

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

**44. Еліпсоїд уявний:**

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$; б) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

**45. Гіперболоїд одно порожнинний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**46. Гіперболоїд дву порожнинний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**47. Параболоїд еліптичний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**48. Параболоїд гіперболічний (сідло):**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

**49. Уявний конус (точка):**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**50. Конус дійсний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**51. Циліндр еліптичний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**52. Порожня множина:**

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**53. Пересічні площини (вісь $Oz$):**

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**54. Циліндр гіперболічний:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**55. Пересічні площини:**

а) $y^2+a^2=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

**56. Циліндр параболічний:**

а) $y^2-2px=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

**57. Пара паралельних площин:**

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $y^2+a^2=0$; в) $y^2-a^2=0$.

**58. Порожня множина:**

а) $y^2 - a^2 = 0$; б) $y^2 + a^2 = 0$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

**59. Пара співпадаючих площин:**

а) $y^2 + a^2 = 0$; б) $y^2 = 0$; в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

## 11.5. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Показати, що площина $x - 2 = 0$ перетинає еліпсоїд $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ по еліпсу, знайти його півосі і вершини.

2. Встановити, яка лінія є перетином гіперболічного параболоїда $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = y$ площиною $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, і знайти її центр.

3. Встановити, яка лінія визначається рівняннями $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{z^2}{6} = 2z$, $3x - y + 6z - 14 = 0$, знайти її центр.

4. Встановити точки перетину поверхні $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ і прямої $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$.

5. Довести, що еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 2z$ має спільну точку з площиною $2x - 2y - z - 10 = 0$, і знайти її координати.

## 11.6. Самостійна робота

1. Установити, що площина $z + 1 = 0$ перетинає одно порожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1$ по гіперболі; знайти її півосі і вершини.

2. Встановити, яка лінія є перетином еліпсоїда $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ площиною $2x - 3y + 4z - 11 = 0$, і знайти її центр.

3. Встановити, яка лінія визначається рівняннями $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 2z$, $x - 2y + 2 = 0$, знайти її центр.

4. Встановити точки перетину поверхні $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ і прямої $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

5. Довести, що одно порожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ має спільну точку з площиною $5x+2z+5=0$, і знайти її координати.

6. Встановити, що площина $y+6=0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболі; знайти її параметр і вершину.

7. Встановити, яка лінія визначається рівняннями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$, $9x-5y+2z-28=0$, знайти її центр.

8. Встановити точки перетину поверхні $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ і прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

9. Встановити точки перетину поверхні $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=z$ і прямої $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

10. Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ має спільну точку з площиною $4x-3y+12z-54=0$, і знайти її координати.

# 12. ПРИКЛАДИ ПОВЕРХОНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ

## 12.1. Еліпсоїд дійсний

Рівняння еліпсоїда (рисунок 12.1):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{00} = 0,$$

або

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{00}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{a_{00}}{a_{11}}} + \frac{z^2}{-\frac{a_{00}}{a_{11}}} = 1,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тут $a, b, c$ - півосі еліпсоїда.

Запис еліпсоїда показує, що його можна отримати зі сфери рівномірним стисненням.

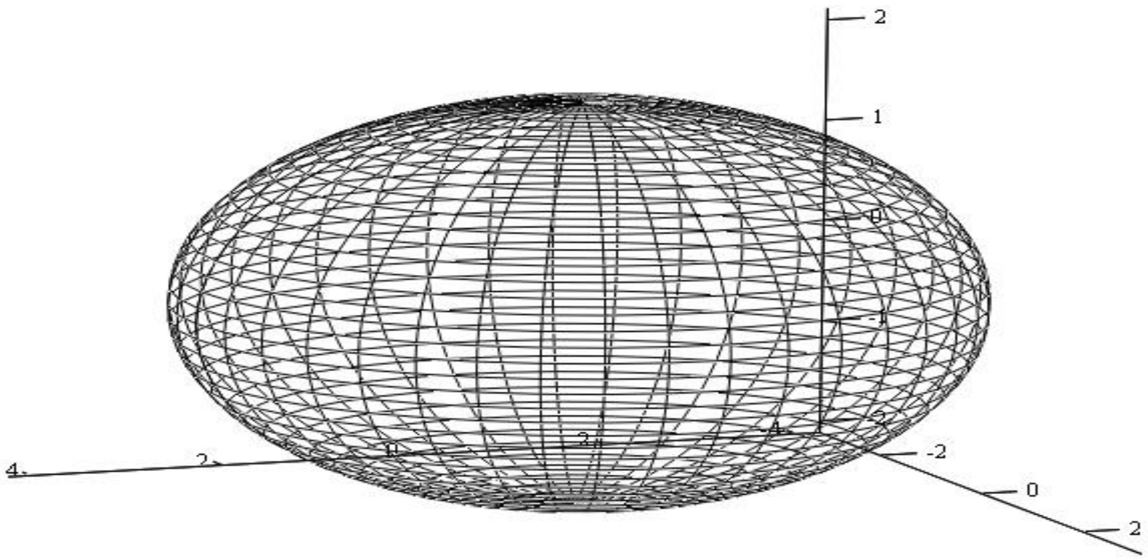



Рисунок. 12.1

Якщо дві півосі еліпсоїда рівні, наприклад $a = b$, То еліпсоїд називається еліпсоїдом обертання:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Дослідити таку поверхню обертання можна за допомогою площин рівня. Перетинаючи поверхню площиною, паралельною, наприклад, координатній площині $xOy$, отримаємо коло. Отже, еліпсоїд обертання утворюється при обертанні еліпса.

Лінії перетину еліпсоїда з довільною площиною є еліпси.

Якщо все півосі еліпсоїда рівні $(a=b=c=R)$, То еліпсоїд перетворюється в сферу:

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2=R^2.$$

## **12.2.** Еліпсоїд уявний

Рівняння уявного еліпсоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

## **12.3.** Гіперболоїд

Рівняння гіперболоїда має вигляд:

- для однопорожнинного (рисунок 12.2)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

- для двопорожнинного (рисунок 12.3)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

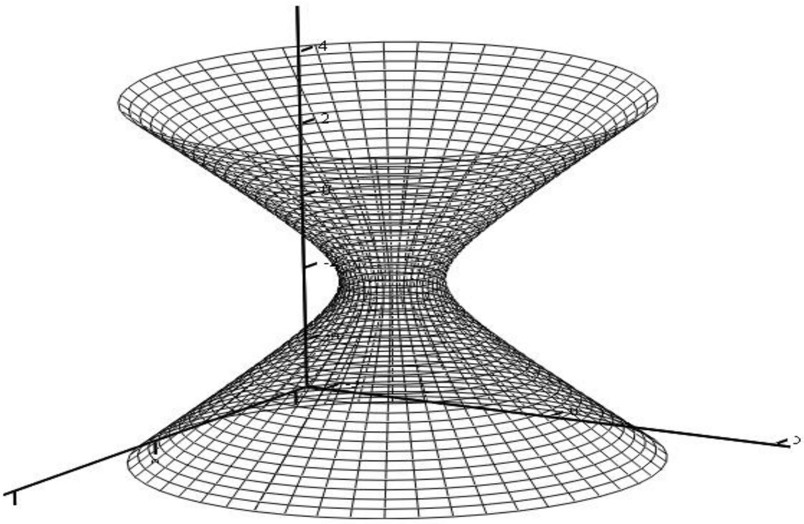


Рисунок. 12.2

Якщо півосі $a$ та $b$ гиперболоида рівні, то він називається гіперболоїдом обертання навколо осі $Oz$ гіперболи:

- в разі однопорожнинного гіперболоїда обертання:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

- в разі двупорожнинного гіперболоїда обертання:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,\ y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

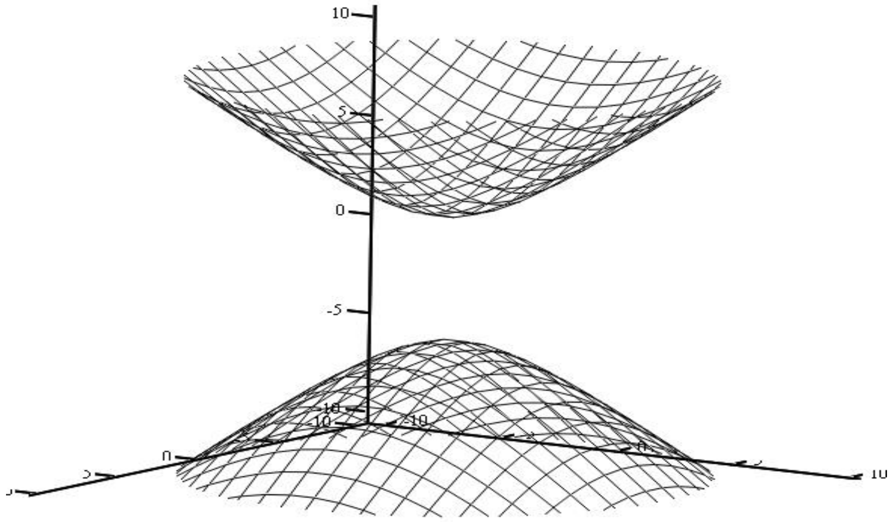



Рисунок. 12.3

Загальний гіперболоїд може бути отриманий з гіперболоїда обертання рівномірною деформацією відносно площини $xOy$ у відношені $b : a$.

Січні площини можуть перетинати гіперболоїд:

а) по еліпсу $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2};$$

б) по гіперболі $y = h$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2};$$

в) по двом прямим $y = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

**12.4.** Параболоїд

Рівняння параболоїда має вигляд:

- для еліптичного (рисунок 12.4)

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

- для гіперболічного (рисунок 12.5)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

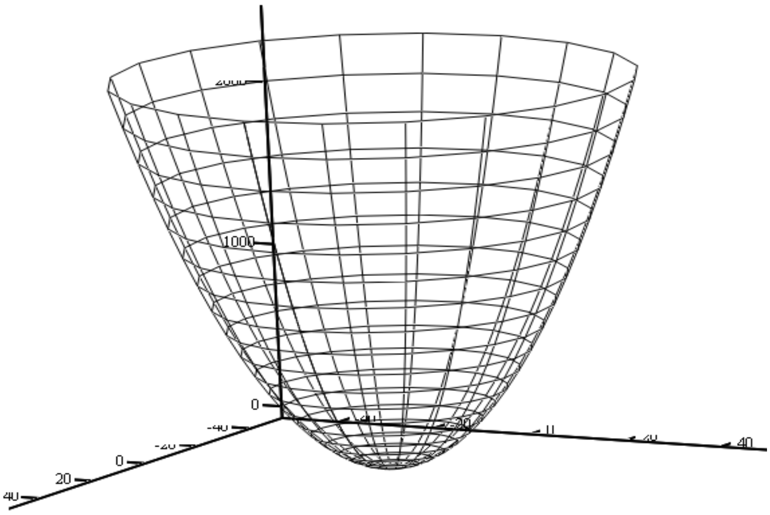



Рисунок. 12.4

Площини $xOz$ і $yOz$ називаються площинами симетрії параболоїда, а їх перетин (вісь $Oz$) називається віссю параболоїда. Перетин осі з поверхнею параболоїда називається вершиною.

При $a = b$ еліптичний параболоїд перетворюється в параболоїд обертання

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a^2}.$$

Загальний еліптичний параболоїд можна отримати з параболоїда обертання деформацією відносно площини $xOz$.

Обидва параболоїда паралельними площинами $xOz$ і $yOz$ перетинаються по паралельно розташованим параболам. Так, для еліптичного параболоїда при $z = h$ можна записати

$$z = \frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Змінюючи $h$, отримаємо ту ж саму параболу, але зміщену паралельно щодо початку координат.

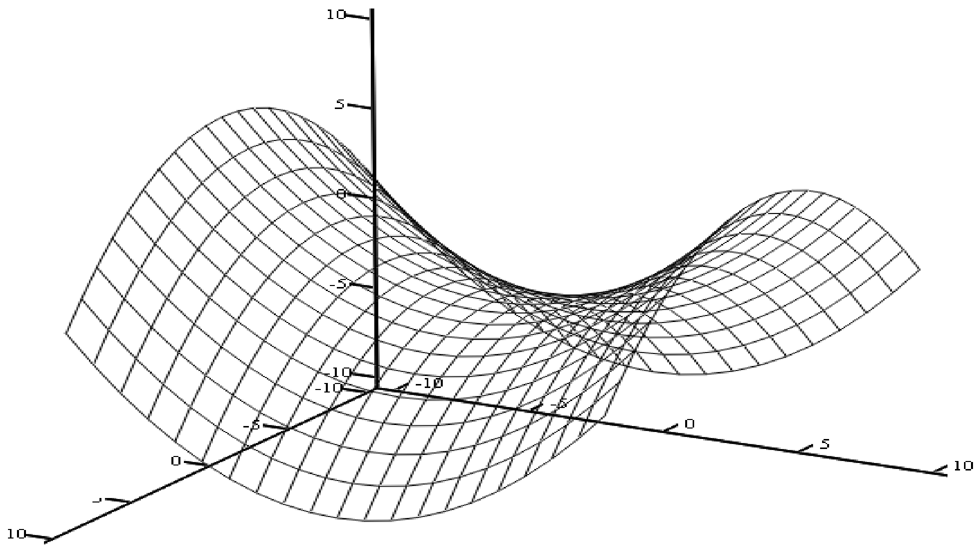



Рисунок. 12.5

Висновки:

1. Еліптичний параболоїд утворюється при паралельному зміщені параболи

$$z = \frac{y^2}{b^2},\ x = 0,$$

коли її вершина рухається уздовж параболи

$$z = \frac{x^2}{a^2},\ y = 0.$$

2. Гіперболічний параболоїд утворюється при паралельному зміщені параболи

$$z = -\frac{y^2}{b^2},\ x = 0,$$

коли її вершина рухається уздовж параболи

$$z = \frac{x^2}{a^2},\ y = 0.$$

3. При перетині гіперболоїда площиною в перетині отримуємо:

а) еліпс (перетин з еліптичних параболоїдом):

$$z = h \Rightarrow h = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

б) гіперболу (перетин з гіперболічним параболоїдом):

$$z = h \Rightarrow h = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

в) по двом прямим (перетин з гіперболічним параболоїдом):

$$z = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

г) по параболі:

$$x = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

## 12.5. Конус і циліндр

Для опису конусів і циліндрів існують такі формули:
- конус (рисунок 12.6):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

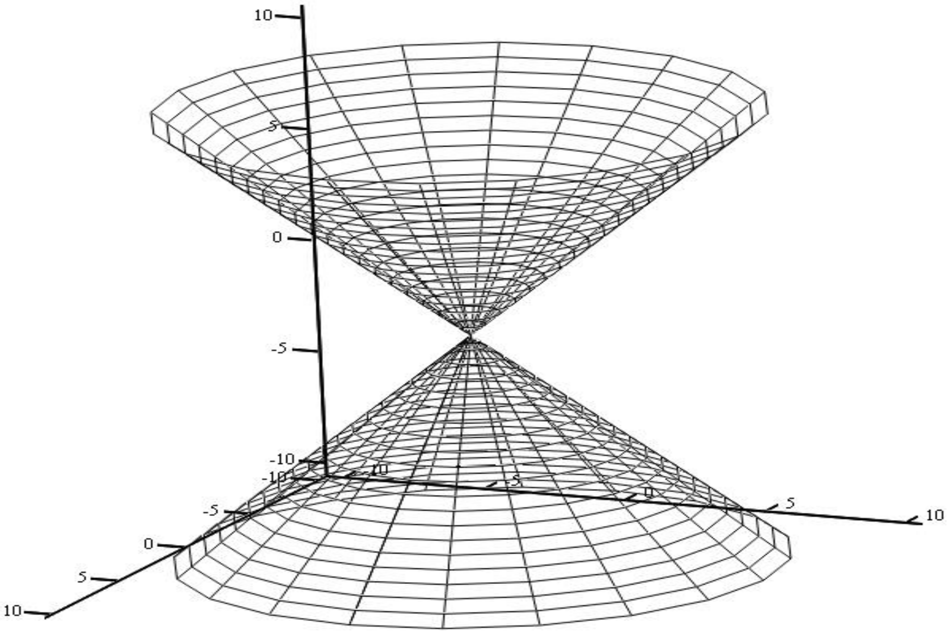



Рисунок. 12.6

- циліндр еліптичний (рисунок 12.7):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

- циліндр гіперболічний (рисунок 12.8):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

- циліндр параболічний (рисунок 12. 9):

$$\frac{x^2}{a^2} = Py.$$

при $a = b$ утворюються:

- для конуса - круговий конус $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$;

- для циліндра еліптичного - круговий циліндр $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$.

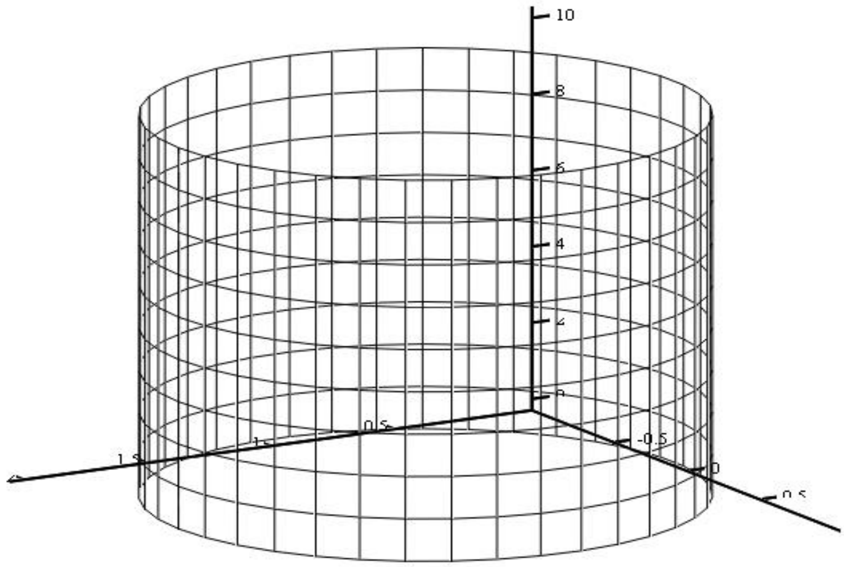


Рисунок. 12.7

*Зауваження.* Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, певним чином пов'язаний з однопорожнинним та двопорожнинним гіперболоїдами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

називається асимптотичним конусом. При цьому кожна площина, що проходить через вісь $Oz$, перетинає гіперболоїд по гіперболі, а конус - по прямим, які є асимптотами цих гіпербол.

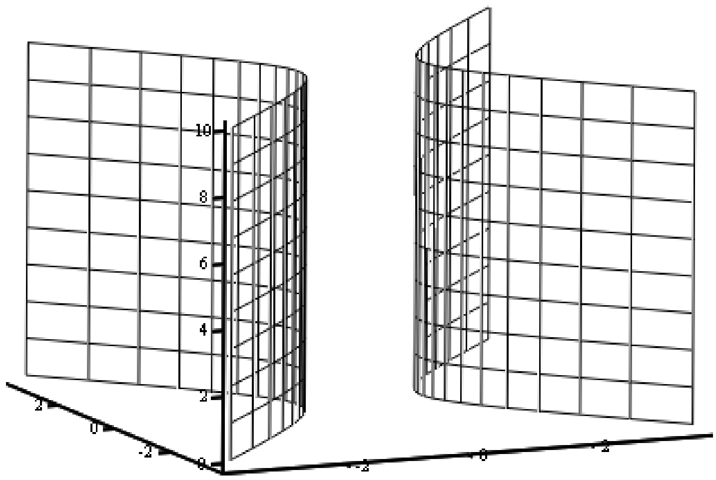


Рисунок. 12.8

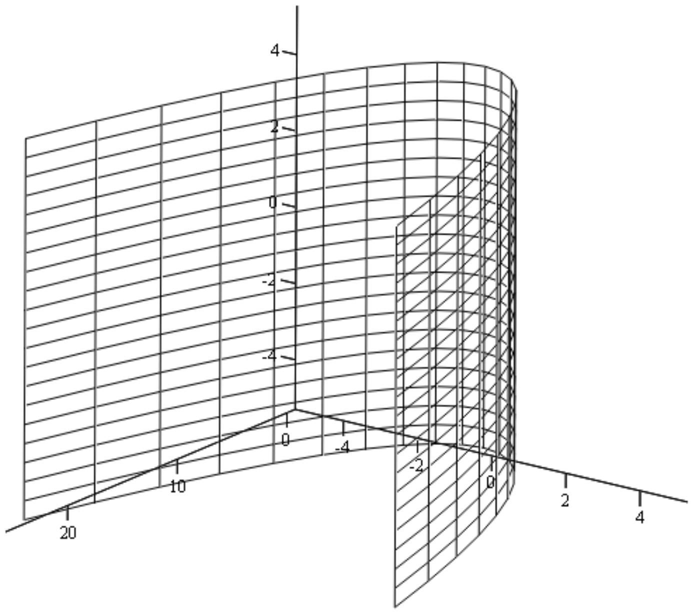


Рисунок. 12.9

## 12.6. Висновки

***1. Еліпсоїд дійсний:***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

*де* $a, b, c$ *- півосі еліпсоїда.*

*Якщо дві півосі еліпсоїда рівні, наприклад* $a=b$*, то еліпсоїд називається еліпсоїдом обертання:*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

*Лінії перетину еліпсоїда з довільною площиною є еліпси.*

*При* $a=b=c=R$ *еліпсоїд перетворюється в сферу:*

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

***2. Еліпсоїд уявний:***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

***3. Гіперболоїд:***

*а)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *- однопорожнинний;*

*б)* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ *- двопорожнинний.*

*Якщо півосі* $a$ *та* $b$ *гіперболоїда рівні, то він називається гіперболоїдом обертання (утворюється обертанням навколо осі* $Oz$ *гіперболи):*

*- в разі однопорожнинного гіперболоїда обертання:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

*- в разі двопорожнинного гіперболоїда обертання:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ y=0 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

*Січні площини можуть перетинати гіперболоїд:*

*а) по еліпсу* $z=h$*:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2};$$

*б) по гіперболі* $y=h$*:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{c^2};$$

*в) по двом прямим* $y=b$*:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

***4. Параболоїд:***

*а)* $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ *- еліптичний;*

*б)* $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ *- гіперболічний.*

*Площини* $xOz$ *і* $yOz$ *називаються площинами симетрії параболоїда, а їх перетин (вісь* $Oz$*) називається віссю параболоїда. Перетин осі з поверхнею параболоїда називається вершиною.*

*При* $a=b$ *еліптичний параболоїд перетворюється в параболоїд обертання*

$$z=\frac{x^2+y^2}{a^2}.$$

*Еліптичний параболоїд утворюється при паралельному переміщені параболи*

$$z=\frac{y^2}{b^2},\ x=0,$$

*коли її вершина рухається уздовж параболи*

$$z=\frac{x^2}{a^2},\ y=0.$$

*Гіперболічний параболоїд утворюється при паралельному переміщені параболи*

$$z=-\frac{y^2}{b^2},\ x=0,$$

*коли її вершина рухається уздовж параболи*

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \; y = 0.$$

*При перетині гіперболоїда площиною в перетині отримуємо:*

*а) еліпс (перетин еліптичних параболоїдом):*

$$z = h \Rightarrow h = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

*б) гіперболу (перетин з гіперболічним параболоїдом):*

$$z = h \Rightarrow h = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

*в) дві прямі (перетин з гіперболічним параболоїдом):*

$$z = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

*г) параболу:*

$$x = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{y^2}{b^2}.$$

***5. Конус і циліндр*** *можна описати наступними рівняннями:*

*а)* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ *- конус;*

*б)* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *- циліндр еліптичний;*

*в)* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *- циліндр гіперболічний;*

*г)* $\frac{x^2}{a^2} = Py$ *- циліндр параболічний.*

*При* $a = b$ *утворюються:*

*- для конуса - круговий конус*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

*- для циліндра еліптичного - круговий циліндр*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1.$$

*Конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

*який певним чином пов'язаний з однопорожнинним і двупорожнинним гіперболоїдами*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

*називається асимптотичним конусом. При цьому кожна площина, що проходить через вісь $Oz$, перетинає гіперболоїд по гіперболі, а конус - за прямими, які є асимптотами цих гіпербол.*

## 12.7. Питання для перевірки

**1. Канонічне рівняння еліпсоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**2. Канонічне рівняння однопорожнинного гиперболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**3. Канонічне рівняння двупорожнинного гиперболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**4. Канонічне рівняння еліптичного параболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$; в) $y^2-2px=0$.

**5. Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$; в) $y^2-2px=0$.

**6. Канонічне рівняння конуса:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

**7. Канонічне рівняння еліптичного циліндра:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

**8. Канонічне рівняння гіперболічного циліндра:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

## 12.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Написати рівняння поверхні кулі: а) з центром в точці $(2;\ -1;\ 3)$ і радіусом $R=6$; б) з центром в точці $(0;\ 0;\ 0)$ і що проходить через точку $(6;\ -2;\ 3)$; в) з центром в точці $(1;\ 4;\ -7)$ і що торкається площини $3x+6y-7z+42=0$; г) з центром в точці $(6;\ -8;\ 3)$ і що торкається осі $Oz$.

2. Через вісь $x$ провести дотичні площини до сфери $(x+5)^2+(y-8)^2+$
$+(z+1)^2=16$.

3. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться на початку координат, а напрямна лінія задана рівняннями $\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2=9; \\ z=4. \end{cases}$

4. Напрямна лінія циліндра задана рівняннями $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$ а його твірна перпендикулярна до площини напрямної. Скласти рівняння циліндра.

5. Знайти точки перетину поверхні $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ з прямою $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$.

6. Знайти центр і радіус кола $\begin{cases} (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36, \\ 3x+y-z-9=0. \end{cases}$

7. До сфери $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ провести дотичні площини, паралельні площині $16x-11y-2z+3=0$.

8. У площині $xOy$ лежить парабола; вершина її збігається з початком координат, вісь - з додатнім напрямком осі абсцис, а параметр $p=2$. Скласти рівняння конуса, прийнявши цю параболу за направляючу лінію і вибравши вершину в точці $(0;\ 0;\ 8)$.

9. Знайти кут між твірною і віссю конуса $x^2+y^2-\frac{z^2}{6}=0$.

10. Знайти точки перетину поверхні $\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=-1$ з прямою $\frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-6}{3}$.

## 12.9. Самостійна робота

### *12.9.1. Кінематичні лінійчаті поверхні*

Виявляється, що поверхні:
- конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

- циліндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

- гіперболічний параболоїд

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

- однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

є поверхнями 2-го порядку, які містять прямі, що утворюють ці поверхні.

Поверхні, які пов'язані при їх отриманні з будь-яким геометричним образом, представляють певний інтерес з точки зору їх конструювання. Для вказаних поверхонь можна взяти пряму, переміщати її в просторі, і безліч положень прямої утворює поверхню.

*Визначення.* Поверхня, отримана в результаті переміщення геометричного образу, називається кінематичною поверхнею.

*Визначення.* Поверхня, що представляє собою безперервну множину окремих положень прямої, що переміщається, називається лінійчатою кінематичною поверхнею.

Для однозначного завдання поверхні необхідно вказати умови, як переміщати пряму. В силу цього кінематичні поверхні (лінійчаті) підрозділяються на різні класи:

- конічні;
- циліндричні;
- поверхні Каталана;
- кінематичні лінійчаті поверхні загального виду.

### *12.9.2. Практика для самостійної роботи*

1. Скласти рівняння поверхні кулі, знаючи, що вона проходить через точку $(0;\ -3;\ 1)$ і перетинає площину $Oxy$ по колу $\begin{cases} x^2+y^2=16; \\ z=0. \end{cases}$

2. Написати рівняння сфери, яка дотична до прямої $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{6}=\frac{z-6}{4}$ в точці $(1;\ -4;\ 6)$ і прямій $\frac{x-4}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-6}$ в точці $(4;\ -3;\ 2)$.

3. Напрямна лінія конуса задана рівняннями $\begin{cases} 3x^2+6y^2-z=0; \\ x+y+z=1, \end{cases}$ а вершина конуса знаходиться в точці $(-3;\ 0;\ 0)$. Скласти рівняння конуса.

4. Через точку $(5;\ 1;\ 2)$ провести пряму так, щоб вона перетнула поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ лише в одній точці.

5. Знайти точки перетину поверхні $4z=x^2-4y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{-2}$.

6. Знайти прямі, що проходять через точку $(6;\ 2;\ 8)$ і що лежать цілком на поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$.

7. На параболоїда $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ знайти прямолінійні утворюючі, паралельні площині $3x+2y-4z=0$.

*Матриці. Види матриць. Основні операції над матрицями. Додавання матриць. Множення матриці на число. Лінійні властивості матриць. Множення матриці на матрицю. Властивості добутку матриць. Транспонування матриць. Обернена матриця. Союзна матриця. Матрична форма запису лінійних рівнянь*

## 13. МАТРИЦІ

Матриці широко використовують для розв’язку різних задач.

У лінійної алгебри використовується визначення матриці як прямокутної таблиці.

**Def. Прямокутною матрицею порядку** $m$ **на** $n$ $(m\times n)$ **будемо називати множину чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці, що має** $m$ **рядків і** $n$ **стовпців.**

Числа, що складають матрицю, називаються її елементами.

Матриці прийнято записувати в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Матриці позначають великими літерами $A,B,C,\dots$ або малими: $(a_{ij})$, $\|a_{ij}\|$, де $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$. Елементи матриці записують так: $a_{ij}$, $[A]_{ij}$, $A(i,j)$, $A[i,j]$, де $i$ - індекс рядка; $j$ - індекс стовпця.

### 13.1. Види матриць

Як було вже зазначено, матриця, що складається з $m$ рядків і $n$ стовпців, називається прямокутною матрицею порядку $m\times n$.

Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців $m=n$, То матриця називається **квадратною** порядку $n$. Серед квадратних матриць виділяють **діагональні** матриці.

**Def. Діагональна матриця - це квадратна матриця, всі елементи якої з різними індексами** $(i\neq j)$ **дорівнюють нулю:**

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Def. Діагональна матриця, всі відмінні від нуля елементи якої рівні між собою** $(d_{11}=d_{22}=\dots=d_{nn}=\lambda)$**, називається скалярною:**

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Якщо $\lambda = 1$, то матриця називається одиничною і позначається Е:**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розрізняють також такі матриці:

**- матриця-стовпець**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix};$$

**- матриця-рядок**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix};$$

**- матриця-елемент** - матриця, що складається з одного числа:

$$\left(a_{11}\right).$$

*Зауваження.* Необхідно також виділити і нульову матрицю - матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$\Theta_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

## 13.2. Основні операції над матрицями

**Def. Дві матриці вважаються рівними, якщо відповідно рівні число рядків, число стовпців і елементи з однаковими індексами рівні.**

До основних операцій над матрицями можна віднести:

- додавання матриць;
- множення матриці на число;
- добуток двох матриць;
- транспонування матриці.

*13.2.1. Додавання матриць*

**Def. Сумою двох матриць порядку $m \times n$ називають матрицю порядку $m \times n$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць доданків.**

Отже, $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

ПРИКЛАД:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

*13.2.2. Множення матриці на число*

**Def. Добутком матриці порядку $m \times n$ на задане число називають матрицю порядку $m \times n$, елементи якої дорівнюють добутку елементів заданої матриці на задане число.**

Отже, $C = \alpha A \Rightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

ПРИКЛАД:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}.$$

*13.2.3. Лінійні властивості матриць*

Щодо розглянутих операцій над матрицями по аналогії з векторами мають місце вісім аксіом лінійності:

| | |
|---|---|
| 1) $A + B = B + A$ | - комутативність додавання; |
| 2) $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ | - асоціативність додавання; |
| 3) $A + \Theta = A$ | - існування нейтрального елемента щодо додавання; |
| 4) $A + A^* = \Theta$ | - існування симетричної матриці щодо додавання; |
| 5) $1 \cdot A = A$ | - множення на одиницю; |
| 6) $\lambda \cdot \mu \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ | - асоціативність множення; |
| 7) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ | - дистрибутивність щодо додавання векторів; |
| 8) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ | - дистрибутивність щодо множення на число. |

Отже, матриця є елементом лінійного простору.

*Зауваження.* Альтернативна термінологія щодо властивостей:

- комутативність - перестановка;
- асоціативні - сполучні;
- дистрибутивні - розподільні.

### *13.2.4. Множення матриці на матрицю*

**Def. Добутком матриці $A$ порядку $m \times p$ і матриці $B$ порядку $p \times n$ будемо називати матрицю $C$ порядку $m \times n$, в якій кожен елемент $i$-го рядка $j$-го стовпця дорівнює сумі добутків елементів $i$-го рядка матриці $A$ і відповідних елементів $j$-го стовпця матриці $B$.**

Отже,

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} .$$

Кажуть, що множення матриць відбувається за правилом «рядок на стовпець».

ПРИКЛАД:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

У цьому прикладі порядок першої матриці становить 2 × 3, другий - 3 × 2, результуючої матриці - 2 × 2.

*Висновок.* Добуток $AB$ визначено тільки тоді, коли число стовпців матриці $A$ дорівнює числу рядків матриці $B$. При цьому число рядків матриці $AB$ дорівнює числу рядків матриці $A$, число стовпців матриці $AB$ дорівнює числу стовпців матриці $B$.

### *13.2.5. Властивості добутку матриць*

1. Сполучна властивість (асоціативний закон).

Якщо визначені добутки $AB$ і $BC$, то

$$(AB)C = A(BC).$$

2. Розподільні властивості (дистрибутивний закон).

Якщо визначені добутки $AC$ і $BC$, то

$$(A + B)C = AC + BC .$$

Якщо визначені добутки $CA$ і $CB$, то

$$C(A + B) = CA + CB .$$

3. Якщо добуток матриць $A$ і $B$ визначено, то для будь-якого числа $\lambda$ має місце

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

4. У загальному випадку добуток матриці не комутативний, тобто якщо визначено добуток $AB$ і $AB$, то

$$AB \neq BA.$$

Тому, визначаючи добуток матриць, розрізняють праве множення і ліве множення.

Існують також матриці, для яких $AB = BA$.

**Def. Матриці, для яких виконується рівність $AB = BA$, називаються комутативними.**

ПРИКЛАД. Матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ є комутативними, тому що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Зауваження.* Добутком двох ненульових матриць може бути нульова матриця.

*Зауваження.* Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:

$$det(AB) = det\, A\, det\, B\,.$$

### *13.2.6. Транспонування матриць*

**Def. Транспонованою матрицею до заданої називають матрицю, в якій рядки і стовпці переставлені місцями щодо заданої матриці.**

Позначається $A^T$, отже

$$A^T \Rightarrow \left(a_{ij}\right)^T = a_{ji}.$$

ПРИКЛАД:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонованих матриць:

1. Транспонування суми дорівнює сумі транспонованих матриць:

$$(A + B)^T = A^T + B^T\,.$$

2. Транспонування добутку числа і матриці дорівнює добутку числа і транспонованої матриці:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T\,.$$

3. Транспонування правого добутку матриць дорівнює лівому добутку транспонованих матриць:

$$(AB)^T = B^T A^T\,.$$

## 13.3. Обернена матриця

Серед квадратних матриць особливу роль відіграє одинична матриця, бо добуток одиничної матриці на задану матрицю дорівнює заданій матриці:

$$EA = AE = A\,.$$

**Def. Обернена матриця - це матриця, добуток якої справа або зліва на задану матрицю дорівнює одиничній матриці.**

Позначення оберненої матриці: $A^{-1}$.

З визначення оберненої матриці випливає, що

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$
тобто обернена матриця є комутативною.

Важливим є те, що визначник матриці, для якої будується обернена матриця, і визначник оберненої матриці, не дорівнюють нулю.

***Теорема.*** **Якщо до матриці $A$ існує обернена матриця, то її визначник не дорівнює нулю.**

Доказ заснований на твердженні, що визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:
$$det\left(AA^{-1}\right) = det\,A det\,A^{-1} = det\,E.$$

Оскільки $\det E = 1$, $\det A \neq 0$.

**Def. Матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається невиродженою. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається виродженою.**

*Висновок.* Обернена матриця є не виродженою матрицею і будується тільки для не виродженої матриці.

### *13.3.1. Союзна матриця*

Розглянемо деяку не вироджену квадратну матрицю порядку $n$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Складемо нову матрицю з алгебраїчних доповнень кожного елемента матриці $A$:
$$A\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перетворимо її в транспоновану:
$$A^{T}\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Така матриця називається союзної матрицею і позначається $A^*$.

**Def. Союзною матрицею будемо називати матрицю, створену з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів заданої матриці, і транспоновану по тому**. Отже,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Союзну матрицю називають також приєднаною.

*13.3.2. Побудова оберненої матриці*

***Теорема 1.*** **Добуток не вироджених квадратної матриці $A$ і союзної матриці є комутативним і дорівнює добутку одиничної матриці на визначник матриці $A$:**

$$AA^* = A^*A = E\,det\,A.$$

◄ Для прикладу розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток цих матриць:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} det\,A & 0 & 0 \\ 0 & det\,A & 0 \\ 0 & 0 & det\,A \end{pmatrix} = det\,A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = det\,A \cdot E\,.$$

Отже,

$$AA^* = E\,det\,A.$$

Аналогічно можна показати, що

$$A^*A = E\,det\,A.$$

Теорема доведена.

Тут використовується твердження, що значення визначника *n*-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або стовпця і їх алгебраїчних доповнень, а також теорема, що сума добутків всіх елементів деякого рядка (стовпця) визначника і алгебраїчних доповнень відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю. ▶

***Теорема 2.*** **Не вироджена матриця $A$ має обернену матрицю $A^{-1}$, яка визначається як**

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A} A^{*},$$

тобто обернена матриця дорівнює добутку союзної матриці і оберненої величини визначника матриці.

◀ За попередньою теоремою

$$AA^{*} = A^{*}A = E\,det\,A,$$

звідки

$$A\frac{1}{det\,A}A^{*} = E \Rightarrow A\left(\frac{1}{det\,A}A^{*}\right) = E,$$

$$\frac{1}{det\,A}A^{*}A = E \Rightarrow \left(\frac{1}{det\,A}A^{*}\right)A = E.$$

Отже, отримуємо

$$A\left(\frac{1}{det\,A}A^{*}\right) = \left(\frac{1}{det\,A}A^{*}\right)A = E,$$

звідки

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}A^{*}. \ ▶$$

ПРИКЛАД. Побудувати обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

*Розв'язок*

Обчислюємо визначник матриці: $det\,A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$.

Визначаємо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3,$$
$$A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1.$$

Отже,

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{det\,A}A^{*} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 1\cdot 3 & -2\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ \frac{3}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 3 & \frac{3}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: Обернена матриця $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

### 13.4. Матрична форма лінійних рівнянь

Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_{n1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді одного матричного рівняння:

$$AX = B.$$

Таке рівняння називається матричної формою системи лінійних рівнянь.

Нехай матричне рівняння має розв'язок

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \ldots \\ l_n \end{pmatrix}.$$

Тоді виконується рівність

$$AL = B.$$

Нехай $A$- не вироджена квадратна матриця. Помножимо обидві частини рівності зліва на обернену матрицю $A^{-1}$:

$$A^{-1}AL = A^{-1}B \Rightarrow EL = A^{-1}B \Rightarrow L = A^{-1}B.$$

Це матричний запис розв'язку системи лінійних рівнянь.

ПРИКЛАД. Розв'язати матричні рівняння:

а) $XA = B$; Розв'язок: $L = BA^{-1}$;

б) $AXC = B$; Розв'язок: $L = A^{-1}BC^{-1}$.

## 13.5. Висновки

***Def. Прямокутною матрицею порядку** $m$ **на** $n$ $(m \times n)$ **будемо називати множину чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці, що має** $m$ **рядків і** $n$ **стовпців.***

*Числа, що складають матрицю, називаються її елементами.*

*Матриці прийнято записувати в такому вигляді:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

*Матриці позначають великими літерами A, B, C,... або малими:* $(a_{ij})$, $\|a_{ij}\|$, *де* $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. *Елементи матриці записують так:* $a_{ij}$, $[A]_{ij}$, $A[i, j]$, *де* $i$ *- індекс рядка;* $j$ *- індекс стовпця.*

*Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців* $(m = n)$, *То матриця називається **квадратною** порядку* $n$.

***Def. Діагональна матриця - це квадратна матриця, всі елементи якої з різними індексами** $(i \neq j)$ **дорівнюють нулю.***

***Def. Діагональна матриця, всі відмінні від нуля елементи якої рівні між собою** $(d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = \lambda)$, **називається скалярною:***

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

*Якщо* $\lambda = 1$, *то матриця називається одиничною і позначається E:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розрізняють також такі матриці:*

*- матриця-стовпець*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix};$$

*- матриця-рядок* $(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$;

*- матриця-елемент - матриця, що складається з одного числа:* $(a_{11})$.

*Існує також нульова матриця - матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.*

***Def. Дві матриці вважаються рівними, якщо відповідно рівні число рядків, число стовпців і елементи з однаковими індексами рівні.***

***Def. Сумою двох матриць порядку*** $m \times n$ ***називають матрицю порядку*** $m \times n$***, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць доданків.***

*Отже,* $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

***Def. Добутком матриці порядку*** $m \times n$ ***на число називають матрицю порядку*** $m \times n$***, елементи якої дорівнюють добутку елементів заданої матриці на число.***

*Отже,* $C = \alpha A \;\Rightarrow\; c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

*Щодо операцій додавання матриць і множення матриці на число мають місце по аналогії з векторами вісім аксіом лінійності:*

| | |
|---|---|
| 1) $A + B = B + A$ | *- комутативність додавання;* |
| 2) $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ | *- асоціативність додавання;* |
| 3) $A + \Theta = A$ | *- існування нейтрального елемента щодо додавання;* |
| 4) $A + A^* = \Theta$ | *- існування симетричної матриці щодо додавання;* |
| 5) $1 \cdot A = A$ | *- множення на одиницю;* |
| 6) $\lambda \cdot \mu \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ | *- асоціативність множення;* |
| 7) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ | *- дистрибутивність щодо додавання векторів;* |
| 8) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ | *- дистрибутивність щодо множення на число.* |

*Отже, матриця є елементом лінійного простору.*

*Зауваження. Альтернативна термінологія щодо властивостей:*

*- комутативність - перестановка;*

*- асоціативні - сполучні;*

*- дистрибутивні - розподільні.*

**Def.** ***Добутком матриці*** $A$ ***порядку*** $m \times p$ ***і матриці*** $B$ ***порядку*** $p \times n$ ***будемо називати матрицю*** $C$ ***порядку*** $m \times n$***, в якій кожен елемент*** $i$***-го рядка*** $j$***-го стовпця дорівнює сумі добутків елементів*** $i$***-го рядка матриці*** $A$ ***і відповідних елементів*** $j$***-го стовпця матриці*** $B$***,*** *отже*

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} .$$

*Кажуть, що множення матриць відбувається за правилом «рядок на стовпець».*

*Висновок. Добуток* $AB$ *визначено тільки тоді, коли число стовпців матриці* $A$ *дорівнює числу рядків матриці* $B$*. При цьому число рядків матриці*

*$AB$ дорівнює числу рядків матриці $A$, число стовпців матриці $AB$ дорівнює числу стовпців матриці $B$.*

*Властивості добутку матриць:*

*1. Сполучна властивість (асоціативний закон):*

$$(AB)C = A(BC).$$

*2. Розподільні властивості (дистрибутивний закон):*

$$(A+B)C = AC + BC;$$

$$C(A+B) = CA + CB.$$

*3. Якщо добуток матриць $A$ і $B$ визначено, то для будь-якого числа $\lambda$ має місце*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

*4. У загальному випадку добуток матриці не комутативний, тобто якщо визначено добутку $AB$ і $AB$, то*

$$AB \neq BA.$$

*Розрізняють праве множення і ліве множення матриць.*

**Def.** ***Матриці, для яких виконується рівність $AB = BA$, називаються комутативними.***

*Зауваження. Добутком двох ненульових матриць може бути нульова матриця.*

*5. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць:*

$$det(AB) = det\,A\,det\,B.$$

**Def.** ***Транспонованою матрицею називають матрицю, в якій рядки і стовпці переставлені місцями щодо заданої матриці.***

*позначається $A^T$. отже, $A^T \Rightarrow (a_{ij})^T = a_{ji}$.*

*Властивості транспонованих матриць:*

*1. Транспонування суми дорівнює сумі транспонованих матриць:*

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

*2. Транспонування добутку числа і матриці дорівнює добутку числа і транспонованої матриці:*

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

*3. Транспонування правого добутку матриць дорівнює лівому добутку транспонованих матриць:*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

***Def. Матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається невиродженою. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається виродженою.***

***Def. Обернена матриця - це така не вироджена матриця, добуток якої справа або зліва на задану матрицю дорівнює одиничній матриці.***

*Позначення оберненої матриці: $A^{-1}$.*

*З визначення оберненої матриці випливає, що*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E,$$

*тобто обернена матриця є комутативною.*

**Def.** ***Союзною матрицею будемо називати матрицю, складену з алгебраїчних доповнень для відповідних елементів вихідної матриці, а потім транспоновану:***

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Союзну матрицю називають також приєднаною.*

***Теорема 1. Добуток любої не виродженої квадратної матриці $A$ і її союзної матриці є комутативним і дорівнює добутку одиничної матриці на визначник матриці $A$:***

$$AA^* = A^*A = E \det A.$$

***Теорема 2. Не вироджена матриця $A$ має обернену матрицю $A^{-1}$, яка визначається як***

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*,$$

*тобто обернена матриця дорівнює добутку союзної матриці і оберненої величини визначника матриці.*

*Розглянемо систему $n$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

*Введемо позначення:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

*Тоді систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді одного матричного рівняння: $AX = B$.*

*Таке рівняння називається матричної формою системи лінійних рівнянь.*

*Матричний запис розв'язку системи лінійних рівнянь має вигляд*

$$L = A^{-1}B.$$

## 13.6. Питання для перевірки

**1. Прямокутна матриця порядку $n \times m$ - це прямокутна таблиця, що складається:**

а) з *nm* елементів; б) з елементів, розташованих в *m* рядках і *n* стовпчиках; в) з елементів, розташованих в *n* рядках і *m* стовпцях.

**2. Нульова матриця - це:**

а) матриця, елементи якої по діагоналі дорівнюють нулю; б) матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю; в) квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.

**3. Квадратна матриця - це:**

а) матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості стовпців; б) матриця, елементи якої рівні квадратам елементів заданої матриці; в) матриця, визначник якої дорівнює квадрату певного числа.

**4. Одинична матриця - це:**

а) квадратна матриця, елементи головної діагоналі якого дорівнюють одиниці, а всі інші - нулю; б) квадратна матриця, елементи якої дорівнюють одиниці; в) квадратна матриця, визначник якої дорівнює одиниці.

**5. Позначення одиничної матриці:**

а) $E^{-1}$ ; б) (1); в) Е.

**6. Трикутна матриця - це квадратна матриця, в якій всі елементи, що розташовані нижче головної діагоналі:**

а) не рівні нулю; б) дорівнюють нулю; в) можуть бути рівні нулю.

**7. Дві матриці вважаються рівними, якщо:**

а) рівні число рядків, число стовпців і рівні елементи з однаковими індексами; б) рівні елементи з однаковими індексами; в) рівні визначники.

**8. Сумою двох матриць порядку $n\times p$ і $p\times m$ є:**

а) матриця порядку $n\times m$; б) матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць; в) такої матриці не існує.

**9. Добуток числа на матрицю порядку $n\times m$- це матриця порядку $n\times m$, отримана з заданої множенням:**

а) елементів вибраного рядка на число; б) кожного елемента на число;
в) елементів вибраного стовпця на число.

**10. Чи виконуються вісім аксіом, що визначають лінійний простір, щодо матриць:**

а) ні; б) так; в) не всі?

**11. Умова можливості множення двох матриць:**

а) кількість рядків першої матриці дорівнює кількості стовпців другого матриці; б) кількість елементів стовпців першої матриці дорівнює кількості елементів рядків другий матриці; в) кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

**12. Добутком матриці А на матрицю В називають матрицю С, в якій кожен елемент:**

а) і-го стовпця і k-го рядка дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка матриці А та відповідних елементів k-го стовпця матриці В; б) і-го рядка і k-го стовпця дорівнює сумі добутків елементів і-го стовпця матриці А і відповідних елементів k-го рядка матриці В; в) і-го рядка і k-го стовпця дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка матриці А та відповідних елементів k-го рядка матриці В.

**13. У загальному випадку для матриць комутативний закон щодо множення:**

а) не виконується; б) виконується; в) виконується при певних умовах.

**14. Матриці, щодо яких при множенні виконується перестановочний закон, називаються:**

а) комутативними; б) перестановочними; в) універсальними.

**15. Визначник добутку двох матриць:**

а) не дорівнює добутку визначників цих матриць; б) дорівнює добутку визначників цих матриць; в) за певних умов дорівнює добутку визначників цих матриць.

**16. Чому дорівнює $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{\mathrm{T}}$ :**

а) $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$; б) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ **;** в) $\mathrm{ABT}$ **?**

**17. Чому дорівнює $(A+B)^{T}$ :**

а) $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$; б) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$; в) $\mathrm{ABT}$ **?**

**18. Чому дорівнює $(\lambda\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$ :**

а) $\lambda\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$; б) $\lambda^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ **;** в) $\lambda\mathrm{AT}$ **?**

**19. Матриця, обернена до заданої квадратичної матриці, - це:**

а) така не вироджена комутативна матриця, добуток якої на задану матрицю дорівнює одиничній матриці; б) така вироджена не комутативна матриця, добуток якої на задану матрицю дорівнює одиничній матриці; в) така не вироджена не комутативна матриця, добуток якої на задану матрицю дорівнює одиничній матриці.

**20. Якщо матриця має обернену матрицю, то її визначник:**

а) не дорівнює нулю; б) дорівнює нулю;в) дорівнює одиниці.

**21. Приєднана, або союзна, матриця - це:**

а) матриця, до якої приєднується додаткова матриця; б) матриця, елементами i-го рядка і k-го стовпця якої служать алгебраїчні доповнення елементів k-го рядка і i-го стовпця заданої матриці;в) матриця, елементами i-го рядка і k-го стовпця якої служать мінори елементів k-го рядка і i-го стовпця заданої матриці.

**22. Матрична форма системи лінійних рівнянь:**

а) $AX=B$; б) $\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_1=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_1=b_2; \end{matrix}$ в) $x_i\Delta=\Delta_i$.

**23. Розв'язок матричного рівняння $AX=B$ є:**

а) $X=BA^{-1}$; б) $X=A^{-1}B$; в) $X=\dfrac{B}{A}$.

**24. Розв'язок матричного рівняння $XA=B$ є:**

а) $X=A^{-1}B$; б) $X=BA^{-1}$; в) $X=\dfrac{B}{A}$.

**25. Розв'язок матричного рівняння $AXB=C$ є:**

а) $X=ACB$; б) $X=\dfrac{C}{AB}$; в) $X=A^{-1}CB^{-1}$.

## 13.7. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

### *13.7.1. Задачі для розв'язку в аудиторії*

1. Обчислити лінійну комбінацію матриць $3A+2B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити $AA^T$ і $A^TA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Методом приєднаної матриці знайти обернені матриці для наступних матриць: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричні рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

### *13.7.2. Домашнє завдання*

1. Обчислити лінійну комбінацію матриць $(1+i)A+(1-i)B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити $AA^T$ і $A^T A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Методом приєднаної матриці знайти обернену матрицю для матриці $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

## 13.8. Самостійна робота

1. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, $\lambda \in R$.

5. Обчислити $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

6. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=3x^2-2x+5$ і $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Обчислити $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Методом приєднаної матриці знайти обернену матрицю для матриці $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

10. Розв'язати матричне рівняння $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

*Схема класифікації систем лінійних рівнянь. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць. Визначення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень. Визначення рангу матриці методом оточення мінорів. Обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень. Твердження про базисні мінори*

## 14. СХЕМА КЛАСИФІКАЦІЇ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Виходячи з матричної форми системи лінійних рівнянь

$$AX = B$$

можна ввести такі визначення.

**Def. Якщо для матриці системи $A$ виконується умова $m = n$, то система називається квадратною, якщо $m \neq n$, то прямокутною.**

**Def. Якщо B=Θ (Θ нульова матриця), то система називається однорідною, якщо $B \neq \Theta$, то неоднорідною.**

**Def. Розв’язком матричного рівняння є така матриця $L$, що складається з певних елементів, при підстановці якої замість $X$ рівняння перетворюється на тотожність.**

Якщо розглядати однорідну систему $AX = \Theta$, то така система завжди сумісна, тому що вона має нульовий розв’язок, тобто $L = \Theta$. При цьому система може мати і інші розв’язки.

ПРИКЛАДИ квадратних систем лінійних рівнянь:

1. Система неоднорідна, сумісна, визначена:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв’язки: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

2. Система неоднорідна, сумісна, невизначена:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Фактично система складається з одного рівняння з двома невідомими. Таке рівняння має безліч розв’язків: $x_2 = 2 - x_1$.

І для будь-якої константи $C = const$ маємо розв’язки $x_1 = C$, $x_2 = 2 - C$.

3. Система неоднорідна, несумісна:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

Не може сума двох змінних одночасно дорівнювати двом різним значенням. Розв’язок: порожня множина.

4. Система однорідна, сумісна, визначена:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв’язки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

5. Система однорідна, сумісна, невизначена:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв’язки: $x_1 = C$, $x_2 = -C$.

Перелічені визначення і приклади дозволяють певним чином класифікувати системи рівнянь (рисунок 14.1).

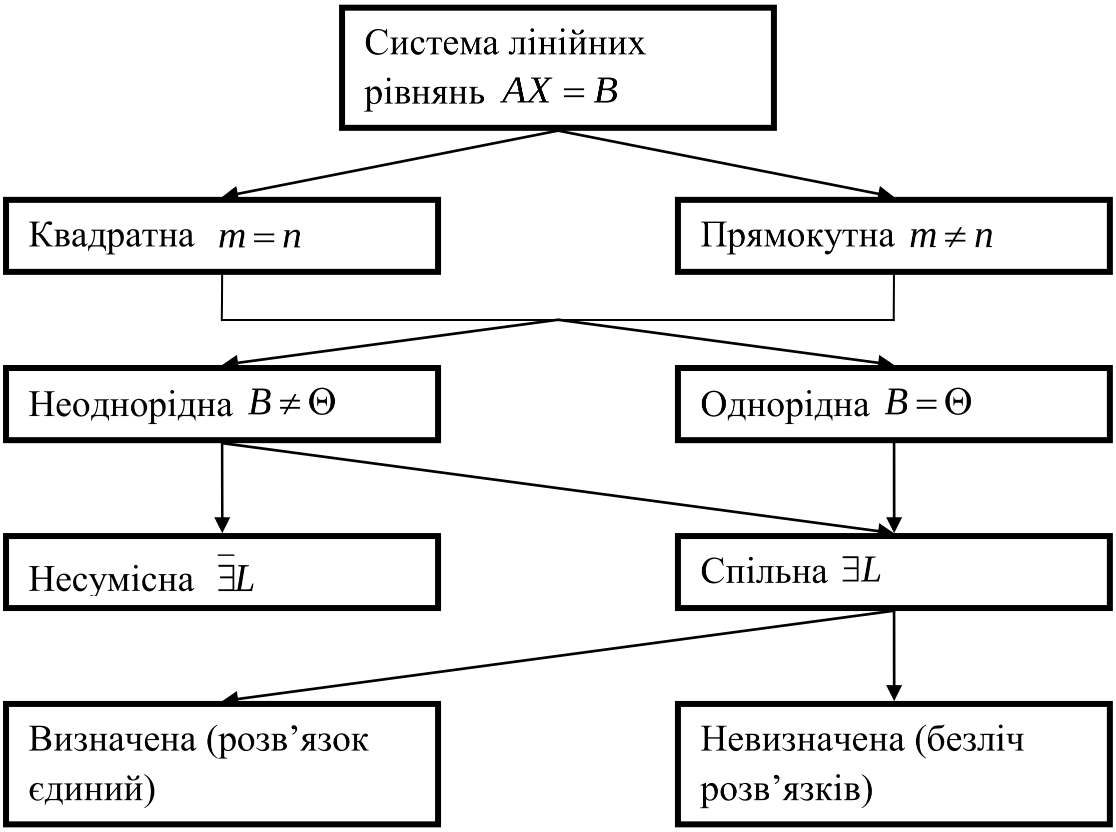



Рисунок. 14.1

*Зауваження*. З наведених прикладів і представленої схеми класифікації систем лінійних рівнянь витікає наступна послідовність їх розв’язку:

- встановити, чи є система сумісною чи ні;
- якщо система є сумісною, то встановити, визначена вона чи ні;
- якщо система визначена, то знайти її єдиний розв’язок;
- якщо система невизначена, то знайти всі її розв’язки.

## 14.1. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю $A$ розміром $m \times n$. Виділимо в ній довільні $r$ рядків і $r$ стовпців (рисунок 14.2). Елементи, які стоять на перетині виділених рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю порядку $r$.

**Def. Мінором $r$-го порядку матриці $A$ називається визначник матриці, утворений елементами, які стоять на перетині всіх обраних довільно $r$ рядків і всіх $r$ стовпців.**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рисунок. 14.2

Вибираючи всілякими способами по $r$ рядків і $r$ стовпців, отримаємо всілякі мінори $r$-го порядку матриці $A$.

Найбільший порядок мінору, який можна побудувати для заданої матриці, - це найменше значення кількості рядків або стовпців:

$$r_{\max}=\min(m,n).$$

Позначається мінор $r$-го порядку матриці у вигляді $M^r$.

*Зауваження*. Мінором 1-го порядку є кожний елемент матриці.

ПРИКЛАД. Записати мінори 3-го порядку матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язки*. Для заданої матриці можна записати чотири мінори 3-го порядку:

$$M_1^3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=30,\ M_2^3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=6,\ M_3^3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$M_4^3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=18.$$

Якщо розглядати матрицю і її можливі мінори, то особливий інтерес викликають мінори заданого порядку, відмінні від нуля.

**Def. Найбільший порядок відмінного від нуля мінору, який можна побудувати для заданої матриці, називають рангом цієї матриці.**

Отже, якщо ранг матриці дорівнює $r$, то це означає, що серед мінорів цієї матриці є принаймні один мінор $r$-го порядку, відмінний від нуля, в той час як всі її мінори порядку $r+1$ і більше дорівнюють нулю.

Позначається ранг матриці у вигляді

$$r(A) \text{ або } rank(A).$$

Отже, відповідно до визначення можна записати

$$rank(A) = max\{r\} \text{ при } M^r \neq 0 .$$

## 14.2. Елементарні перетворення матриць

**Def. Такі перетворення матриці, при яких її ранг не змінюється, називаються елементарними перетвореннями матриці.**

*Твердження.* До елементарним перетворенням матриці відносяться:

1) транспонування;

2) перестановка двох рядків;

3) множення елементів рядки на число;

4) додавання до всіх елементів рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на одне і те ж число.

Ці твердження, записані щодо рядків, в силу транспонування виконуються і щодо стовпців.

Наведені твердження засновані на властивостях визначника.

## 14.3. Визначення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень

**Def. Рядок матриці, що складається з нулів і однієї одиниці, називається одиничним рядком матриці. Аналогічно визначається і одиничний стовпець матриці.**

**Def. Канонічна матриця - це така матриця, яка крім нульових рядків і стовпців може містити і одиничні рядки і стовпці.**

ПРИКЛАДИ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Твердження.* Ранг канонічної матриці дорівнює кількості її одиничних елементів.

*Правило обчислення рангу.* Для обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень її перетворюють до канонічного вигляду і підраховують кількість одиничних елементів.

Елементарні перетворення матриць записують за допомогою знака «тильда» (~), який вказує, що еквівалентні матриці утворюються елементарними перетвореннями, а значить, мають один і той же ранг.

ПРИКЛАД. Визначити ранг матриці $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{a_{1j} - a_{2j}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{a_{2j} - 2a_{1j}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-4&-5&-1\\0&4&5&1\end{pmatrix}\overset{a_{3j}+a_{2j}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-4&-5&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{a_{2j}:(-4)}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&5/4&1/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, $rank(A)=2$.

*Зауваження*. При перетворенні матриці до канонічного вигляду можна ввести правило: якщо матриця містить нульовий стовпець з одним ненульовим числом, то при наступному перетворенні замість цього числа записують одиницю, а в рядку, що містить цю одиницю, всі інші елементи записують як нулі:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&0&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a_{11}&0&a_{13}&a_{14}\\0&1&0&0\\a_{31}&0&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}.$$

## 14.4. Визначення рангу матриці методом обвідних мінорів

*Правило обвідних мінорів*. Якщо знайдений мінор $n$-го порядку, відмінний від нуля, то переходять до мінорів $(n+1)$-го порядку, які обводять мінор $n$-го порядку. Якщо всі можливі мінори $(n+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг дорівнює $n$. Якщо не дорівнює хоча б один нулю, то переходимо до мінору $(n+2)$, який обводить його. І так далі.

ПРИКЛАД. Визначити ранг матриці

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\0&4&5&1\end{pmatrix}$$

методом обвідних мінорів.

*Розв'язок*

$M_1 = 3$;

$M_2 = \begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix} = 0 - 4 = 4;$

$M_3^1 = \begin{vmatrix}3&2&1\\2&0&-1\\0&4&5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&-1\\4&5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&1\\4&5\end{vmatrix}=3\cdot4-2\cdot6=0;$

$M_3^2 = \begin{vmatrix}3&2&2\\2&0&1\\0&4&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}0&1\\4&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\4&1\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-2\cdot(-6)=0.$

Отже, $rank(U)=2$ .

## 14.5. Обчислення оберненої матриці елементарними перетвореннями

**Def. Матриця, побудована дописуванням до заданої матриці ще однієї матриці з такою ж кількістю рядків, називається розширеною матрицею.**

Позначення такої матриці має вигляд

$$(A|B).$$

Метод обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень полягає в наступному:

- задану матрицю за рахунок одиничної матриці перетворюють в розширену;
- за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю приводять до вигляду, коли з лівого боку утворюється одинична матриця.

Отримана матриця, що стоїть праворуч від одиничної, є оберненою до заданої матриці, тобто

$$(A|B)\approx(E|D)\Rightarrow A^{-1}=D.$$

ПРИКЛАД. Методом елементарних перетворень побудувати обернену матрицю до заданої

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

*Розв'язки*

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{a_{2j}-3a_{1j}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\overset{a_{1j}+a_{2j}}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\overset{a_{2j}/-2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right),$$

отже, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

## 14.6. Твердження про базисні мінори

Ранг матриці є ефективним засобом для дослідження і розв'язку системи лінійних рівнянь, дозволяє вибрати з системи рівнянь, якщо це необхідно, ті рівняння, які є визначальними для розв'язку системи.

**Def. Будь-який відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює її рангу, називається базисним мінор цієї матриці.**

Матриця може мати не один базисний мінор, а кілька.

**Def. Рядки, які беруть участь в утворенні базисного мінору, називаються базисними рядками. Базисні рядки є лінійно незалежними.**

Аналогічне твердження існує і для стовпців. Стовпці, які беруть участь в утворенні базисного мінору, називаються базисними стовпцями. Базисні стовпці є лінійно незалежними.

*Твердження про базисні мінори*. Будь-який рядок матриці є лінійною комбінацією базисних рядків, а будь-який стовпець матриці є лінійною комбінацією її базисних стовпців.

Отже, визначивши базисний мінор матриці, в системі лінійних рівнянь в подальшому використовують лише базисні рівняння, так як всі інші рівняння це лінійна комбінація базисних рівнянь.

## 14.7. Основні твердження про сумісність та визначеність системи лінійних неоднорідних рівнянь

Нехай задано систему $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Цю систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді одного матричного рівняння:

$$AX = B.$$

Розширеною матрицею системи називається матриця $\overline{A}$ системи, яка доповнена вектором вільних елементів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Розширену матрицю системи можна записати у вигляді $A|B$.

**Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних неоднородних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці**

$$rang\left(A|B\right) = rang\left(A\right)$$

**Теорема про визначеність. Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система визначена. Якщо ранг сумісної системи менше числа невідомих, то система невизначена.**

## 14.8 Розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь при будь якій матриці системи.

Послідовність розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь при будь якій матриці системи:

1. З'ясовуємо, система сумісна чи ні? Для цього записуємо розширену матрицу і визначаємо відносно теореми Кронекера-Капеллі ранг матриці.

2.Якщо система сумісна, вибираємо базисний мінор.

3. Залишаємо рівняння, які ввійшли в базисний мінор, а всі інші відкидаємо.

4. Залишаємо зліва стовпці, які ввійшли в базисний мінор, а ті які не ввійшли переносимо на право.

5.Задаємо невідомим, що записані справа значення констант та рішаємо систему рівнянь відносно невідомих, які записані зліва.

ПРИКЛАД.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{3j}-3a_{2j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{2j}-a_{1j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{1j}-2a_{2j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{3j}+a_{1j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{1j}-2a_{2j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{c} a_{3j}+a_{1j} \\ \approx \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Значить $rank(A|B) = rank(A) = 2$.

Вибираємо базисний мінор $\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Залишаємо два рівняння, що входять в базисний мінор, а третє відкидаємо.

$$\begin{cases} 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Стовпці, що не ввійшли в базисний мінор, переносимо на право.

$$\begin{cases} 11x_2 = -5x_3 + x_4 + 10 \\ x_1 - 2x_2 = -x_3 - x_4 - 2 \end{cases}$$

Задаємо значення констант невідомим справа: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$. Отже:

$$\begin{cases} 11x_2 = -5 \cdot C_1 + C_2 + 10 \\ x_1 - 2x_2 = -C_1 - C_2 - 2 \end{cases}$$

З цієї системи маємо: $x_2 = -\frac{5}{11} \cdot C_1 + \frac{1}{11} C_2 + \frac{10}{11}$

$$x_1 - 2x_2 = -C_1 - C_2 - 2 \;\Rightarrow\; x_1 - 2\left(-\frac{5}{11}\cdot C_1 + \frac{1}{11}C_2 + \frac{10}{11}\right) = -C_1 - C_2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{10}{11}\cdot C_1 + \frac{2}{11}C_2 + \frac{20}{11} - C_1 - C_2 - 2 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{21}{11}\cdot C_1 - \frac{9}{11}C_2 - \frac{2}{11}$$

Отже:

$$x_1 = -\frac{21}{11}\cdot C_1 - \frac{9}{11}C_2 - \frac{2}{11}$$

$$x_2 = -\frac{5}{11}\cdot C_1 + \frac{1}{11}C_2 + \frac{10}{11}$$

$$x_3 = C_1$$

$$x_4 = C_2$$

Ці рішення можна записати у векторній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{11}\cdot C_1 - \frac{9}{11}C_2 - \frac{2}{11} \\ -\frac{5}{11}\cdot C_1 + \frac{1}{11}C_2 + \frac{10}{11} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 + \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 14.9 Розв’язок системи лінійних однорідних рівнянь.

Всі висновки, які були зроблені для неоднорідної системи мають місце і для однорідної системи, тобто:

1. Якщо $rank(A) = n$ система визначена і має нульове рішення.
2. Якщо $rank(A) < n$ система невизначена і має множину рішень.

Розв’язок системи такий же, як і для неоднорідній.

ПРИКЛАД.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значить $rank(A) = 2$.

За базисний мінор вибираємо $M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$. Тоді базисні стовбці – це перший та другий стовбці.

Вибираємо два рівняння.

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + x_3 - \ \ x_4 = 0 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Ті невідомі, що не ввійшли у базисний мінор переносимо на право.

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = -x_3 + \ \ x_4 \\ \qquad 2x_2 = -x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

Задаємо значення констант невідомим справа

$x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Рішаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = -C_1 + \ \ C_2 \\ \qquad 2x_2 = -C_1 - 4C_2 \end{cases}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2, \ \ x_1 = x_2 - C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2 - C_1 + C_2 = -\frac{3}{2}C_1 - C_2.$$

Отже, розвязок системи:

$$x_1 = -\frac{3}{2}C_1 - C_2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2$$

$$x_3 = C_1$$

$$x_4 = C_2$$

Це можна записати у матричному виді:

$$\vec{x}(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}C_1 - C_2 \\ -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для однорідної системи рівнянь розв’язок у такому виді називають фундаментальнім.

Зауваження. Розв’язок системи неоднорідних рівнянь являє собою суму приватного рішення заданої неоднорідної системи рівнянь і рішення відповідної однорідної системи рівнянь побудованої з заданої неоднорідної системи рівнянь.

### 14.10. Висновки

***Def. Якщо для матриці системи*** $A$ ***виконується умова*** $m = n$***, то система називається квадратною, якщо*** $m \neq n$***, то прямокутною.***

***Def.* Якщо $B=\Theta$ (Θ нульова матриця), то система називається однорідною, якщо $B\neq\Theta$, то неоднорідною.**

***Def.* Розв'язком матричного рівняння $AX=B$ є така матриця при підстановці якої замість $X$ рівняння перетворюється на тотожність.**

*Якщо розглядати однорідну систему $AX=\Theta$, то така система завжди сумісна, тому що вона має нульовий розв'язок, тобто $L=\Theta$.*

*При розв'язанні систем лінійних рівнянь необхідно:*

*- встановити, чи є система сумісною чи ні;*

*- якщо система є сумісною, то встановити, визначена вона чи ні;*

*- якщо система визначена, то знайти її єдиний розв'язок; якщо система невизначена, то знайти всі її розв'язки.*

***Def.* Мінором $r$-го порядку матриці $A$ називається визначник матриці, утворений елементами, які стоять на перетині всіх обраних довільно $r$ рядків і всіх $r$ стовпців.**

*Найбільший порядок мінору, який можна побудувати для заданої матриці - це найменше значення кількості рядків або стовпців:*

$$r_{max}=min(m,n).$$

*Позначається мінор $r$-го порядку матриці $M^r$.*

*Зауваження. Мінором 1-го порядку є сам елемент матриці.*

***Def.* Найбільший порядок відмінного від нуля мінору, який можна побудувати для заданої матриці, називають рангом цієї матриці.**

*Позначається ранг матриці $r(A)$ або $rank(A)$.*

***Def.* Такі перетворення матриці, при яких її ранг не змінюється, називаються елементарними перетвореннями матриці.**

*До елементарним перетворенням матриці відносяться:*

*1) транспонування;*

*2) перестановка двох рядків;*

*3) множення елементів рядків на число;*

*4) додавання до всіх елементів рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на одне і те ж число.*

*Ці твердження, записані щодо рядків, в силу транспонування виконуються і щодо стовпців.*

*Наведені твердження засновані на властивостях визначника.*

***Def.* Рядок матриці, що складається з нулів і однієї одиниці, називається одиничним рядком матриці. Аналогічно визначається і одиничний стовпець матриці.**

***Def.* Канонічна матриця - це така матриця, яка крім нульових рядків і стовпців може містити і одиничні рядки і стовпці.**

*Твердження. Ранг канонічної матриці дорівнює кількості її одиничних елементів.*

*Правило обчислення рангу. Для обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень її перетворюють до канонічного вигляду і підраховують кількість одиничних елементів.*

*Елементарні перетворення матриць записують за допомогою знака «тильда» (~), який вказує, що еквівалентні матриці виходять елементарними перетвореннями, а значить, мають один і той же ранг.*

*При перетворенні матриці до канонічного вигляду можна використовувати таке правило, що якщо матриця містить нульовий стовпець з одним ненульовим числом, то при наступному перетворенні замість цього числа записують одиницю, а в рядку, що містить цю одиницю, всі інші елементи нулі.*

*Правило обвідних мінорів. Якщо знайдений мінор $n$-го порядку, відмінний від нуля, то переходять до мінорів $(n+1)$-го порядку, які обводять мінор $n$-го порядку. Якщо всі можливі мінори $(n+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг дорівнює $n$. Якщо не дорівнює хоча б один нулю, то переходимо до мінору $(n+2)$, який обводить його. І так далі.*

***Def. Матриця, побудована дописуванням до заданої матриці ще однієї матриці з такою ж кількістю рядків, називається розширеною матрицею.***

*Позначення такої матриці має вигляд $(A|B)$.*

*Метод обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень полягає в наступному:*

*- задану матрицю за рахунок одиничної матриці перетворюють в розширену;*

*- за допомогою елементарних перетворень розширену матрицю приводять до вигляду, коли з лівого боку утворюється одинична матриця.*

*Отримана матриця, що стоїть праворуч від одиничної, є оберненою до заданої матриці, тобто $(A|B) \approx (E|D) \Rightarrow A^{-1} = D$.*

***Def. Будь-який відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює її рангу, називається базисним мінором цієї матриці.***

*Матриця може мати не один базисний мінор, а кілька.*

***Def. Стовпці і рядки, які беруть участь в утворенні базисного мінору, називаються базисними рядками і базисними стовпцями.***

*Твердження про базисні мінори. Будь-який стовпець матриці є лінійною комбінацією її базисних стовпців, а будь-яка її рядок - лінійною комбінацією базисних рядків.*

*Визначивши базисний мінор матриці, в системі лінійних рівнянь можна вибрати ті рівняння, через які як лінійну комбінацію можна виразити всі інші рівняння.*

## 14.11. Питання для перевірки

**1. Мінор *r*-го порядку матриці - це визначник *r*-го порядку заданої матриці, отриманий:**

а) з елементів обраних рядків і стовпців заданої матриці; б) з $r$ обраних елементів заданої матриці; в) з елементів, що стоять на перетині $r$ обраних рядків і стовпців заданої матриці.

**2. Найбільший порядок мінору, який можна побудувати для матриці розмірністю $m \times n$:**

а) *Min (m, n);* б) *Max (m, n)*; в) $m \cdot n$.

**3. Кількість мінорів *r*-го порядку, яке можна побудувати для матриці розмірністю… :**

а) *mn*; б) $C_m^r$; в) $C_m^r C_n^r$.

**4. Що таке $C_m^r$:**

а) сполучення з *r* елементів по *m* елементів; б) сполучення з *m* елементів по *r* елементів; в) перестановка з *r* елементів по *m* елементів?

**5. Ранг матриці - це:**

а) найбільший порядок мінору, відмінного від нуля, який можна побудувати для заданої матриці; б) найбільший порядок мінору, який можна побудувати для заданої матриці; в) найменший порядок мінору, рівного нулю, який можна побудувати для заданої матриці.

**6. Ранг матриці позначається:**

а) *ранг ();* б) *Rg ();* в) *rank ().*

**7. Елементарне перетворення матриці - це таке перетворення матриці, яке:**

а) не змінює її рангу; б) пов'язане з перетворенням тільки одного рядка; в) дозволяє побудувати канонічну матрицю.

**8. Чи відноситься транспонування матриці до елементарного перетворення матриці:**

а) так; б) ні; в) так, для певного типу матриць?

**9. Чи відноситься перестановка рядків матриці до елементарного перетворення матриці:**

а) ні; б) так, за певних умов; в) так?

**10. Чи відноситься множення елементів вибраного рядка матриці на певне число до елементарного перетворення матриці:**

а) ні; б) так, за певних умов; в) так?

**11. Чи відноситься додавання до елементів рядка матриці елементів іншого рядка, помножених на число, до елементарного перетворення матриці:**

а) ні; б) так, за певних умов; в) так?

**12. Чи відноситься віднімання від елементів рядка матриці одного і того ж числа до елементарного перетворення матриці:**

а) так; б) ні; в) так, за певних умов?

**13. Одиничний рядок матриці - це:**

а) рядок, всі елементи якого дорівнюють одиниці; б) рядок, алгебраїчна сума всіх елементів якого дорівнює одиниці; в) рядок, один елемент якого дорівнює одиниці, а решта - нулі.

**14. Одиничний стовпець матриці - це:**

а) стовпець, всі елементи якого дорівнюють одиниці; б) стовпець, один елемент якого дорівнює одиниці, а решта - нулю; в) стовпець, алгебраїчна сума всіх елементів якого дорівнює одиниці.

**15. Канонічна матриця - це:**

а) матриця діагонального вигляду; б) квадратна матриця, головна діагональ якої складається з одиниць; в) матриця, що складається з одиничних рядків і одиничних стовпців.

**16. Ранг канонічної матриці дорівнює:**

а) кількості одиниць; б) кількості нулів; в) кількості додатніх елементів.

**17. Обчислення рангу матриці полягає у приведенні матриці шляхом елементарних перетворень до:**

а) канонічної матриці; б) діагональної матриці; в) трикутної матриці.

**18. Базисний мінор матриці - це:**

а) Будь-який відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює одиниці; б) мінор матриці, що дорівнює одиниці; в) будь-який, відмінний від нуля мінор матриці, порядок якого дорівнює її рангу.

**19. Базовий рядок матриці - це:**

а) рядок матриці, який не входить в базовий мінор матриці; б) рядок матриці, який не містить нулів; в) рядок матриці, що входить в базовий мінор матриці.

**20. Базовий стовпець матриці - це:**

а) стовпець матриці, що не входить в базовий мінор матриці; б) стовпець матриці, що не містить нулів; в) стовпець матриці, що входить в базовий мінор матриці.

**21. Будь-який рядок матриці є лінійною комбінацією:**

а) елементів попереднього рядка; б) її базисних рядків; в) елементів її діагоналі.

**22. Побудова оберненої матриці шляхом елементарних перетворень:**

а) $\langle A|E\rangle \approx \langle D|E\rangle \Rightarrow A^{-1} = D$; б)$\langle A|E\rangle \approx \langle D|A\rangle \Rightarrow A^{-1} = D$;

в)$\langle A|E\rangle \approx \langle E|D\rangle \Rightarrow \Rightarrow A^{-1} = D$.

**23. Система лінійних рівнянь вигляду $AX = B$ називається:**

а) неоднорідною; б) однорідною; в) визначеною.

**24. Система лінійних рівнянь вигляду $AX = 0$ називається:**

а) неоднорідною; б) однорідної; в) визначеною.

**25. Сумісною називається:**

а) система лінійних рівнянь, що не має розв’язків; б) система лінійних рівнянь, що має розв’язки; в) система лінійних рівнянь, що має єдиний розв’язок.

**26. Несумісною називається:**

а) система лінійних рівнянь, що має безліч розв’язків; б) система лінійних рівнянь, що має розв’язок; в) система лінійних рівнянь, що не має розв’язків.

**27. Визначеною називається:**

а) система лінійних рівнянь, що має єдиний розв’язок; б) система лінійних рівнянь, що має безліч розв’язків; в) система лінійних рівнянь, що не має розв’язків.

**28. Невизначеною називається:**

а) система лінійних рівнянь, що має безліч розв'язків; б) система лінійних рівнянь, що має єдиний розв'язок; в) система лінійних рівнянь, що не має розв'язки.

**29. Однорідною називається:**

а) система лінійних рівнянь, хоча б один вільний елемент якої не дорівнює нулю; б) система лінійних рівнянь, вільні елементи якої дорівнюють нулю; в) система лінійних рівнянь, що має єдиний розв'язок.

**30. Неоднорідною називається:**

а) система лінійних рівнянь, хоча б один вільний елемент якої не дорівнює нулю; б) система лінійних рівнянь, вільні елементи якої дорівнюють нулю; в) система лінійних рівнянь, що має безліч розв'язків.

**31. Сумісність системи лінійних неоднорідних рівнянь оговорюється:**

а) в теоремі визначеності; в) в теоремі Кронекера - Капелі; б) в теоремі Крамера.

**32. Теорема Кронекера - Капеллі. Для того щоб система неоднорідних лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці цієї системи:**

а) був менше рангу її основної системи; б) був більше рангу її основної системи; в) дорівнював рангу її основної системи.

**33. Чи є система лінійних однорідних рівнянь сумісною:**

а) ні; б) так; в) за певних умов?

**34. Якщо система лінійних однорідних рівнянь є визначеною, то всі її невідомі:**

а) дорівнюють постійній величині; б) дорівнюють нулю; в) дорівнюють одиниці.

## 14.12. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Знайти ранг матриці методами граничних мінорів і елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. З'ясувати, чи є система векторів лінійно залежною або лінійно незалежною: $\vec{x}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\vec{x}_2 = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$, $\vec{x}_3 = (1,\ -1,\ 1,\ -1)$, $\vec{x}_4 = (1,\ 1,\ -1,\ -1)$.

3. Методом елементарних перетворень знайти зворотні матриці для наступних матриць:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 14.13. Самостійна робота

1. Знайти ранг матриці методами граничних мінорів і елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. З'ясувати, чи є система векторів лінійно залежною або лінійно незалежною: $\vec{x}_1 = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$, $\vec{x}_2 = (2,\ -2,\ 1,\ 3)$, $\vec{x}_3 = (6,\ -3,\ 3,\ 9)$, $\vec{x}_4 = (4,\ -1,\ 5,\ 6)$.

3. Методом елементарних перетворень знайти зворотні матриці для наступних матриць:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти ранг системи векторів $\vec{a}_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 0)$, $\vec{a}_2 = (0,\ 1,\ -1,\ 0)$, $\vec{a}_3 = (1,\ 0,\ -1,\ 1)$, $\vec{a}_4 = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$, $\vec{a}_5 = (3,\ -5,\ 2,\ -3)$.

*Матриця лінійного оператора. Приклади лінійних операторів та їх матриць. Матриця переходу. Перетворення координат вектора при зміні базису. Перетворення матриці оператора при переході до нової системи координат. Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійних операторів. Характеристичний многочлен лінійного оператора*

## 15. МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай є заданим лінійний простір $L^n$ з базисом $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,...,n}$ і простір $L^m$ з базисом $\{\vec{g}_i\}_{i=1,2,...,m}$.

Відомо, як лінійний оператор $\mathcal{A}$ діє на базисні вектори простору $L^n$, відображаючи їх у вектори простору $L^m$:

$$e_1 \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}e_1 = y_1 = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + ... + a_{m1}g_m;$$
$$e_2 \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}e_2 = y_1 = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + ... + a_{m2}g_m;$$
$$...$$
$$e_n \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}e_n = y_n = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + ... + a_{mn}g_m.$$

Скорочено це можна записати в такому вигляді:

$$\mathcal{A}e_j = y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}g_j \qquad (j = 1,2,...,n).$$

Отже, лінійному оператору $\mathcal{A}$ взаємно однозначно ставиться у відповідність для даного базису таблиця чисел $a_{ij}$ $(i = 1,2,...,m, \quad j = 1,2,...,n)$, яку можна записати так:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{matrix}$$

**Def. Прямокутна таблиця чисел, яка має $m$ рядків і $n$ стовпців і утворює чисельне представлення лінійного оператора, який діє з лінійного $n$ вимірного простору в лінійний $m$-вимірним простір, називається матрицею лінійного оператора, або просто матрицею, і записується так:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

## 15.1. Приклади лінійних операторів та їх матриць

1. Нехай задано тривимірний простір $L^3$ з осями координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ і базисом $e_1=\vec{i}$, $e_2=\vec{j}$, $e_3=\vec{k}$. задамо оператор $\mathcal{A}$ як ортогональне проектування елементів $L^3$ на координатну площину $xOy$, тобто в простір $L^2$ (рисунок 15.1), тоді

$$\vec{i}\xrightarrow{\mathcal{A}}\mathcal{A}\vec{i}=\vec{i}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j};$$
$$\vec{j}\xrightarrow{\mathcal{A}}\mathcal{A}\vec{j}=\vec{j}=0\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j};$$
$$\vec{k}\xrightarrow{\mathcal{A}}\mathcal{A}\vec{k}=0=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}.$$

Матриця оператора $\mathcal{A}$: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

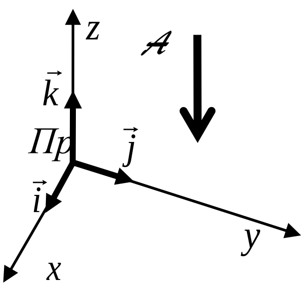


Рисунок. 15.1

2. Задані система координат $xOy$, тобто $L^2$, і лінійний оператор $\mathcal{A}$, який повертає цю систему на кут $\varphi$ проти годинникової стрілки. За базис візьмемо ортонормований вектори $e_1$ і $e_2$, спрямовані вздовж осей $Ox$ і $Oy$.

В результаті повороту системи отримаємо $\mathcal{A}e_1$ і $\mathcal{A}e_2$. Це ті ж одиничні вектори, спрямовані вздовж осей нової системи. Розкладання цих векторів за базисом $\{e_1,e_2\}$ має вигляд (рис. 15.2):

$$\mathcal{A}e_1=y_1=1\cdot cos\,\varphi\cdot e_1+1\cdot sin\,\varphi\cdot e_2;$$
$$\mathcal{A}e_2=y_2=-1\cdot sin\,\varphi\cdot e_1+1\cdot cos\,\varphi\cdot e_2.$$

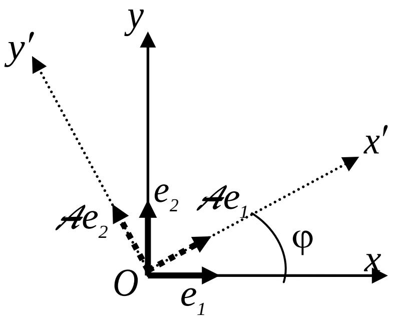


Рисунок. 15.2

Матриця цього лінійного оператора має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}cos\,\varphi&-sin\,\varphi\\sin\,\varphi&cos\,\varphi\end{pmatrix}.$$

Цю матрицю називають матрицею повороту.

3. Нехай $\mathcal{A}$ - оператор подібності, тобто $\mathcal{A}a=\lambda a$. Тоді матриця лінійного оператора має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&0&\dots&0\\0&\lambda&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\lambda\end{pmatrix}.$$

4. Нехай оператор $\mathcal{A}$ є оператором тотожного перетворення $L^n$ в $L^n$. У цьому випадку маємо

$$\mathcal{A}e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n;$$
$$\mathcal{A}e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n;$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{A}e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 1 \cdot e_n.$$

Матрицею тотожного оператора є одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

## 15.2. Матриця переходу

Нехай в просторі $L^n$ задані два базиси: $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ і $B' = \{\vec{e}_1'\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Кожен вектор базису $\{\vec{e}_1'\}_{i=1,2,\ldots,n}$ розкладемо за базисом $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$:

$$\vec{e}_1' = c_{11} \cdot \vec{e}_1 + c_{21} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + c_{n1} \cdot \vec{e}_n;$$
$$\vec{e}_2' = c_{12} \cdot \vec{e}_1 + c_{22} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + c_{n2} \cdot \vec{e}_n;$$
$$\ldots$$
$$\vec{e}_n' = c_{1n} \cdot \vec{e}_1 + c_{2n} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + c_{nn} \cdot \vec{e}_n.$$

**Матрицею переходу $C_{B \to B'}$ від базису $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ до базису $B' = \{\vec{e}_1'\}_{i=1,2,\ldots,n}$ називають матрицю, стовпцями якої є координати розкладання відповідного базисного вектора нової системи координат за базисом старої системи координат:**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

У цій матриці елементи $k$-го стовпця - це координати $\vec{e}_k'$ в базисі $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$.

ПРИКЛАД. Побудувати матрицю переходу від базису $B\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ до базису $B'$, отриманого поворотом $B$ на кут $\varphi$ щодо орта $\vec{i}$ (рисунок 15.3).

Для нового базису маємо

$$\vec{i}\,' = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k};$$
$$\vec{j}\,' = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot cos\varphi \cdot \vec{j} + 1 \cdot sin\varphi \cdot \vec{k};$$
$$\vec{k}\,' = 0 \cdot \vec{i} - 1 \cdot sin\varphi \cdot \vec{j} + 1 \cdot cos\varphi \cdot \vec{k}.$$

Отже, матриця переходу має вигляд

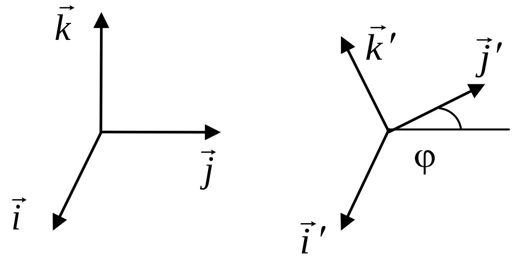



Рисунок. 15.3

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАД. Побудувати матрицю переходу від базису $B=\{1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^4\}$ до базису $B'=\{1,\ t-a,\ (t-a)^2,\ (t-a)^3,\ (t-a)^4\}$.

*Розв'язання*:

$1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3+0\cdot t^4$;

$t-a=-a\cdot 1+1\cdot t+0\cdot t^2+0\cdot t^3+0\cdot t^4$;

$(t-a)^2=t^2-2\cdot t\cdot a+a^2=a^2\cdot 1-2\cdot a\cdot t+1\cdot t^2+0\cdot t^3+0\cdot t^4$;

$(t-a)^3=t^3-3\cdot t^2\cdot a+3\cdot t\cdot a^2-a^3=-a^3\cdot 1+3\cdot a^2\cdot t-3\cdot a\cdot t^2+1\cdot t^3+0\cdot t^4$;

$$(t-a)^4=t^4-4\cdot t^3\cdot a+6\cdot t^2\cdot a^2-4\cdot t\cdot a^3+a^4=$$
$$=a^4\cdot 1-4\cdot a^3\cdot t+6\cdot a^2\cdot t^2-4\cdot a\cdot t^3+1\cdot t^4.$$

Матриця переходу має вигляд

$$C=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2 & -a^3 & a^4\\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & -4a^3\\ 0 & 0 & 1 & -3a & 6a^2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

## 15.3. Перетворення координат вектора при зміні базису

Нехай в лінійному просторі $L^n$ задані два базиси: $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ і $\{\vec{e}_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$ з матрицею переходу $C$. Нехай в базисі $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ задано вектор $\vec{x}(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Визначити координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\{\vec{e}_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$.

Оскільки

$$\vec{e}_1'=c_{11}\cdot\vec{e}_1+c_{21}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{n1}\cdot\vec{e}_n;$$
$$\vec{e}_2'=c_{12}\cdot\vec{e}_1+c_{22}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{n2}\cdot\vec{e}_n;$$
$$\dots$$
$$\vec{e}_n'=c_{1n}\cdot\vec{e}_1+c_{2n}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{nn}\cdot\vec{e}_n,$$

можна записати

$$\vec{x}=x_1\cdot\vec{e}_1+x_2\cdot\vec{e}_2+\dots+x_n\cdot\vec{e}_n=x_1'\cdot\vec{e}_1'+x_2'\cdot\vec{e}_2'+\dots+x_n'\cdot\vec{e}_n'=$$
$$=x_1'\cdot\left(c_{11}\cdot\vec{e}_1+c_{21}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{n1}\cdot\vec{e}_n\right)+$$
$$+x_2'\cdot\left(c_{12}\cdot\vec{e}_1+c_{22}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{n2}\cdot\vec{e}_n\right)+$$
$$+\dots+$$
$$+x_n'\left(c_{1n}\cdot\vec{e}_1+c_{2n}\cdot\vec{e}_2+\dots+c_{nn}\cdot\vec{e}_n\right),$$

або

$$\begin{aligned}\vec{x} = \vec{e}_1\left(x_1' \cdot c_{11} + x_2' \cdot c_{12} + \ldots + x' \cdot c_{1n}\right) + \\ + \vec{e}_2\left(x_1' \cdot c_{21} + x_2' \cdot c_{22} + \ldots + x' \cdot c_{2n}\right) + \\ + \ldots + \\ + \vec{e}_n\left(x_1' \cdot c_{n1} + x_2' \cdot c_{n2} + \ldots + x' \cdot c_{nn}\right).\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}&c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x' = x_1;\\ &c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x' = x_2;\\ &\ldots\\ &c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x' = x_n,\end{aligned}$$

або в матричної формі:

$$CX' = X,$$

Де

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Це зв'язок між старими і новими координатами заданого вектора.

## 15.4. Перетворення матриці оператора при переході до нової системи координат

Нехай в просторі $L^n$ задано оператор $\mathcal{A}$, якому в базисі $\{\vec{e}_i\}$ відповідає матриця оператора $A$. Оберемо базис $\{\vec{e}_i'\}$ з матрицею переходу $C$, для якої щодо вектора $\vec{x}$ виконується рівність

$$CX' = X.$$

Що буде являти собою матриця $A'$ оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\{\vec{e}_i'\}$?

Через задані базиси можна записати

$$\{\vec{e}_i\}: \quad \mathcal{A}x = y,$$
$$\{\vec{e}_i'\}: \quad \mathcal{A}x' = y'.$$

У цих базисах таким відображенням відповідають матричні форми

$$Ax = y, \tag{15.1}$$
$$A'x' = y'.$$

Для матриці переходу $C$ маємо

$$Cx' = x \text{ і } Cy' = y.$$

З (15.1) отримаємо

$$Ax = y \Rightarrow ACx' = Cy' \Rightarrow ACx' = CA'x',$$

звідки

$$AC = CA', \quad A' = C^{-1}AC.$$

## 15.5. Інваріантні підпростори

Нехай в лінійному просторі $L$ задано підпростір $V: V \subset L$.

І нехай в просторі $L$ задано оператор $\mathcal{A}$, який відноситься і до простору $V$. Виберемо елемент $x$ підпростору $V$: $x \in V$.

Образ $\mathcal{A}x$ елемента підпростору $V$ може міститися в $V$, а може і не міститися в $V$ (рисунок 15.4). Особливо цікавим є підпростір $V$, який оператором $\mathcal{A}$ відображається самим на себе:

$$V \subset L: \ \forall x \in V \Rightarrow \mathcal{A}x \in V.$$

**Def. Підпростір $V$ лінійного простору $L$ називається інваріантним щодо оператора $\mathcal{A}$, що діє в просторі $L$, якщо для будь-якого вектора $x$ з підпростору $V$ відображення вектора $\mathcal{A}x$ також належить підпростору $V$.**

ПРИКЛАД:

1. Оператор $\mathcal{A}$ - оператор повороту щодо осі $Ox$ звичайного простору $L^3$ (рисунок 15.5). Інваріантними підпросторами будуть:

- площина $xOy$;
- вісь $Oz$.

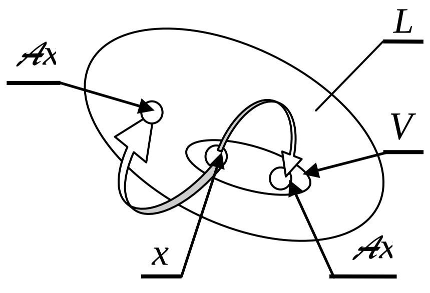



Рисунок. 15.4

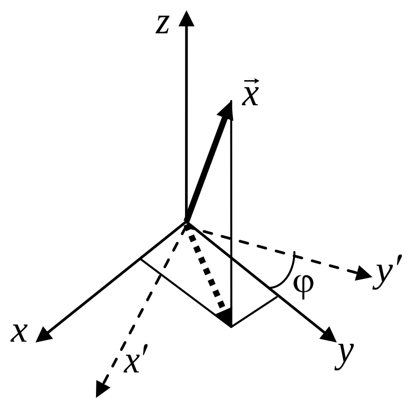



Рисунок. 15.5

2. У просторі многочленів $L^n$ ступеня не вище $n$ підпростір $L^k$, де $0 \le k \le n$, інваріантний щодо оператора диференціювання:

$$\mathcal{A}P(t) = P'(t).$$

## 15.6. Власні вектори і власні значення лінійних операторів

Особливу роль для лінійних операторів мають одновимірні інваріантні підпростори.

Нехай $L^1$ - одновимірний підпростір, породжений вектором $x \neq 0$ (або одним з векторів сукупності $\alpha x$). Для того щоб підпростір $L^1$ простору $L$ був інваріантним щодо лінійного оператора А простору $L$, необхідно і достатньо, щоб вектор $\mathcal{A}x$ належав підпростору $L^1$, тобто був пропорційний вектору $x$. Отже,

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} .$$

**Def. ненульовий вектор $(\vec{x} \neq 0)$, що задовольняє співвідношенню**

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} ,$$

**називається власним вектором лінійного оператора $\mathcal{A}$, а відповідне число $\lambda$ - власним значенням, або характеристичним числом, оператора $\mathcal{A}$.**

З наведених вище міркувань випливає:

1. Якщо одновимірне підпростір $L^1$ простору $L$ інваріантної щодо лінійного оператора $\mathcal{A}$, то всі ненульові вектори підпростору $L^1$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$ з його власними значеннями.

2. Якщо $x$ є власний вектор оператора $\mathcal{A}$, тобто

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} ,$$

то одновимірний підпростір $L^1$, утворений вектором $x$ або $\alpha \cdot x$, є інваріантнм щодо оператора $\mathcal{A}$ (рисунок 15.6).

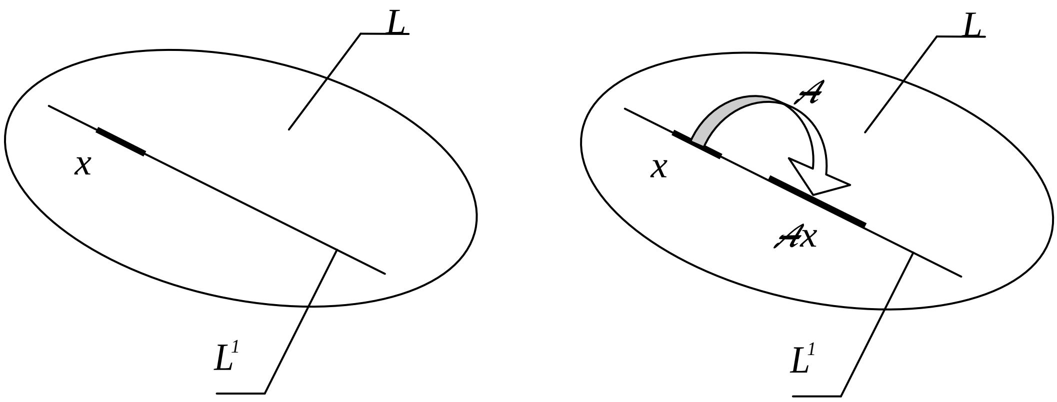



Рисунок. 15.6

Отже, задача знаходження інваріантних щодо оператора $\mathcal{A}$ одновимірних підпросторів $L^1$ простору $L$ рівнозначна задачі знаходження власних векторів оператора $\mathcal{A}$.

*Зауваження*. Існують оператори, які не мають власних векторів, і оператори, для яких кожен вектор простору є власним.

## 15.7. Характеристичний многочлен лінійного оператора

Умова визначення власного вектора $\mathcal{A}x = \lambda x$ можна записати в матричній формі:

$$Ax = \lambda Ex,$$

де $A$ - матриця оператора $\mathcal{A}$; $E$ - одинична матриця; $x$ - матриця-стовпець.

Перетворимо цю запис:

$$Ax - \lambda Ex = 0;$$

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Це матрична форма однорідної системи лінійних рівнянь. Така система має ненульовий розв'язок, коли її визначник дорівнює нулю, тобто щоб матриця-стовпець $x$ була ненульовий матрицею, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$det(A - \lambda E) = 0.$$

Якщо розкрити цей визначник, то отримаємо многочлен ступеня порядку квадратної матриці $A$.

**Def. Многочлен вигляду**

$$det(A - \lambda E)$$

**називається характеристичним многочленом лінійного оператора $\mathcal{A}$, а корені цього многочлена називають характеристичними коренем оператора $\mathcal{A}$.**

**Зауваження.** $det(A - \lambda E) = 0$ **– називають характеристичним рівнянням оператора $\mathcal{A}$.**

Твердження (без доведення):

1) власні значення лінійного оператора $\mathcal{A}$ є коренями його характеристичного многочлена;

2) характеристичний многочлен лінійного оператора не залежить від вибору базису.

## 15.8. Висновки

*Нехай лінійний оператор $\mathcal{A}$ діє на базисні вектори $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ простору $L^n$, відображаючи їх в вектори простору $L^m$ з базисом $\{\vec{g}_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$:*

$$e_j \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{A}e_j = y_j = a_{1j}g_1 + a_{2j}g_2 + \ldots + a_{mj}g_m,$$

*де* $j = 1, \ldots, n$.

*Тоді, лінійному оператору $\mathcal{A}$ взаємно однозначно ставиться у відповідність для даного базису таблиця чисел $a_{ij}$ $(i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n)$, яку можна записати так:*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}.$$

***Def. Прямокутна таблиця чисел, яка має $m$ рядків і $n$ стовпців і утворює чисельне представлення лінійного оператора, який діє з лінійного $n$ вимірного простору в лінійний $m$- вимірний простір, називається матрицею лінійного оператора, або просто матрицею.***

*1. Оператор $\mathcal{A}$, що забезпечує ортогональне проектування елементів простору $L^3$ на координатну площину $xOy$, тобто в простір $L^2$, Має матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*2. Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$, який повертає систему координат $xOy$, тобто простір $L^2$, на кут $\varphi$ проти годинникової стрілки, має вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

*Цю матрицю називають матрицею повороту.*

*3. Матриця лінійного оператора подібності має вигляд*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

*4. Матрицею тотожного перетворення $L^n$ в $L^n$ є одинична матриця*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

***Def. Матрицею переходу $C_{B\to B'}$ від базису $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ до базису $B' = \{\vec{e}_1'\}_{i=1,2,\dots,n}$ називають матрицю, стовпчиками якої є координати розкладання відповідного базисного вектора нової системи координат за базисом старої системи координат.***

*У цій матриці $k$-й стовпець - це координати $\vec{e}_k'$ в базисі $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$.*

*Якщо в лінійному просторі $L^n$ задані два базиси: $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ і $\{\vec{e}_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$ з матрицею переходу $C$ і в базисі $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ заданий вектор $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\{\vec{e}_i'\}_{i=1,2,\dots,n}$ визначаються виразом*

$$CX' = X.$$

*Це зв'язок між старими і новими координатами заданого вектора.*

*Перетворення матриці оператора при переході до нової системи координат можна записати у вигляді співвідношення*

$$A' = C^{-1}AC,$$

*де* $A$ *- матриця оператора в старій системі координат;* $A'$ *- матриця оператора в новій системі координат.*

***Def. Підпростір*** $V$ ***лінійного простору*** $L$ ***називається інваріантним щодо оператора*** $\mathcal{A}$ ***, що діє в просторі*** $L$***, якщо для будь-якого вектора*** $x$ ***з підпростору*** $V$ ***відображення вектора*** $\mathcal{A}x$ ***також належить підпростору*** $V$ ***.***

***Def. Ненульовий вектор (*** $x \neq 0$ ***), що задовольняє співвідношенню***

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

***називається власним вектором лінійного оператора А, а відповідне число*** $\lambda$ ***- власним значенням, або характеристичним числом, оператора*** $\mathcal{A}$***.***

Особливості:

*1. Якщо одновимірний підпростір* $L^1$ *простору* $L$ *інваріантний щодо лінійного оператора* $\mathcal{A}$*, то всі ненульові вектори підпростору* $L^1$ *є власними векторами оператора* $\mathcal{A}$ *з його власними значеннями.*

*2. Якщо* $x$ *є власний вектор оператора* $\mathcal{A}$*, тобто*

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

*то одновимірний підпростір* $L^1$*, утворений вектором* $x$ *або* $\alpha x$*, є інваріантним відносно оператора* $\mathcal{A}$*.*

*Отже, задача знаходження інваріантних щодо оператора* $\mathcal{A}$ *одновимірних підпросторів* $L^1$ *простору* $L$ *рівнозначна задачі знаходження власних векторів оператора* $\mathcal{A}$*.*

*Зауваження. Існують оператори, які не мають власних векторів, і оператори, для яких кожен вектор простору є власним.*

*Умова визначення власного вектора* $\mathcal{A}x = \lambda x$ *в матричної формі має вигляд*

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

*де* $A$ *- матриця оператора* $\mathcal{A}$ *;* $E$ *- одинична матриця;* $x$ *- матриця-стовпець.*

***Def. Многочлен вигляду***

$$det(A - \lambda E)$$

***називається характеристичним многочленом лінійного оператора*** $\mathcal{A}$ ***, а корені цього многочлена називають характеристичними числами оператора*** $\mathcal{A}$ ***.***

*Твердження (без доведення):*

*1) власні значення лінійного оператора* $\mathcal{A}$ *є коренями його характеристичного рівняння;*

*2) характеристичний многочлен лінійного оператора не залежить від вибору базису.*

## 15.9. Питання для перевірки

**1. Оператор $\mathcal{A}$, що діє з простору $L_n$ в простір $L_m$, -** це:

а) відображення, яке кожному елементу простору $L_n$ ставить у відповідність елемент простору $L_m$; б) відображення, яке кожному елементу простору $L_m$ ставить у відповідність елемент простору $L_n$; в) відображення, яке простору $L_n$ ставить у відповідність простір $L_m$.

**2. Оператор $\mathcal{A}$, який елементу *x* ставить у відповідність елемент *y*, позначається:**

а) $y = A(x)$; б) $y = f(A)$; в) $A = f(A)$.

**3. Лінійним оператором називається:**

а) оператор, описаний лінійним виразом; б) оператор, відображення якого представлено лінійною функцією; в) оператор, який кожну лінійну комбінацію векторів відображає в лінійну комбінацію векторів.

**4. Матриця оператора - це прямокутна табличка чисел, що складається з *m* рядків і *n* стовпців:**

а) яка є чисельним зображенням лінійного оператора; б) яка кожному елементу *n*-вимірного простору ставить у відповідність елемент *m*-вимірного простору; в) яка є чисельною зображенням лінійного оператора, який кожному елементу *n*-вимірного простору ставить у відповідність елемент *m*-вимірного простору.

**5. Матриця оператора повороту на кут φ в двовимірному просторі:**

а) $\begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

**6. Матриця оператора подібності:**

а) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**7. Матриця оператора тотожності:**

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**8. Матриця переходу від старого базису до нового:**

а) матриця, стовпцями якої є координати розкладання відповідних базисних векторів нового базису за базисом старого; б) матриця, рядками якої є координати розкладання відповідних базисних векторів нового базису за базисом старого; в) матриця, стовпцями якої є координати розкладання відповідних базисних векторів нового базису за базисом старого.

**9. Перетворенню координат вектора при переході від старого базису до нового базису відповідає запис:**

а) $X' = CX$; б) $X = CX'$; в) $X = X'C$.

**10. Перетворенню матриці оператора при переході від старого базису до нового базису відповідає запис:**

а) $A = C^{-1}A'C$; б) $A' = C^{-1}AC$; в) $A' = CAC^{-1}$.

**11. Простір називається інваріантним відносно заданого оператора:**

а) якщо відображення елемента цього простору належить цьому ж просто-ру; б) якщо відображення елемента цього простору не належить цьому ж просто-ру; в) якщо відображення елемента цього простору відсутній.

**12. Власне число оператора - це таке число λ, для якого виконується умова:**

а) $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$; б) $\mathcal{A}x = \lambda$; в) $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \lambda\vec{\mathrm{x}}$.

**13. Власний вектор оператора - це такий вектор $\vec{\mathrm{x}}$, для якого виконується умова:**

а) $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$; б) $\mathcal{A}x = \lambda$; в) $\mathrm{A}\vec{\mathrm{x}} = \lambda\vec{\mathrm{x}}$.

**14. Характеристичний многочлен для заданого оператора - це:**

а) многочлен, що містить власне число λ; б) det (А-λЕ); в) det (А + λЕ).

**15. Чи залежить оператор від вибору базису:**

а) так; б)ні; в) за певних умов залежить?

**16. Чи залежить зміст матриці оператора від вибору базису:**

а) так; б)немає; в) за певних умов залежить?

**17. Матриця оператора в базисі з власних векторів має вигляд:**

а) трикутний; б) симетричний; в) діагональний.

**18. Симетрична матриця - це матриця, для якої:**

а) елементи симетричні щодо побічної діагоналі; б) $A = A^{-1}$; в) $A = A^{T}$.

## 15.10. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Вектори $\vec{e}_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_2 = (1,\ 1,\ 2)$, $\vec{e}_3 = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{x} = (6,\ 9,\ 14)$ задані координатами в деякому базисі. Показати, що вектори $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

2. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, і знайти зв'язок одного і того ж вектора в цих двох базисах: $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{e}_2 = (2,\ 3,\ 3)$, $\vec{e}_3 = (3,\ 7,\ 1)$, $\vec{e}_1' = (3,\ 1,\ 4)$, $\vec{e}_2' = (5,\ 2,\ 1)$, $\vec{e}_3' = (1,\ 1,\ -6)$.

3. Довести, що існує єдине лінійне перетворення тривимірного простору, що переводить вектори $\vec{a}_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $\vec{a}_2 = (0,\ 1,\ 2)$, $\vec{a}_3 = (1,\ 0,\ 0)$ відповідно в $\vec{b}_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}_2 = (1,\ 1,\ -1)$, $\vec{b}_3 = (2,\ 1,\ 2)$, і знайти матрицю цього перетворення в тому ж базисі, в якому задані координати всіх векторів.

4. Лінійне перетворення в базисі $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{3}$ має матрицю $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\vec{f}_1 = 2e_1' + 3e_2' + e_3'$, $\vec{f}_2 = 3e_1' + 4e_2' + e_3'$, $\vec{f}_3 = e_1' + 2e_2' + 3e_3'$.

5. Знайти власні значення і власні вектори лінійних перетворень, заданих в деякому базисі матрицями $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

## 15.11. Самостійна робота

### *15.11.1. Практика для самостійної роботи*

1. Вектори $\vec{e}_1 = (2,\ 1,\ -3)$, $\vec{e}_2 = (3,\ 2,\ -5)$, $\vec{e}_3 = (1,\ -1,\ 1)$, $\vec{x} = (6,\ 2,\ -7)$ задані координатами в деякому базисі. Показати, що вектори $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

2. Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, і знайти зв'язок одного і того ж вектора в цих двох базисах: $\vec{e}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_2 = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\vec{e}_3 = (1,\ 1,\ 2,\ 1)$, $\vec{e}_4 = (1,\ 3,\ 2,\ 3)$, $\vec{e}\,'_1 = (1,\ 0,\ 3,\ 3)$, $\vec{e}\,'_2 = (-2,\ -3,\ -5, -4)$, $\vec{e}\,'_3 = (2,\ 2,\ 5,\ 4)$, $\vec{e}\,'_4 = (-2,\ -3,\ -4,\ -4)$.

3. Довести, що існує єдине лінійне перетворення тривимірного простору, що переводить вектори $\vec{a}_1 = (2,\ 0,\ 3)$, $\vec{a}_2 = (4,\ 1,\ 5)$, $\vec{a}_3 = (3,\ 1,\ 2)$ відповідно в $\vec{b}_1 = (1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}_2 = (4,\ 5,\ -2)$, $\vec{b}_3 = (1,\ -1,\ 1)$, і знайти матрицю цього перетворення в тому ж базисі, в якому задані координати всіх векторів.

4. Знайти власні значення і власні вектори лінійних перетворень, заданих в деякому базисі матрицями $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

5. Вектори $\vec{e}_1 = (1,\ 2,\ -1,\ -2)$, $\vec{e}_2 = (2,\ 3,\ 0,\ -1)$, $\vec{e}_3 = (1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $\vec{e}_4 = (1,\ 3,\ -1,\ 0)$, $\vec{x} = (7,\ 14,\ -1,\ 2)$ задані координатами в деякому базисі. Показати, що вектори $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^{n}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

6. Лінійне перетворення $\varphi$ в базисі $\vec{a}_1 = (8,\ -6,\ 7)$, $\vec{a}_2 = (-16,\ 7,\ -13)$, $\vec{a}_3 = (9,\ -3,\ 7)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\vec{b}_1 = (1,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}_2 = (3,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}_3 = (2,\ 1,\ 2)$.

7. Знайти власні значення і власні вектори лінійних перетворень, заданих в деякому базисі матрицями $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

8. З'ясувати, яку з наступних матриць лінійних перетворень можна привести до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису, і знайти цей базис і відповідну йому матрицю: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

# 16. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

## 16.1. Зведення матриці оператора до діагонального виду

Нехай $\mathcal{A}$ простору $L^n$ є оператором, який має $n$ лінійно незалежних власних векторів $\{x_i\}_{i=1,2,...,n}$. Виберемо ці вектори в якості базису:

$$\{x_i\}_{i=1,2,...,n} = \{e_i\}_{i=1,2,...,n}.$$

Оскільки власні вектори можна записати як

$$\mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1;$$
$$\mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2;$$
$$\ldots$$
$$\mathcal{A}e_n = \lambda_n e_n,$$

то матриця оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\{e_i\}_{i=1,2,...,n}$ запишеться у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

тобто є діагональною.

*Висновок.* Розв'язавши характеристичне рівняння

$$det(A - \lambda E) = 0$$

і визначивши його корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, можна визначити власні вектори оператора $\mathcal{A}$. Якщо сукупність цих векторів є лінійно незалежною, то їх можна вибрати за базис, в якому матриця лінійного оператора має діагональну форму.

Вкажемо деякі без доведення твердження:

*Твердження 1.* Якщо власні вектори оператора $\mathcal{A}$ мають різні власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, то ці власні вектори є лінійно незалежними.

*Твердження 2.* Якщо лінійний оператор $\mathcal{A}$ має $n$ лінійно незалежних власних векторів, то, вибравши їх за базис, матрицю оператора $\mathcal{A}$ можна звести до діагонального виду.

*Твердження 3.* (Зворотне). Якщо в деякому базисі матриця оператора діагональна, то вектори цього базису є власними векторами.

ПРИКЛАД. Звести матрицю оператора $\mathcal{A}$ до діагонального вигляду в новому базисі:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Рішення*

Будуємо характеристичне рівняння:

$$det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & -2 \\ 3 & -4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -4-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7-\lambda)(-4-\lambda)(-2-\lambda) + 12\cdot 3\cdot(-2-\lambda) - 2(-(-4-\lambda)(-2)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(2+\lambda)((\lambda-7)(\lambda+4)+12\cdot 3) + 4(4+\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(2+\lambda)(\lambda^2-3\lambda-28+36) + 16 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(2+\lambda)(\lambda^2-3\lambda+8) + 16 + 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda^2 + 6\lambda - 16 - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2-\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

матриця оператора $\mathcal{A}$ в діагональному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАД. матриця оператора $\mathcal{A}$ в базисі

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad e_2 = (0,\ 1,\ 0), \quad e_3 = (0,\ 0,\ 1)$$

має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати базис, в якому матриця оператора має діагональний вигляд.

*Рішення*

Будуємо характеристичне рівняння і визначаємо власні значення:

$$det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -1.$$

Будуємо власні вектори, для чого для кожного значення $\lambda$ розв'язуємо систему рівнянь вигляду $(A-\lambda E)x=0$.

1. Для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Визначаємо ранг матриці системи:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{Rang} = 2.$$

Вибираємо перше і друге рівняння: $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

В якості базисного мінору вибираємо $M = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Систему перетворимо до вигляду $\begin{cases} -x_1 + x_3 = x_2, \\ -x_1 - x_3 = x_2. \end{cases}$

приймаємо $x_2 = C$.

отже, $\begin{cases} -x_1 + x_3 = C, \\ -x_1 - x_3 = C, \end{cases}$ звідки $x_1 = -C, \quad x_3 = 0$.

Власний вектор для $\lambda_1 = 1$ має вигляд $x_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} -C \\ C \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Для $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Визначаємо ранг матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{Rang} = 2.$$

Вибираємо перше і друге рівняння: $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

В якості базисного мінору вибираємо $M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Систему перетворимо до вигляду $\begin{cases} -x_2 = -x_3, \\ -x_1 = x_3. \end{cases}$

приймаємо $x_3 = C$.

отже, $\begin{cases} -x_2 = -C, \\ -x_1 = C, \end{cases}$ звідки $x_1 = -C, \quad x_2 = C$.

Власний вектор для $\lambda_2 = 0$ має вигляд $x_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} -C \\ C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Для $\underline{\lambda_3 = -1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Визначаємо ранг матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{Rang} = 2.$$

Вибираємо перше і третє рівняння: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В якості базисного мінору вибираємо $M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Систему перетворимо до вигляду $\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3, \\ -x_1 - x_2 = -x_3. \end{cases}$

приймаємо $x_3 = C$.

отже, $\begin{cases} x_1 - x_2 = -C, \\ -x_1 - x_2 = -C, \end{cases}$ звідки $x_1 = 0, \quad x_2 = C$.

Власний вектор для $\lambda_3 = -1$ має вигляд $x_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Базис, в якому матриця оператора має діагональну форму, зображується векторами

$$x_{\lambda=1} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_{\lambda=0} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_{\lambda=-1} = C\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормовані вектори можна записати у вигляді

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

## 16.2. Визначення квадратичної форми

**Def. Матриця вигляду $A = A^T$ називається симетричною.**

*Твердження.* Власні значення симетричної матриці дійсні, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням ортогональні.

Зауваження. Характеристичне рівняння симетричною матриці $det(A - \lambda E) = 0$ має дійсні корені.

**Def. Квадратичною формою $n$ змінних $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають запис вигляду**

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

**де $a_{ij} = a_{ji}$ .**

Цей запис являє собою однорідний многочлен 2-го степеня щодо $n$ змінних, що не містить вільних елементів і елементів 1-го степеня.

ПРИКЛАД:

$n = 1:\qquad \Phi(x_1) = \sum_{i=1}^{1} \sum_{j=1}^{1} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2$;

$n = 2:\qquad \Phi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2$,

$\Phi(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2$;

$n = 3:\qquad \Phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 +$

$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$,

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^3 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$.

**Def. Матриця вигляду**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

**де $a_{ij} = a_{ji}$, складена з коефіцієнтів квадратичної форми, називається матрицею квадратичної форми.**

Використовуючи матрицю квадратичної форми, квадратичну форму можна записати в матричному вигляді

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T A x,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ПРИКЛАД:

$$n = 2, \quad \Phi(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1 x_2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ де } a_{21} = a_{12}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad x^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix};$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 & 3x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (4x_1 x_1 + 3x_2 x_1 + 3x_1 x_2 - 3x_2 x_2) = (4x_1^2 + 6x_2 x_1 - 3x_2^2).$$

### 16.3. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

**Def. Запис квадратичної форми в вигляді**

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_1^2 = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2$$

**називають квадратичною формою в канонічному вигляді.**

З визначення канонічного вигляду випливає, що матриця квадратичної форми в канонічному вигляді має діагональну форму:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАД. Матриця квадратичної форми $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2$ має вигляд $\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Запис квадратичної форми в канонічному вигляді можна розглядати як запис квадратичної форми в базисі з власних векторів матриці, в якому вона приймає діагональну форму. Отже, алгоритм зведення квадратичної форми до канонічного вигляду наступний:

1. Записати матрицю квадратичної форми.

2. Скласти характеристичне рівняння для матриці квадратичної форми:

$$|A-\lambda E|=0.$$

3. Знайти власні числа характеристичного рівняння $\{\lambda_i\}_{i=1,2,...,n}$. Власні числа це корені характеристичного рівняння, які мають бути дійсними і простими.

4. Перейти до нового базису, в якому квадратична форма буде мати вже канонічний вигляд, числові коефіцієнти при змінних є власні числа.

Отже, на практиці досить знайти власні числа характеристичного рівняння. Це і є діагональні елементи матриці для канонічного вигляду. І тому будувати власні вектори, якщо в подальшому для виконання завдання вони не потрібні, не потрібно. При цьому послідовність власних чисел як діагональних елементів довільна.

### 16.4. Висновки

*Твердження 1. Якщо власні вектори оператора $\mathcal{A}$ мають різні власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, то ці власні вектори є лінійно незалежними.*

*Твердження 2. Якщо лінійний оператор $\mathcal{A}$ має $n$ лінійно незалежних власних векторів, то, вибравши їх за базис, матрицю оператора $\mathcal{A}$ можна звести до діагонального виду.*

*Твердження 3. (Зворотне). Якщо в деякому базисі матриця оператора діагональна, то вектори цього базису є власними векторами.*

***Def.* Матриця вигляду $A=A^T$ називається симетричною.**

*Властивості:*

*1. Всі власні числа симетричної матриці - дійсні числа, або характеристичне рівняння симетричної матриці $det(A-\lambda E)=0$ має дійсні корені.*

*2. Власні вектори симетричною матриці ортогональні.*

***Def.* Квадратичною формою $n$ змінних $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ називають вираз вигляду**

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

***де*** $a_{ij}=a_{ji}$.

*Цей вираз являє собою однорідний многочлен 2-го степеня щодо $n$ змінних, що не містить вільних елементів і елементів 1-го степеня.*

***Def.* Матриця вигляду**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

***де*** $a_{ij} = a_{ji}$***, складена з коефіцієнтів квадратичної форми, називається матрицею квадратичної форми.***

*Використовуючи матрицю квадратичної форми, квадратичну форму можна записати в матричному вигляді*

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^T Ax.$$

***Def. Запис квадратичної форми в вигляді***

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_1^2 = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2$$

***називають квадратичною формою в канонічному вигляді.***

*З визначення канонічного вигляду випливає, що матриця квадратичної форми в канонічному вигляді має діагональну форму.*

*Запис квадратичної форми в канонічному вигляді можна розглядати як запис квадратичної форми в базисі з власних векторів матриці, в якому вона має діагональну форму.*

*Алгоритм Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду наступний:*

*1. Записати матрицю квадратичної форми.*

*2. Скласти характеристичне рівняння для матриці квадратичної форми:*

$$|A - \lambda E| = 0.$$

*3. Знайти власні числа характеристичного рівняння* $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. *Ці числа мають бути дійсними і некратними.*

*4. Перейти до нового базису, в якому квадратична форма буде мати вже канонічний вигляд, числові коефіцієнти при змінних є власні числа.*

## 16.5. Питання для перевірки

**1. Матриця оператора в базисі з власних векторів набирає вигляду:**

а) трикутний; б) симетричний; в) діагональний.

**2. Симетрична матриця - це:**

а) матриця, елементи якої симетричні щодо побічної діагоналі; б) $A = A^{-1}$; в) $A = A^T$.

**3. Чи є власні значення для оператора, матриця якого симетрична, дійсними числами:**

а) так; б) немає; в) за певних умов є?

**4. Чи є власні вектори оператора, матриця якого симетрична, ортогональними:**

а) так; б) немає; в) за певних умов є?

**5. Квадратична форма - це:**

а) многочлен 2-го порядку без лінійної частини; б) многочлен, що містить квадрати змінних; в) лінійна частина многочлена 2-го порядку.

**6. Квадратична форма записується як:**

а) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i + x_j)$; б) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ; в) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$ .

**7. Канонічний вигляд квадратичної форми:**

а) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_i + x_j\right)$; б) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$ ; в) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$ .

**8. Виберіть матрицю для форми** $F(x,y,z)=3x^2+2xz-4y^2-6yz$ **:**

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

**9. Оберіть квадратичну форму для матриці** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$**:**

а) $F(x,y,z)=2x^2-4y^2+2z^2+6yz-2xy$; б) $F(x,y,z)=2x^2-4y^2+$ $+2z^2+3yz-xy$; в) $F(x,y,z)=4x^2-8y^2+4z^2+6yz-2xy$ .

**10. Матриця квадратичної форми в базисі з ортів власних векторів набуває вигляду:**

а) трикутний; б) симетричний; в) діагональний.

## 16.6. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. З'ясувати, чи можна звести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому діагональну форму матриці:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти ортогональне перетворення, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, і записати цей канонічний вигляд: $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+$ $+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$ .

3. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою не виродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираз нових невідомих через старі: $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

4. З'ясувати, чи можна звести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому діагональну форму матриці:

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ортогональне перетворення, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, і написати цей канонічний вигляд: $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

6. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою не виродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираз нових невідомих через старі: $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$.

## 16.7. Самостійна робота

### *16.7.1. Практика для самостійної роботи*

1. З'ясувати, чи можна звести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду шляхом переходу до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому діагональну форму матриці:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Знайти ортогональне перетворення, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, і написати цей канонічний вигляд:

а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$; б) $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

3. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду з цілими коефіцієнтами за допомогою не виродженого лінійного перетворення з раціональними коефіцієнтами і знайти вираз нових невідомих через старі:

$$\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4.$$

# 17. КРИВІ 2-ГО ПОРЯДКУ

## 17.1. Зведення рівняння кривої 2-го порядку до канонічного вигляду

Нехай задана крива 2-го порядку у вигляді

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + a_{00} = 0.$$

Якщо прийняти, що $x = x_1$ і $y = x_2$, то рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{2} b_kx_k + a_{00} = 0.$$

Цей запис можна представити в матричній формі

$$\vec{x}^T A\ \vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} + (a_{00}) = 0,$$

де

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (a_{12} = a_{21}), \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Для матричної форми криву 2-го порядку можна перетворити до канонічного виду, перейшовши в нову систему координат. Базис цієї системи координат буде складатися з ортів власних векторів матриці $A$. Алгоритм перетворення:

1. Запишемо характеристичне рівняння для матриці квадратичної форми:

$$|A - \lambda E| = 0.$$

2. Знайдемо власні числа характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2$, Які повинні бути дійсними і нерівними.

3. Побудуємо власні вектори матриці квадратичної форми $x_{\lambda 1}, x_{\lambda 2}$.

4. Для власних векторів побудуємо їх орт

$$e_1' = \frac{x_1}{|x_1|}, \quad e_2' = \frac{x_2}{|x_2|}\ .$$

5. Запишемо побудовані орти в старому базису:

$$e_1' = c_{11}\cdot\vec{i} + c_{21}\cdot\vec{j},$$

$$e_2' = c_{12}\cdot\vec{i} + c_{22}\cdot\vec{j},$$

побудуємо матрицю переходу $C$ від базису $\{e_i\}_{i=1,2}$ до базису $\{e_i'\}_{i=1,2}$ :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

6. Перейдемо в нову систему координат:

$$x = C\ x';$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2'. \end{aligned}$$

7. У новій системі координат початкове рівняння матиме вигляд

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + b_1' x_1' + b_2' x_2' + a_{00} = 0.$$

При цьому підстановку $x_1$, $x_2$ потрібно виконувати тільки для лінійної частини:

$$b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

8. Скориставшись паралельним переносом, рівняння зведемо до вигляду

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + a_{00}' = 0.$$

Це і буде кінцевий результат перетворення. Це рівняння можна звести до канонічного вигляду рівняння кривої 2-го порядку.

Можливі такі випадки:

а) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ - крива еліптичного типу, причому якщо $\lambda_1 a_{00}' < 0$, то це еліпс;

б) $\lambda_1\lambda_2 = 0$ і $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ - крива параболічного типу;

в) $\lambda_1\lambda_2 < 0$ - крива гіперболічного типу, причому якщо $a_{00}' \neq 0$, то це гіпербола.

Якщо $a_{00}' = 0$, то для еліптичного типу це точка, для гіперболічного типу - пересічні прямі, для параболічного типу - паралельні прямі, що співпадають.

*Зауваження 1.* При переході від $x_1, x_2$ однієї системи координат до $x_1'$, $x_2'$ другої необхідно мати на увазі, що такий перехід може бути виконаний неоднозначно, тому що вибір номерів $\lambda_1$ і $\lambda_2$ може бути різним в процесі розв'язання $|A - \lambda E| = 0$. Це призводить до заміни $x_1' \to x_2'$ і $x_2' \to x_1'$.

*Зауваження 2.* Визначник матриці оператора не залежить від вибору системи координат, тому

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2.$$

Отже, для матриці квадратичної форми можливі такі випадки:

- $\Delta > 0$ - крива еліптичного типу;
- $\Delta = 0$ - крива параболічного типу;
- $\Delta < 0$ - крива гіперболічного типу.

ПРИКЛАД. Нехай задана крива 2-го порядку

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Написати канонічне рівняння кривої 2-го порядку, визначити її тип і знайти канонічну систему координат.

*Рішення*

1. Запишемо характеристичне рівняння для матриці квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2. Знайдемо власні числа характеристичного рівняння $\lambda_1$, $\lambda_2$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow (5-\lambda-4)(5-\lambda+4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(9-\lambda)=0; \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=9.$$

3. Побудуємо власні вектори матриці квадратичної форми $x_{\lambda 1}$, $x_{\lambda 2}$:

- для $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_0+y_0=0 \Rightarrow y_0=C, \quad x_0=-C \Rightarrow x_{\lambda=1}=\begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- для $\lambda_2 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_0+y_0=0 \Rightarrow y_0=C, \quad x_0=C \Rightarrow x_{\lambda=9}=\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Побудуємо орти власних векторів:

$$e_1'=\frac{x_1}{|x_1|}, \; e_2'=\frac{x_2}{|x_2|};$$

$$|x_1|=C\sqrt{(-1)^2+1^2}=C\sqrt{2}, \quad |x_2|=C\sqrt{1^2+1^2}=C\sqrt{2};$$

$$e_1'=\frac{x_1}{|x_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2'=\frac{x_2}{|x2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Розкладемо побудовані форми за старим базисом:

$$e_1'=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{j};$$

$$e_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\vec{j},$$

побудуємо матрицю переходу $C$ від базису $\{e_i\}_{i=1,2}$ до базису $\{e_i'\}_{i=1,2}$:

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

6. Перейдемо в нову систему координат:

$$x=C\ x',$$

або

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'; \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'. \end{array}$$

7. Виконаємо підстановку змінних в новій системі координат:

$$-18x-18y=-18\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)-18\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)=$$

$$=x'\left(\frac{18}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{2}}\right)+y'\left(-\frac{18}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{36}{\sqrt{2}}y'.$$

У новій системі координат початкове рівняння матиме вигляд

$$1\cdot x'^2+9\cdot y'^2-\frac{36}{\sqrt{2}}\cdot y'+9=0.$$

8. Скористаємося паралельним переносом:

$$x'^2+9y'^2-\frac{36}{\sqrt{2}}y'+9=0 \;\Rightarrow\; x'^2+9\left(y'^2-2\frac{2}{\sqrt{2}}y'+2\right)=-9+18\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2+9\left(y'-\sqrt{2}\right)^2=9\Rightarrow\; \frac{x''^2}{3^2}+y''^2=1,$$

де $x''=x'$, $y''=y'-\sqrt{2}$.

Канонічне рівняння заданої кривої $\frac{x''^2}{3^2}+y''^2=1$ - це рівняння еліпса з півосями $a=3$, $b=1$.

Знаходимо координати центру еліпса:

$$x''=0,\quad y''=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'=x''=0,\quad y'=y''+\sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}0+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'=\frac{1}{\sqrt{2}}0+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1.$$

Отже, центром еліпса є точка $O(1,\,1)$.

Орти базису:

$$e_1'=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

$$e_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Заданий еліпс зображений на рисунку 17.1.

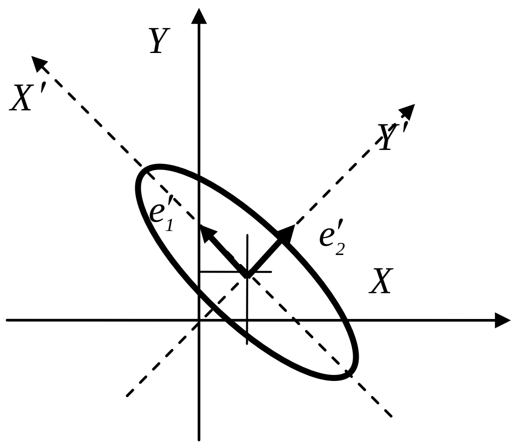



Рисунок. 17.1

## 17.2. Висновки

*Криву 2-го порядку у вигляді*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + a_{00} = 0$$

*можна представити в матричній формі*

$$\vec{x}^T A\ \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + (a_{00}) = 0.$$

*Алгоритм перетворення кривої 2-го порядку до канонічного вигляду:*

*1. Запишемо характеристичне рівняння для матриці квадратичної форми:*

$$|A - \lambda E| = 0.$$

*2. Знайдемо власні числа характеристичного рівняння* $\lambda_1,\ \lambda_2$.

*3. Побудуємо власні вектори матриці квадратичної форми* $x_{\lambda 1},\ x_{\lambda 2}$.

*4. Для власних векторів побудуємо їх орти*

$$e_1' = \frac{x_1}{|x_1|},\ e_2' = \frac{x_2}{|x_2|}\ .$$

*5. Побудуємо матрицю переходу* $C$ *від базису* $\{e_i\}_{i=1,2}$ *до базису* $\{e_i'\}_{i=1,2}$ *:*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

*6. Перейдемо в нову систему координат:*

$$x = C\ x';$$

$$x_1 = c_{11}x_1' + c_{12}x_2';$$

$$x_2 = c_{21}x_1' + c_{22}x_2'.$$

*7. Запишемо рівняння в новій системі координат:*

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + b_1'x_1' + b_2'x_2' + a_{00} = 0.$$

*8. Використовуючи паралельний перенос, зведемо рівняння до канонічного вигляду:*

$$\lambda_1 x_1''^2 + \lambda_2 x_2''^2 + a_{00}' = 0.$$

*Можливі такі випадки:*

*а)* $\lambda_1\lambda_2 > 0$ *- крива еліптичного типу, причому, якщо* $\lambda_1 a_{00}' < 0$*, то це еліпс;*

*б)* $\lambda_1\lambda_2 = 0$ *і* $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ *- крива параболічного типу;*

*в)* $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *- крива гіперболічного типу, причому якщо* $a_{00}' \neq 0$*, то це гіпербола.*

*Якщо* $a_{00}' = 0$*, то для кривої еліптичного типу це точка, для кривої гіперболічного типу - пересічні прямі, для кривої параболічного типу – паралельні прямі, або ті, що співпадають.*

*Визначник матриці оператора не залежить від вибору системи координат, тому*

$$\Delta = \lambda_1\lambda_2.$$

*Отже, для матриці квадратичної форми можливі такі випадки:*

$\Delta > 0$ - *крива еліптичного типу;*
$\Delta = 0$ - *крива параболічного типу;*
$\Delta < 0$ - *крива гіперболічного типу.*

## 17.3. Питання для перевірки

**1. Крива 2-го порядку в матричному вигляді:**

а) $\vec{x}^T \cdot A \ \cdot \vec{x} + \vec{x}^T \cdot \vec{b} + (a_{00}) = 0$; б) $\vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}^T + \vec{x}^T \cdot \vec{b} + (a_{00}) = 0$;
в) $\vec{x}^T \cdot A \ \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{b} + (a_{00}) = 0$.

**2. Якщо добуток власних чисел оператора квадратичної форми є позитивним, то крива 2-го порядку:**

а) еліптичного типу; б) гіперболічного типу; в) параболічного типу.

**3. Якщо добуток власних чисел оператора квадратичної форми негативний, то крива 2-го порядку:**

а) еліптичного типу; б) гіперболічного типу; в) параболічного типу.

**4. Якщо добуток власних чисел оператора квадратичної форми дорівнює нулю (одне з них не дорівнює нулю), то крива 2-го порядку:**

а) еліптичного типу; б) гіперболічного типу; в) параболічного типу.

**5. Канонічне рівняння еліпса на площині:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $y^2 - 2px = 0$.

**6. Канонічне рівняння гіперболи на площині:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $y^2 - 2px = 0$.

**7. Канонічне рівняння параболи на площині:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $y^2 - 2px = 0$.

**8. Рівняння двох пересічних прямих на площині:**

а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

**9. Рівняння порожньої множини:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$; в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

**10. Рівняння двох паралельних прямих на площині:**

а) $y^2 + a^2 = 0$; б) $y^2 - a^2 = 0$; в) $y^2 = 0$.

**11. Рівняння порожньої множини:**

а) $y^2 + a^2 = 0$; б) $y^2 - a^2 = 0$; в) $y^2 = 0$.

**12. Рівняння пари однакових прямих на площині:**

а) $y^2 + a^2 = 0$; б) $y^2 - a^2 = 0$; в) $y^2 = 0$.

**13. Канонічне рівняння еліпсоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.

**14. Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**15. Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**16. Канонічне рівняння еліптичного параболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$; в) $y^2-2px=0$.

**17. Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$; в) $y^2-2px=0$.

**18. Канонічне рівняння конуса:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

**19. Канонічне рівняння еліптичного циліндра:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

**20. Канонічне рівняння гіперболічного циліндра:**

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.

## 17.4. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Написати канонічне рівняння кривої 2-го порядку, визначити його тип і записати відповідну систему координат:

а) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

б) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

в) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

г) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

2. Написати канонічне рівняння поверхні 2-го порядку, визначити її тип і записати відповідну систему координат:

а) $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+2=0$;

б) $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$;

в) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;

г) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$.

## 17.5. Самостійна робота

1. Написати канонічне рівняння кривої 2-го порядку, визначити її тип і записати відповідну систему координат:

а) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$;

б) $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$.

2. Написати канонічне рівняння поверхні 2-го порядку, визначити її тип і записати відповідну систему координат:

а) $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$;

б) $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+2yz-4zx+2x-10y-2z-1=0$;

в) $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$;

г) $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$.

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ


Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник ; под ред. проф. Н. В. Ефимова. − М. : Наука, 1980. − 240 с.

Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. − СПб. : Лань, 2003. − 336 с.

Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. − М. : Наука, 1966. − 384 с.

Ефимов, А. В. Сборник задач по математике : в 4 ч. / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. − М. : Наука, 1993. – Ч. 1. − 478 с.

Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Л. А. Беклемишева. − М. : Физматлит, 2001. − 496 с.

Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейман. – Минск : Вышейш. шк., 1990. – 286 с.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : в 3 ч. / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под ред. Л. П. Рябушко. – Минск : Вышейш. шк., 1990. – Ч. 1. – 270 с.

## ЗМІСТ

Навчальне видання

**Бахмет Геннадій Костянтинович**
**Головченко Олександр Васильович**
**Ніколаєв Олексій Георгійович**
**Кальчук Наталія Леонідівна**
**Танчик Євген Андрійович**

# АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Частина 1

(Російською мовою)
(Переведено на українську мову)

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2014
Підписано до видання  31.12.2014
Ум. друк. арк. 16,6. Обл.-вид. арк. 18,69. Електронний ресурс

---

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001