ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Математичний аналіз

2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Математичний аналіз

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2015

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73
В93

Колектив авторів: Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв,
Н. Л. Кальчук, О. М. Прохорова, Е. А. Танчик

Переклад з російської виконано Н. Л. Кальчук з дозволу колективу авторів.

Р е ц е н з е н т и: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Колодяжний,
д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін

В93 **Вища** математика [Електронний ресурс] : навч. посібник : у 5 ч. / Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв та ін. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2015. – Ч. 2 : Математичний аналіз. – 151 с.

Подано основні розділи математичного аналізу за програмою першого курсу вищих технічних навчальних закладів. Розділи містять теоретичний виклад, основні означення, запитання для перевірки засвоєння пройденого матеріалу. Наведені приклади дають змогу закріпити матеріал при його вивченні.

Може використовуватися під час підготовки до складання іспитів, заліків.

Іл. 50. Табл. 3. Джерел: 7 назв.

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Def. Математичний аналіз – це розділ математики, у якому методом границь вивчаються функції та їх узагальнення.

Математичний аналіз містить:

– теорію границь;
– диференціальне числення;
– інтегральне числення;
– теорію диференціальних рівнянь;
– теорію функцій дійсних і комплексних змінних та інші розділи.

1.1.Математична символіка

Для зручності запису математичних висловлювань використовують символи, запозичені з математичної логіки і теорії множин (таблиця. 1.1).

Таблиця 1.1

Символи			
Математична логіка		Теорія множин	
$\forall$	«Для будь - якого…»	$\in$	Елемент множини
$\exists$	«Існує»	$\notin$	Не елемент множини
$\Rightarrow$	«з… випливає»	$\cap$	Перетин множин
$\Leftrightarrow$	«Еквівалентність»	U	Об'єднання множин
$\to$	«Прямує»	$\subset$	Підмножина множини
:	«…таке, що»	$\not\subset$	Не підмножина
$\vee$	Або	\	Різниця множин
$\wedge$	І	C	Доповнення множин

ПРИКЛАД. Теорему Піфагора можна записати таким чином:

$$(\forall \Delta ABC):(\angle A=\pi/2) \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

1.2. Уявлення про множини

Числа в математичному аналізі представляють через поняття множин. Теорія множин – це основа для побудови основних уявлень математичного аналізу.

Def. Під множиною треба розуміти об'єднання в єдине ціле певних цілком різних елементів.

Позначення: A, B, C, X, Y – множини;

a, b, c, x, z, y – елементи множин.

ПРИКЛАД: $a\in A$, $x\notin Y$.

Зауваження. Існує порожня множина, що позначають як Ø. Прикладом порожньої множини є розв'язання рівняння $X^2+1=\varnothing$.

Множина задається або перерахунком його елементів

$$M=\{a, b, c\},$$

або вказівкою їх характерних властивостей, наприклад:

$$M=\{z\in Z \mid z \geq 0\}.$$

1.2.1. Числові множини, які використовуються для завдання функцій

1. Множина натуральних чисел :

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. Множина цілих невід'ємних чисел :

$$\mathbf{Z_0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

3. Множина цілих чисел :

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}.$$

4. Множина усіх раціональних чисел :

$$\mathbf{Q} = \{x=m/n \mid m\in \mathbf{Z} \wedge n\in\mathbf{N} \}.$$

5. Множина усіх дійсних чисел (складається з раціональних і ірраціональних чисел) :

$$\mathbf{R} = \{x\wedge\boldsymbol{y} \mid x\in \mathbf{Q} \wedge y\not\subset\mathbf{Q} \}.$$

6. Множина комплексних чисел :

$$\mathbf{C} = \{x+\boldsymbol{i}y \mid x,y\in \mathbf{R} \wedge \boldsymbol{i}^2 = -1\}$$

(комплексне число - це число, що складається з дійсної і уявної частин).

Зауваження. Для геометричного зображення дійсного числа використовується числова вісь.

1.2.2. Множини як числові проміжки

1. Сегмент, відрізок :

$$[a,b]= \{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R} \mid \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \}.$$

2. Інтервал:

$$(a,b)= \{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R} \mid \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b} \}.$$

3. Напівінтервал:

$$(a,b]= \{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R} \mid \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \},$$

$$[a,b)= \{\boldsymbol{x}\in \mathrm{R} \mid \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b} \}.$$

4. Промені (визначення по аналогії з попередніми):

$$(a,+\infty), \qquad [a,+\infty),$$

$$[-\infty,a) , \qquad (-\infty,a].$$

Розрізняють праві і ліві, відкриті і закриті промені (a - початок променя).

Для геометричного зображення дійсних чисел використовують числову вісь.

1.3. Функція

Для визначення функції використовується поняття множини і елементів множини. Природа цих множин − числова.

Якщо набір елементів множини являє собою одне і те ж значення, то такий набір можна назвати **постійною величиною**.

Якщо набір елементів множини являє собою різні значення, то такий набір можна назвати **змінною величиною**.

Нехай X і Y − числові множини. На цих множинах задані підмножини:

$X_1 \subset X$ и $Y_1 \subset Y$.

Def. Кажуть, що на числовій множині X_1 визначена функція *f*, якщо кожному елементу $x \in X_1$ надано однозначно у відповідність відповідне число $y \in Y_1$ (Рисунок 1.1).

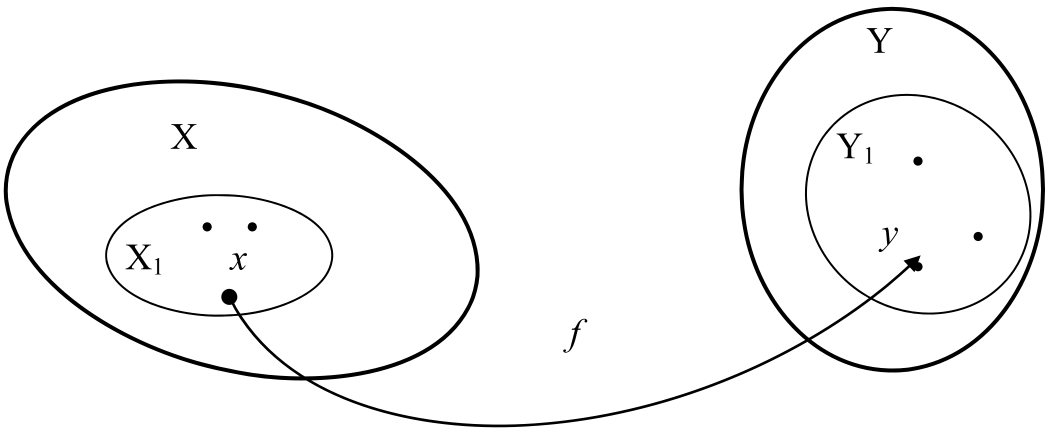


Рисунок 1.1

Це позначається наступним чином:

$$y=f(x), \qquad y=y(x), \qquad f: x \to y,$$
$$x \to y, \qquad X_1 \to Y_1, \qquad F(x,y) = 0,$$
$$X_1 \xrightarrow{f} Y_1.$$

При цьому називають:

− x - аргумент, або незалежна змінна;

− y - значення функції, або залежна змінна.

Розрізняють:

− D_f − область визначення функції;

− I_{mf} − область значень функції (image − образ).

Розрізняють такі функції:

1. Постійні - функції, усі значення яких рівні між собою :

$$f(x) = C.$$

2. Обмежені функції:

а) обмежені зверху:

$$(\exists M)\ (\forall x \in X) : f(x) \le M;$$

б) обмежені знизу:

$$(\exists M)\ (\forall x \in X) : f(x) \geq m;$$

в) обмежені:

$$(\exists a > 0)\ (\forall x \in X) : |f(x)| \leq a.$$

3. Необмежені функції.

ПРИКЛАДИ:

$y=2^x$ − функція, обмежена знизу;
$y=sin(x)$ − обмежена функція;
$y=x^{-1}$ − необмежена функція.

1.3.1. Способи завдання функції

Задати функцію - це означає вказати, як по заданому аргументу x визначається значення функції y. Розрізняють три основних способи завдання функції:

1. Аналітичний. Цей спосіб полягає в тому, що функціональну залежність представляють у вигляді виразу, формули.

ПРИКЛАДИ:

а) $y=x^2$;

б) функція знака

$$y = sign\ (x) = \begin{cases} +1 & при \quad x > 0, \\ 0 & при \quad x = 0, \\ -1 & при \quad x < 0. \end{cases}$$

(*sign* – знак).

в) функція Діріхлє

$$y = D(x),$$

яка приймає значення 1 при x раціональному і 0 при x ірраціональному.

2. *Графічний.* Функцію представляють у вигляді графіка.

Def. Графіком функції f(x) називається множина

$$\boldsymbol{\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in D_f \wedge y=f(x)\},}$$

де R^2 − множина точок площини, тобто фактично множина точок площини з координатами ($x, f(x)$).

ПРИКЛАД. Функція "Антьє" – найбільше ціле число, яке менше заданого. Позначається $y = E(x)$ або $y=[x]$.

ПРИКЛАД: $E(-1,5) = -2;\ E(1,5) = 1;\ E(-0,5) = -1;\ E(0,5) = 0.$

Графік функції зображено на рисунку 1.2.

Не всі функції можуть бути задані графічно. Так, наприклад, функція Діріхлє графічно не може бути представлена.

3. Табличний. Значення аргументу і відповідні йому значення функції записують у вигляді таблиці:

X	X_0	X_1	……	X_n
$f(X)$	$f(X_0)$	$f(X_1)$	…….	$f(X_n)$

Даний спосіб широко використовується у чисельних методах.

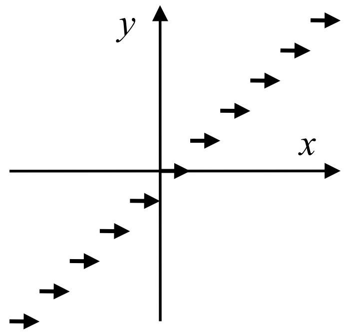


Рисунок 1.2

Зауваження. При побудові графіка часто використовують такі прості геометричні міркування: якщо *Г* - графік функції $f(x)$, то:

1) $y_1 = -f(x)$ – дзеркальне відображення *Г* відносно осі *Ox*;

2) $y_2 = f(-x)$ – дзеркальне відображення *Г* відносно осі *Oy*;

3) $y_3 = f(x-a)$ – зміщення вздовж осі *Ox* вправо на *a* ($a>0$);

4) $y_4 = b + f(x)$ – зміщення вверх вздовж осі *Oy* на *b* ($b>0$);

5) $y_5 = f(ax)$ – ($a>0$, $a\neq 1$) стиснення в *a* разів при $a>1$ або розтягнення в *a* разів при $a<1$ вздовж осі *Ox*;

6) $y_6 = bf(x)$ – ($b>0$, $b\neq 1$) розтягнення в *b* разів при $b>1$ або стиснення в $1/b$ разів при $b<1$ вздовж осі *Oy*.

1.3.2. Класифікація функцій

Def. До простих елементарних функцій відносяться такі функції:

$f(x)=C$	**- постійна;**
x^a	**- степенева;**
a^x	**- показникóва**, або **експоненці́йна;**
$\log_a x$	**- логарифмічна;**
$\sin(x), \cos(x), tg(x), ctg(x),$	**- тригонометрична;**
$\arcsin(x), \arccos(a), arctg(x), arcctg(x)$	**- обернені тригонометричні.**

Def. До класу елементарних функцій відносяться всі функції, які отримуємо за допомогою кінцевого числа арифметичних дій над найпростішими елементарними функціями, а також суперпозицією функцій.

ПРИКЛАДИ:

а) $f(x) = |x|$, где $|x| = \sqrt{x^2}$;

б) $g(x) = \cos^2(x) + \log_2|\sin(x)|$.

Для елементарних функцій можна запропонувати класифікацію, представлену на рисунку 1.3.

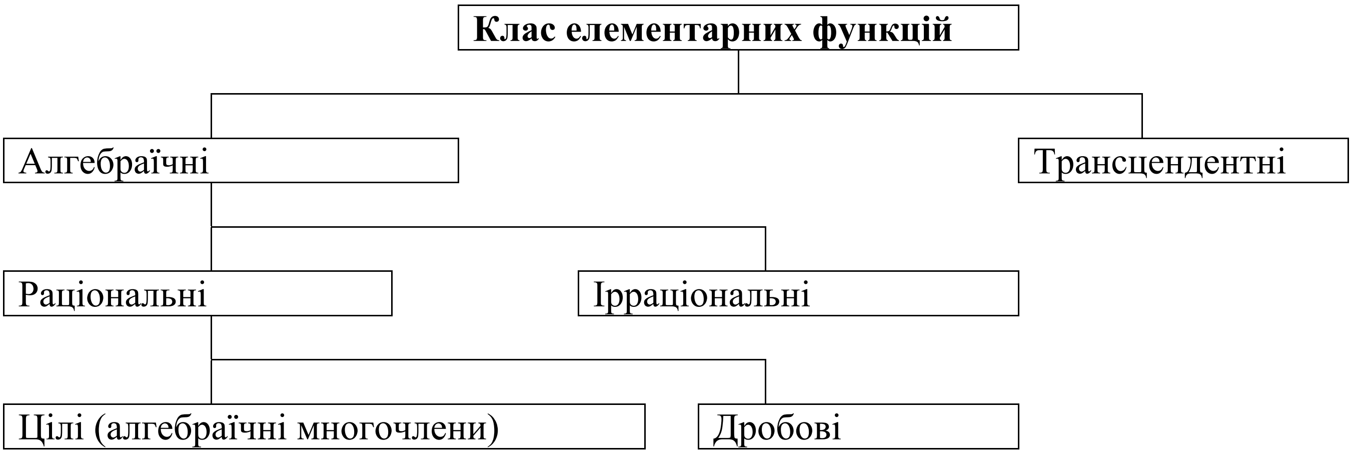


Рисунок. 1.3. Класифікація елементарних функцій

Зауваження до схеми:

1. Цілі раціональні функції (алгебраїчні многочлени, або поліноми) – такі функції, де над x виконуються дії множення на число, додавання, віднімання, піднесення до цілого степеня:

$$A_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,.$$

2. Дрібно раціональні функції представляють собою відношення двох многочленів:

$$F(x) = \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} \,.$$

3. Раціональні функції – функції, які являються або цілими раціональними, або дрібно раціональними функціями.

4. Ірраціональні функції – функції, які містять дробові степені аргументу (окремий випадок запису дробової степені - корінь:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f(x) = \sqrt{(1 + 2x + 5x^2)\big/(3 + 2x^3)}\,.$$

5. Раціональні (цілі, дробові) та ірраціональні функції називають алгебраїчними. Всі неалгебраїчні функції називають трансцендентними. Приклад трансцендентних функцій - функції, що містять тригонометричні елементарні, логарифмічні, показникові і інші функції:

$$y = \cos^2(x) + x; \quad y = \sin(x) + \ln(x).$$

1.3.3. Загальні властивості функцій

До загальних властивостей функцій можна віднести:

● парність або непарність;
● періодичність;
● монотонність.

1. Функція називається **парною**, якщо $f(-x)=f(x)$, і **непарною**, якщо $f(-x)=-f(x)$. Інакше функція називається **простою** (немає ні парності, ні непарності).

2. Функція називається **періодичною**, якщо існує таке мінімальне число T, для якого при будь-якому x виконується рівність $f(x+nT) = f(x)$, де $n \in N$. Найменше число T при цьому називається **періодом** функції.

Поведінка періодичної функції досить розглянути в будь-якому інтервалі, довжина якого дорівнює періоду функції.

Приклади періодичних функцій: *: $y=sin(x)$, $T=2\pi$; $y=tg(x)$, $T=\pi$.*

3. Монотонність.

Def. Функція називається монотонною на заданому інтервалі, якщо на цьому інтервалі приросту аргументу відповідає приріст функції, тобто $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f$ (Рисунок 1.4).

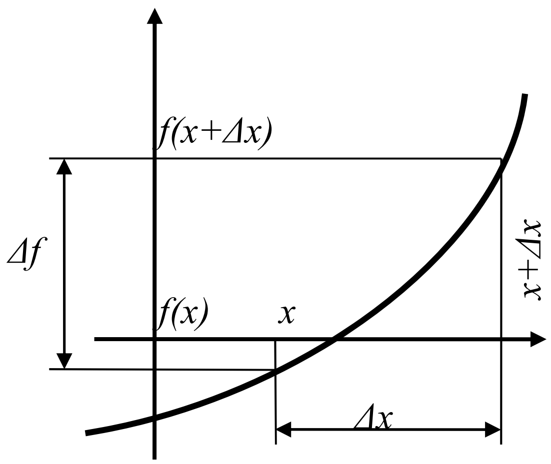


Рисунок 1.4

Def. Функція називається монотонно зростаючою на інтервалі $[a,b]$, якщо на цьому інтервалі більшому значенню аргументу ($x_1 > x_2$) відповідає більше значення функції ($f(x_1) > f(x_2)$).

Визначення в кванторах має вигляд

$$f(x)\uparrow \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in [a, b])\ ([a, b] \in \mathbf{D}_f)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Def. Функція називається монотонно спадною на заданому інтервалі, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Визначення в кванторах має вигляд

$$f(x)\downarrow \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in [a, b])\ ([a, b] \in \mathbf{D}_f)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

ПРИКЛАД: Для функції $y=x^2$ можна виділити дві множини:

− *$(-\infty, 0)$* – функція спадає;

− *$[0, +\infty)$* – функція зростає.

1.3.4. Композиція функцій

Нехай задані функції

$$g : x \to y; \;\; f : y \to z.$$

Їх композицією називається функція $x \to z$, яка позначається $f \circ g$.

Def. Композиція функцій − це функція, яка побудована з двох функцій таким чином, що результат першої функції є аргументом другої. (Рисунок 1.5)

$$(f \circ g)\,(x) = f(g(x)), \;\; \forall x \in D_{f \bullet g}$$

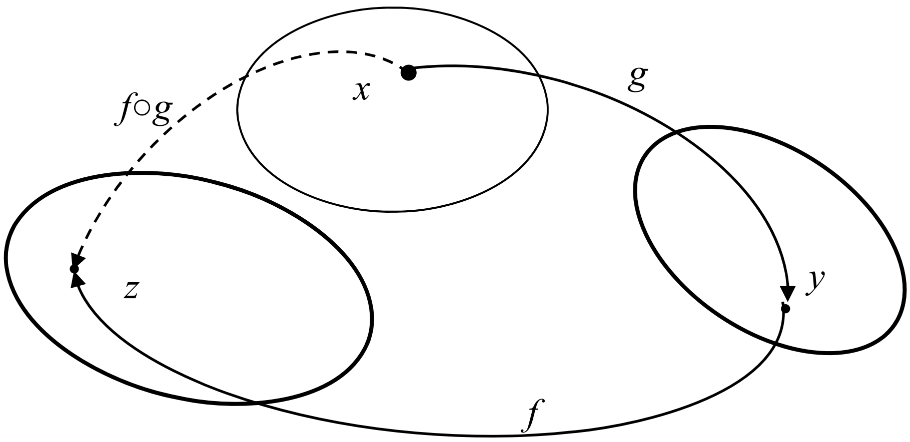


Рисунок 1.5

Тобто, композиція функцій це функція від функції. Композицію функцій ще називають складною функцією.

Область визначення складної функції $D_{f \bullet g}$ складається з усіх тих значень $z \in D_{f \bullet g}$, для яких $g(z) \in D_f$, тобто з таких z, для яких $g(z) = I_{mg} \cap D_f$ (перетин). Іншими словами, для складної функції значення елементів z має відповідати області визначення функції f.

Композицію функцій називають ще суперпозицією.

ПРИКЛАД. Показати суперпозицію функції $y = \sqrt{4 - z^2}$. Для цієї функції запишемо:

$g : x = 4 - z^2; \qquad D_g = \boldsymbol{R};$

$f : y = \sqrt{x}\,; \qquad D_f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid x \geq 0\};$

$f \circ g = f(g(z)) = \sqrt{4 - z^2}\,;$

$D_{f \bullet g} = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R} \mid 4 - z^2 \geq 0\} = \{\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R} \mid |\, z \,| \leq 2\}.$

1.3.5. Обернена функція

Нехай задана функція

$$f\colon x \to y,$$

яка забезпечує <u>однозначну</u> відповідність, тобто для будь-якого елемента $y \in Y$ існує тільки одне значення $x \in X$.

Def. Кажуть, що задана функція, обернена до існуючої *f*, якщо кожному числу $y \in Y$ поставлене у відповідність певне число $x \in X$.

Позначимо обернену функцію f^1, тоді

$$f^1\colon y \to x.$$

Щоб побудувати обернену функцію для функції $y=f(x)$, потрібно отримати залежність $x=f^1(y)$, при цьому, область значення y повинна забезпечувати однозначність.

Зауваження. При побудові оберненої функції необхідно враховувати, що незалежну змінну (аргумент) прийнято позначати x, а залежну змінну (функцію) як y.

ПРИКЛАДИ. Побудувати обернені функції до заданих:

1. $y=3x+5$, $D_f=\mathbf{R}$, $I_{mf}=\mathbf{R}$;
   $x=\dfrac{y-5}{3}$, $D_{f^{-1}}=\mathbf{R}$, $I_{mf^{-1}}=\mathbf{R}$.
   Ответ: $f\colon y=3x+5$; $f^1\colon y=\dfrac{x-5}{3}$.
2. $y=\sin(x)$, $D_f=\mathbf{R}$, $I_{mf}=[-1, +1]$;
   $x=\arcsin(y)$, $D_{f^{-1}}=[-1, +1]$, $I_{mf^{-1}}=\{x \in \mathbf{R} \mid -=\{z \in \mathbf{R} \mid -\pi/2 \le x \le \pi/2\}$.
   Ответ: $f\colon y=\sin(x)$; $f^1\colon y=\arcsin(x)$, $D_{f^{-1}}=[-1, +1]$.

1.3.6. Неявно задані функції

Якщо функція записана відносно її змінної, то це явно задана функція:

$$y=f(x).$$

Якщо функція не розв'язана відносно y, то це неявно задана функція:

$$F(x,y)=0.$$

ПРИКЛАД: $x^2 - \ln(xy)+1=0$.

1.4. Висновки

Def. Математичний аналіз - це розділ математики, у якому методом границь вивчаються функції та їх узагальнення.

Для запису математичних висловлювань використовуються символи:

Символи			
Математична логіка		Теорія множин	
$\forall$	*«Для будь - якого…»*	$\in$	*Елемент множини*
$\exists$	*«Існує»*	$\notin$	*Не елемент множини*
$\Rightarrow$	*«Слідує»*	$\cap$	*Перетин множин*
$\Leftrightarrow$	*«Еквівалентність»*	U	*Об'єднання множин*
$\rightarrow$	*«Прямує»*	$\subset$	*Підмножина множини*
:	*«…таке, що»*	$\not\subset$	*Не підмножина*
$\vee$	*Або*	\	*Різниця множин*
$\wedge$	*І*	C	*Доповнення множин*

Def. Під множиною треба розуміти об'єднання в єдине ціле певних цілком різних елементів.

Позначення: A, B, C, X, Y – множини;

a, b, c, x, z, y − елементи множин.

Порожня множина позначається Ø.

Множина задається або перерахунком його елементів

$$M = \{a, b, c\},$$

або зазначенням їх характеристичних властивостей, наприклад:

$$M=\{z \in Z \mid z \geq 0\}.$$

Використовують множини:

1. Натуральних чисел: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Цілих невід'ємних чисел: $\mathbf{Z_0} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Цілих чисел: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

4. Раціональних чисел: $\mathbf{Q} = \{x=m/n \mid m \in \mathbf{Z} \wedge n \in \mathbf{N}\}$.

5. Дійсних чисел (раціональних і ірраціональних):

$$\mathbf{R} = \{x \wedge \mathbf{y} \mid x \in \mathbf{Q} \wedge y \not\subset \mathbf{Q}\}.$$

6. Множина комплексних чисел: $\mathbf{C} = \{x+\mathbf{i}y \mid x,y \in \mathbf{R} \wedge \mathbf{i}^2 = \mathbf{-1}\}$.

Для геометричного зображення дійсного числа використовується числова вісь.

Множини як числові проміжки:

1. Сегмент, відрізок: $[a,b]= \{\mathbf{x} \in R \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

2. Інтервал: $(a,b)= \{\mathbf{x} \in R \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$.

3. Напівінтервал: $(a,b]= \{\mathbf{x} \in R \mid \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$, $[a,b)= \{\mathbf{x} \in R \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$.

4. Промені (визначення за аналогією з попередніми):

$(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $[-\infty,a)$, $(-\infty,a]$.

Розрізняють праві і ліві, відкриті і закриті промені (a - початок променя).

Якщо набір елементів множини являє собою одне і те ж значення, то такий набір можна назвати ***постійною величиною****.*

Якщо набір елементів множини являє собою різні значення, то такий набір можна назвати ***змінною величиною****.*

Def. Кажуть, що на числовій множині X_1 ***визначена функція f, якщо кожному елементу*** $x \in X_1$ ***поставлено однозначно у відповідність визначене число*** $y \in Y_1$.

Це позначається так:

$$y=f(x), \qquad y=y(x), \qquad f: x\to y,$$
$$x\to y, \qquad X_1 \to Y_1, \qquad F(x,y)=0,$$
$$X_1 \xrightarrow{f} Y_1.$$

Називають:

x – аргумент, або незалежна змінна;

y – значення функції, або залежна змінна.

Розрізняють:

D_f *− область визначення функції;*

I_{mf} *− область значень функції (image − образ).*

Розрізняють функції:

1. Постійні – функції, всі значення яких дорівнюють між собою:

$$f(x)=C.$$

2. Обмежені функції:

а) обмежені зверху: $(\exists M)\ (\forall x \in X) : f(x) \le M;$

б) обмежені знизу: $(\exists M)\ (\forall x \in X) : f(x) \ge m;$

в) обмежені: $(\exists a > 0)\ (\forall x \in X) : |f(x)| \le a.$

3. Необмежені функції.

Задати функцію - це означає вказати, як по заданому аргументу x визначається значення функції y. Розрізняють три основних способи задання функції:

*1**. Аналітичний,** коли функціональну залежність представляють у вигляді виразу, формули.*

*2**. Графічний**, коли функцію представляють у вигляді графіка.*

Def. Графіком функції f(x) називається множина

$$\boldsymbol{\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in D_f \wedge y=f(x)\},}$$

де R^2 − множина точок площини, тобто фактично множина точок площини з координатами (x, f(x)).

Не всі функції можуть бути задані графічно.

3. Табличний. Значення аргументу і відповідні йому значення функції записують у вигляді таблиці.

Зауваження. Якщо Γ - графік функції f (x), то:

1) $y_1 = -f(x)$ *- дзеркальне відображення Γ відносно осі Ох;*

2) $y_2 = f(-x)$ *- дзеркальне відображення Γ відносно осі Оу;*

3) $y_3 = f(x-a)$ *- зміщення вздовж осі ох вправо на а (а> 0);*

4) $y_4 = b + f(x)$ *- зміщення вгору уздовж осі Оу на b (b> 0);*

5) $y_5 = f(ax)$ *- (а> 0, а ≠ 1) стиснення в а разів при а> 1 або розтягнення в а разів при а <1 уздовж осі Ох;*

6) $y_6 = bf(x)$ *- (b> 0, b ≠ 1) розтягнення в b разів при b> 1 або стиснення в 1 / b разів при b <1 уздовж осі Оу.*

***Def.* До простих елементарних функцій відносяться такі функції:**

f(x)=C	***- постійна;***
x^{α}	***- степенева;***
a^{x}	***- показникóва*** *або* ***експоненці́йна;***
$\log_a x$	***- логарифмічна;***
sin(x), cos(x), tg(x), ctg(x),	***- тригонометрична;***
arcsin(x), arccos(a), arctg(x), arcctg(x)	***- обернені тригонометричні.***

***Def.* До класу елементарних функцій відносяться всі функції, які отримуємо за допомогою кінцевого числа арифметичних дій над найпростішими елементарними функціями, а також суперпозицією функцій.**

Розрізняють:

1. Цілі раціональні функції (алгебраїчні многочлени, або поліноми) − такі функції, де над х виконуються дії множення на число, додавання, віднімання, піднесення до цілого степеня:

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n .$$

2. Дрібно-раціональні функції представляють собою відношення двох многочленів:

$$F(x) = \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m} .$$

3. Раціональні функції – функції, які являються або цілими раціональними, або дробово-раціональними функціями.

4. Ірраціональні функції – функції, які містять дробові степені аргументу (окремий випадок запису дробової степені - корінь):

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f(x) = \sqrt{(1 + 2x + 5x^2)/(3 + 2x^3)} .$$

5. Раціональні (цілі, дробові) та ірраціональні функції називають алгебраїчними.

Всі неалгебраїчні функції називають трансцендентними.

Загальні властивості функцій:

1. Функція називається ***парною****, якщо* $f(-x) = f(x)$*, і* ***непарною****, якщо* $f(-x) = -f(x)$*. Інакше функція називається* ***простою*** *(немає ні парності, ні непарності).*

2. Функція називається ***періодичною****, якщо існує таке мінімальне число T, для якого при будь-якому x виконується рівність f(x+nT) = f(x), де* $n \in N$*. Найменше число T при цьому називається* ***періодом*** *функції.*

3. Монотонність.

***Def.* Функція називається монотонною на заданому інтервалі, якщо на цьому інтервалі приросту аргументу відповідає приріст функції, тобто**

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f .$$

***Def.* Функція називається монотонно зростаючою на інтервалі** $[a,b]$**, якщо на цьому інтервалі більшому значенню аргументу (**$x_1 > x_2$**) відповідає більше значення функції (**$f(x_1) > f(x_2)$**).**

Def. Функція називається монотонно спадною на заданому інтервалі, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Def. Якщо z є функцією f від y, а y є функцією g від x, то складною функцією z від змінної x називають функцію f від функції g.

Область визначення $D_{f\bullet g}$ складається з усіх тих значень $z \in D_{f\bullet g}$, для яких $g(z) \in D_f$, тобто з таких z, для яких $g(z) = I_{mg} \cap D_f$ (перетин). Іншими словами, для складної функції значення елементів z має відповідати області визначення функції f.

Функцію f від функції g *називають ще композицією функцій, або суперпозицією.*

Нехай задана функція

$$f: x \to y,$$

яка забезпечує <u>однозначну</u> відповідність, тобто для будь-якого елемента $y \in Y$ існує тільки одне значення $x \in X$.

Def. кажуть, що задана функція, обернена до існуючої f, якщо кожному числу $y \in Y$ поставлене у відповідність певне число $x \in X$.

Позначається обернена функція f^1, тоді

$$f^1: y \to x.$$

Щоб побудувати обернену функцію для функції $y=f(x)$, потрібно отримати залежність $x=f^1(y)$, при цьому область значення y повинна забезпечувати однозначність.

Якщо функція записана відносно її змінної, то це явно задана функція:

$$y=f(x).$$

Якщо функція не розв'язана відносно y, то це неявно задана функція:

$$F(x,y)=0.$$

2. ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ

2.1. Гіперболічні функції і їх геометричне уявлення

Def. Гіперболічні функції - це функції, для побудови яких використовується показникóва функція

$$a^x,$$

де *a* − Неперово число *e* = 2,718…

Def. Гіперболічним синусом і гіперболічним косинусом називають функції, які визначаються формулами

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

За аналогією з тригонометричними функціями вводяться поняття тангенса гіперболічного і котангенс гіперболічного:

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

а також секанса гіперболічного і косеканса гіперболічного:

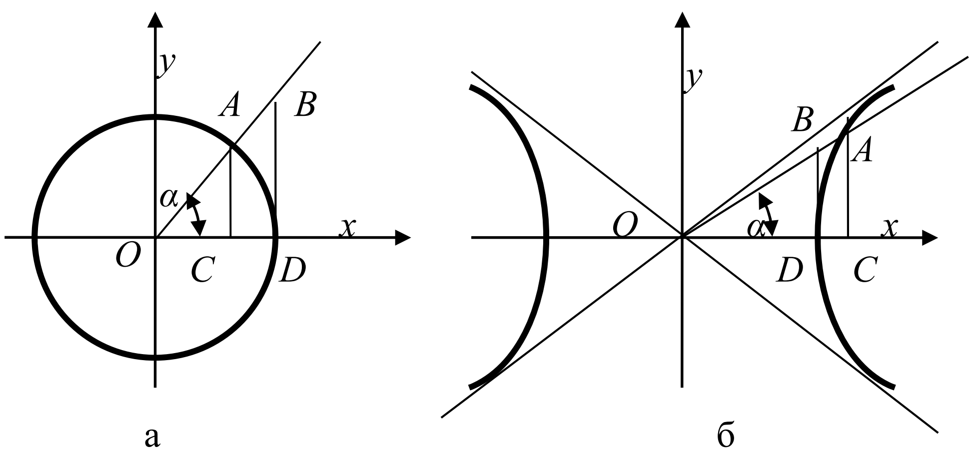
$$sch(x) = \frac{1}{ch(x)}, \ \ \operatorname{csc}h(x) = \frac{1}{sh(x)}.$$

В одиничному колі $x^2 + y^2 = 1$ (Рисунок. 2.1, а) тригонометричні функції можна представити так:

$$sin(\alpha) = AC; \ \ cos(\alpha) = OC; \ \ tg(\alpha) = BD.$$

Гіперболічні функції (за аналогією з тригонометричними) в одиничної гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ (рисунок 2.1, б) можна представити так:

$$sh(\alpha) = AC; \ \ ch(\alpha) = OC; \ \ th(\alpha) = BD.$$



а б

Рисунок. 2.1

2.1.1. Парність і непарність гіперболічних функцій

Серед гіперболічних функцій, як і серед тригонометричних, парною є *ch(α)*, а три останні – непарні:

$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ ch(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=ch(x);$$

$$sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\ sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-sh(x).$$

2.1.2. Основні залежності для гіперболічних функцій

Розглянемо вираз $ch^2x-sh^2x=1$. Його можна записати у вигляді

$$\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}}{4}=$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=1.$$

Аналогічно виводяться і інші вирази, які можна записати в такому вигляді:

$$ch^2x-sh^2x=1;$$

$$ch(x\pm y)=chx\cdot chy\pm shx\cdot shy;$$

$$sh(x\pm y)=shx\cdot chy\pm shy\cdot chx;$$

$$ch2x=ch^2x+sh^2x;$$

$$sh2x=2shx\cdot chx.$$

2.1.3. Графіки гіперболічних функцій

Функції $y = ch(x)$ и $y = sh(x)$ можна представити в наступному вигляді:

$$ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{x};$$

$$sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{x}.$$

Маючи графіки функцій $y=\frac{1}{2}e^{x}$ и $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{x}$, графічним складанням можна отримати точки гіперболічних функцій (рисунок 2.2).

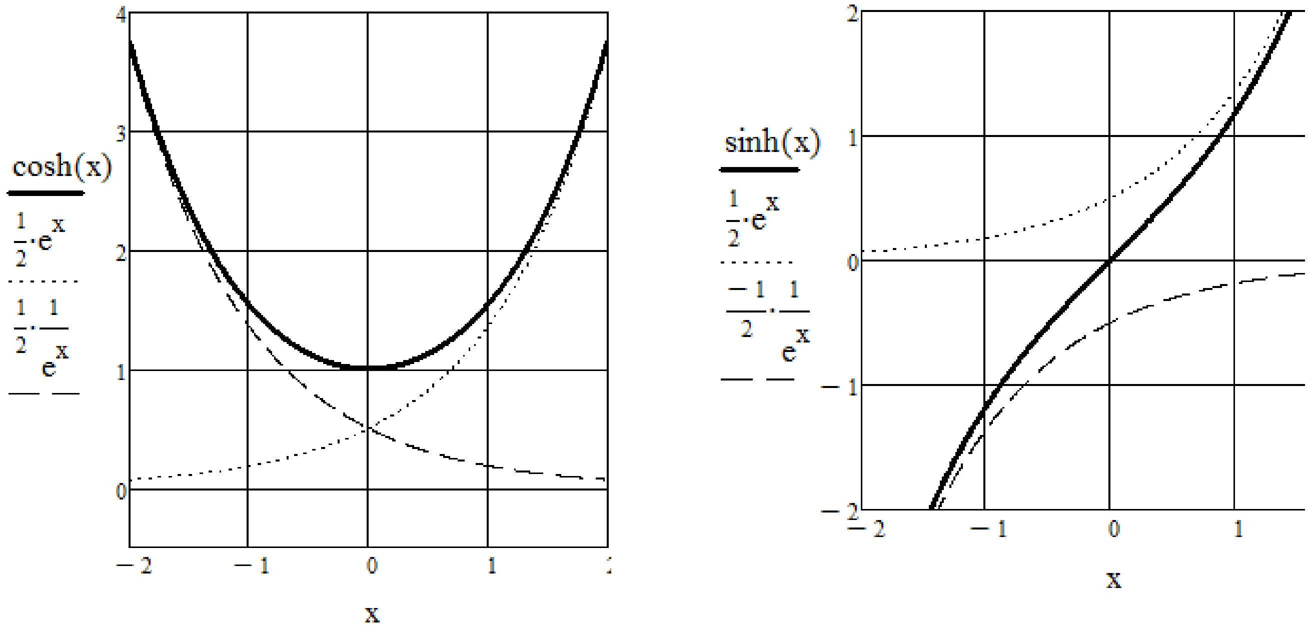


Рисунок. 2.2

Аналізуючи отримані графіки, можна побудувати графіки функцій *th(x)* і *cth(x)* (рисунок 2.3).

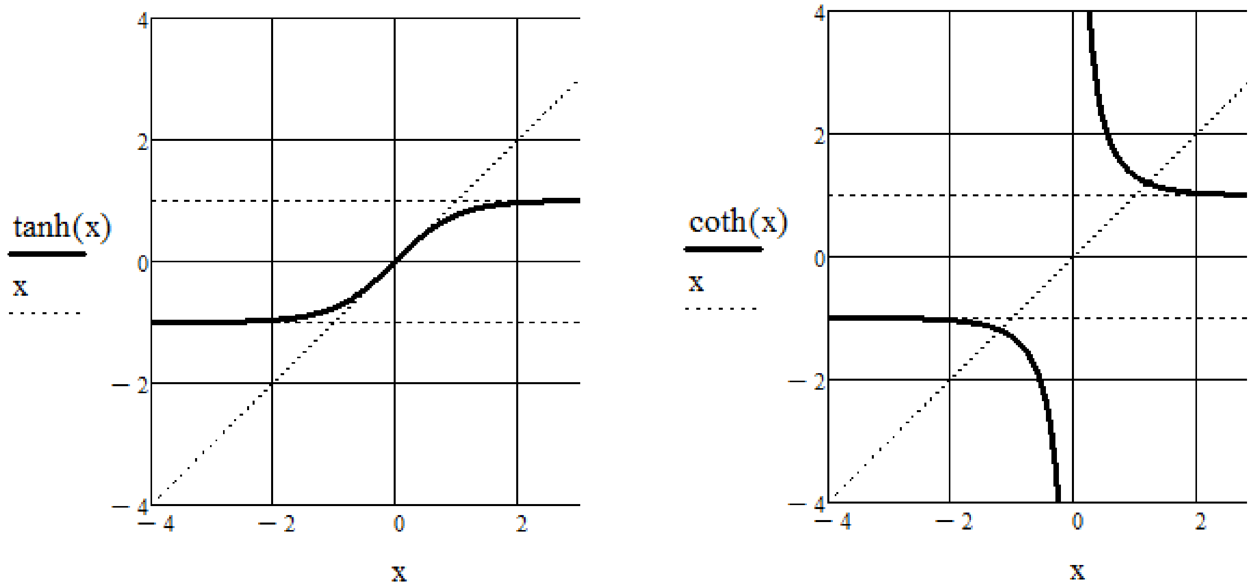


Рисунок. 2.3

2.2. Поняття границі

2.2.1. Числова послідовність

Def. Під числовою послідовністю будемо розуміти множину дійсних чисел, які є значеннями функції, областю визначення якої є множина натуральних чисел.

Іншими словами, кожному натуральному числу ставиться у відповідність дійсне число. Це можна записати наступним чином:

$$x_n = f(n),$$

де $n \in N$ або $\{f(n)\}$, x_n – n-й елемент послідовності, або загальний елемент послідовності.

Послідовність можна задати так:

1. Значеннями її елементів, наприклад: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ ... .

2. Загальною залежністю, наприклад: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

3. Рекурентною залежністю, коли задаються перший елемент і залежність для отримання наступного елемента через попередній:

$$a_1, \;\; a_{i+1} = \varphi(a_i),$$

наприклад:

$$a_1 = 1,\ a_{i+1} = \frac{a_i}{i+2}.$$

Цей варіант частіше використовується в обчислювальній техніці.

ПРИКЛАД. Задати числову послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ рекурентною залежністю.

Розв'язок.

Маємо

$$a_1 = 1, \;\; a_i = \frac{1}{i},\ a_{i+1} = \frac{1}{i+1}.$$

Тоді можна обчислити рекурентний коефіцієнт:

$$k_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{i+1}\frac{i}{1} = \frac{i}{i+1} \;.$$

Отже, числова послідовність являє собою запис виду

$$a_i = 1, \quad\; a_{i+1} = k_i\, a_i \;.$$

Розрізняють такі послідовності:

1. Обмежені зверху.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху, якщо існує число M, таке, що будь-який елемент x_n цієї послідовності не більш цього числа, тобто якщо $(\exists M)$ $(\forall x_n)$: $x_n \le M$.

ПРИКЛАД: $x_n = - n^3$.

2. Обмежені знизу.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою знизу, якщо існує число m, таке, що будь-який елемент x_n цієї послідовності не менш цього числа, тобто якщо $(\exists m)\ (\forall x_n) : x_n \geq m$.

ПРИКЛАД: $x_n = n^2$.

3. Обмежені.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо існує позитивне число a, таке, що будь-який елемент x_n цієї послідовності по модулю не більше цього числа, тобто якщо $(\exists a>0)\ (\forall x_n) : |x_n| \leq a$.

ПРИКЛАД: $x_n =(-1)^n \frac{2}{n}$, где $-2 \leq x_n \leq 2$.

4. Необмежені.

Def. Послідовність $\{x_n\}$ називається необмеженою, якщо для будь-якого числа $M>0$, знайдеться такий номер N, починаючи з якого для всіх $n>N$ буде виконуватися нерівність $|x_n| >M$, тобто якщо $(\forall M>0)\ (\exists N : n>N) \rightarrow |x_n| >M$.

2.2.2. Границя числової послідовності

Def. Число a називається границею числової послідовності $\{u_n\}$, якщо для будь-якого позитивного числа ε існує номер $N(\varepsilon)$, такий, що при $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Позначається границя як

$$\lim_{x\to\infty} u_n = a.$$

Це можна записати через квантори у вигляді

$$\lim_{x\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon >0)\ (\exists N(\varepsilon))(\forall\ n>N) \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Можна ще записати так:

$$u_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Def. Послідовність, що має границю, називається збіжною. Послідовність, яка не має границі, називається розбіжною.

ПРИКЛАД. Показати, що послідовність $\frac{n}{n+1}$ збігається до 1.

Розв'язання.

Послідовність має такий вигляд: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots \frac{n}{n+1}; \ldots$. Так як $\lim_{x\to\infty} u_n = 1$, для будь-якого ε виконується нерівність $|u_n - 1| < \varepsilon$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon;\ \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon;\ \frac{1}{n+1} < \varepsilon;\ n+1 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ або } n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Як N можна вибрати

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

Наприклад, $\varepsilon = 0{,}001$, тоді, щоб виконувалась умова $\left| u_n - 1 \right| < 0{,}001$, як N досить взяти $N = \left[\dfrac{1}{0{,}001} - 1 \right] + 1 = 999+1 = 1000$, і при будь-якому $n > 1000$ буде виконуватися умова $\left| u_n - 1 \right| < 0{,}001$.

Зауваження. Визначення границі послідовності дозволяє перейти до границі функції $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2.2.3. Границя функції при $x \to x_0$

Нехай функція $f(x)$ визначена на осі Ox і при цьому можливо, що $x \neq x_0$. Припустимо, що можна вибрати такі точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, відмінні від x_0, які утворюють послідовність, яка збігається до x_0.

Значення функції в точках цієї послідовності також утворюють числову послідовність

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n),$$

і можна ставити питання про її границю.

Def. 1 (по Гейне). Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ (або при $x \to x_0$), якщо будь-який збігається до x_0 послідовності

$$\{x_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$$

відповідає послідовність значень функції

$$\{f(x_n)\}_{n=1,\ldots,\infty},$$

яка збігається до A.

Записується це так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Def. 2 (по Коші). Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ (або при $x \to x_0$), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх $x \in X$, $x \neq x_0$, задовольняють нерівності

$$| x - x_0 | < \delta,$$

виконується нерівність

$$| f(x) - A | < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in X \wedge x \neq x_0 \wedge |x-x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Зауваження. У визначенні меж не потрібно, щоб функція була задана в граничній точці. Потрібно, щоб функція була визначена в околі граничної точки, де під околом цієї точки розуміють множину виду $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ (Рисунок. 2.4).

Щоб перевірити, що A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, потрібно задати додатнє як завгодно мале число ε. Якщо для нього завжди можна підібрати таке додатнє число δ, що для всіх x (не рівних x_0), виконується нерівність

$$| x - x_0 | < \delta,$$

буде справедлива також нерівність

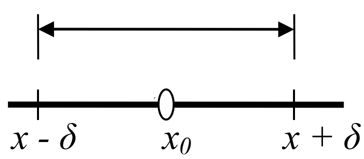


Рисунок 2.4

$$| f(x) - A | < \varepsilon,$$

тоді число A − дійсно границя функції $f(x)$ при $x \to x_0$.

ПРИКЛАД. Довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$.

Розв'язання.

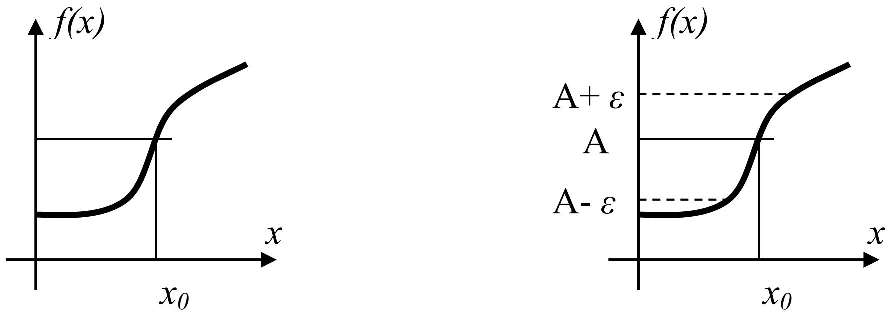
З визначення випливає, що для $| x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A|<\varepsilon$, із умови прикладу $x_0 = 1$; $f(x) = 2x+1$; $A = 3$. Значить, $|x - 1| < \delta \Rightarrow |2x+1 - 3|<\varepsilon$ або $|2x - 2|<\varepsilon \Rightarrow |x - 1|<\varepsilon/2$. Отже, для $\forall\ x \to x_0$ в якості δ може бути вибране число $\varepsilon/2$, тобто границя існує.

2.2.4. Геометричне тлумачення границі функції при $x \to x_0$

З визначення границі випливає:

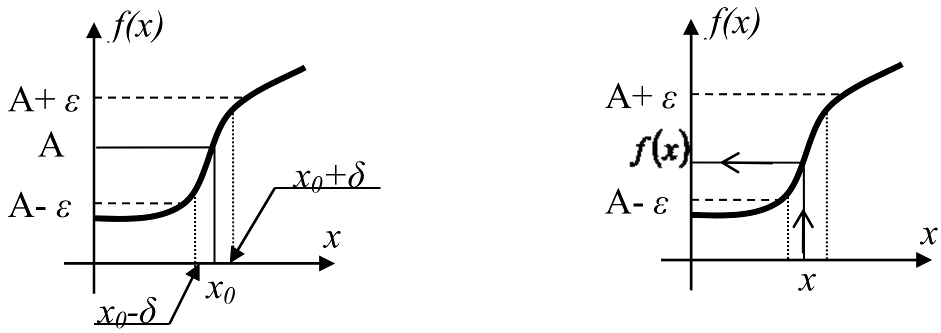
$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x)=A} \Leftrightarrow \boldsymbol{(\forall\, \varepsilon>0)(\exists\, \delta>0)(\forall\, x\in X \wedge x\neq x_0 \wedge |x-x_0|<\delta)} \Rightarrow \boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon.}$$

Геометричний зміст границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ представлений на рисунках 2.5, 2.6. Він полягає в тому, що границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ є таке число $\boldsymbol{A}$, що для будь-якої $\boldsymbol{\varepsilon}$-окілка цього числа існує такий $\boldsymbol{\delta}$-окіл змінної $\boldsymbol{x_0}$, що для всіх $\boldsymbol{x}$ із цього окілка значення функції попадає в $\boldsymbol{\varepsilon}$-окіл числа $\boldsymbol{A}$.



Задана функція $f(x)$ $\qquad$ $(\forall\ \varepsilon >0) \Rightarrow A - \varepsilon < A < A + \varepsilon$

Рисунок. 2.5



$(\exists\delta>0) \Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Рисунок. 2.6

Зауваження. При $x \to x_0$ мається на увазі, що $x \neq x_0$, а x знаходиться в околі точки x_0.

2.2.5. Односторонні границі

Для позначення наближення точки до x_0 зліва використовують запис $x_0 - 0$, а справа − $x_0 + 0$.

Def. Число A називається границею функції *f(x)* зліва в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це записується у вигляді

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \text{ или } f(x_0 - 0) = A.$$

Границя справа визначається аналогічно. У квантор визначення можна записати так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \to \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Границю справа позначають у вигляді $f(x_0 + 0) = B$.

Наведені визначення проілюстровані на рисунок. 2.7.

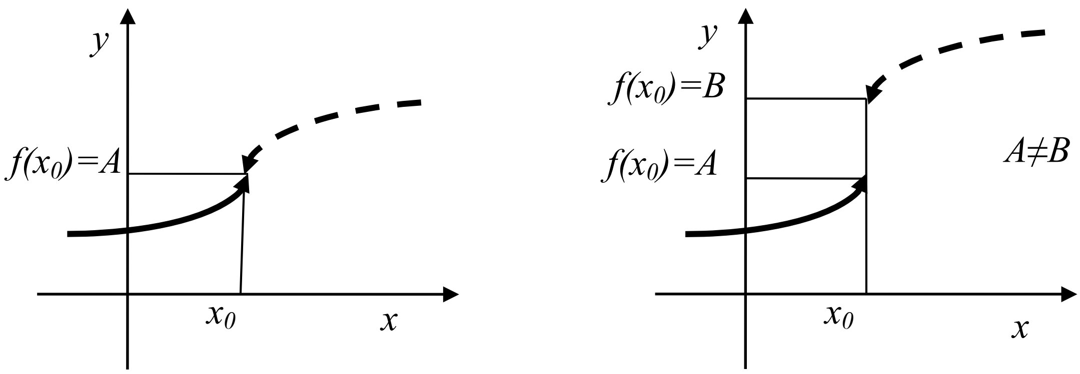


Рисунок. 2.7

Границі функції зліва і справа називаються односторонніми границя.

Якщо існує границя в точці, то існують і границі ліворуч і праворуч і вони рівні між собою і дорівнюють границі в точці.

Зауваження. Для заданої точки не завжди існує загальна границя, наприклад: $y = sign(x)$. За визначенням

$$sign(x) = \begin{cases} +1 & при \quad x > 0, \\ 0 & при \quad x = 0, \\ -1 & при \quad x < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рисунок 2.8.

Для того щоб в заданій точці існувала загальна границя, необхідно, щоб

$$x \to x_0 - 0 = x \to x_0 + 0,$$

тобто

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow (\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)).$$

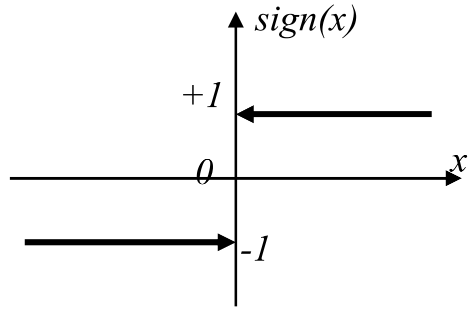


Рисунок 2.8

2.2.6. Визначення границі функції при $x \to \infty$

Крім прямування x до конкретного значення, розрізняють границі при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$; якщо ж границі співпадають, тоді $x \to \infty$.

Def. Число А називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого числа ε більше нуля $(\forall \varepsilon > 0)$ існує число $M > 0$, таке, що при всіх значеннях $|x| > M$ виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це можна записати у вигляді

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x \to +\infty}} f(x) = A \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) \Rightarrow (|x| > M) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

За аналогією для від'ємної нескінченності:

$$\lim_{\substack{x<0 \\ x \to -\infty}} f(x) = A \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M < 0) \Rightarrow (x < M) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

ПРИКЛАД: $\lim\limits_{x \to +\infty} arctg(x) = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} arctg(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Графік функції $arctg(x)$ представлений на рисунок 2.9.

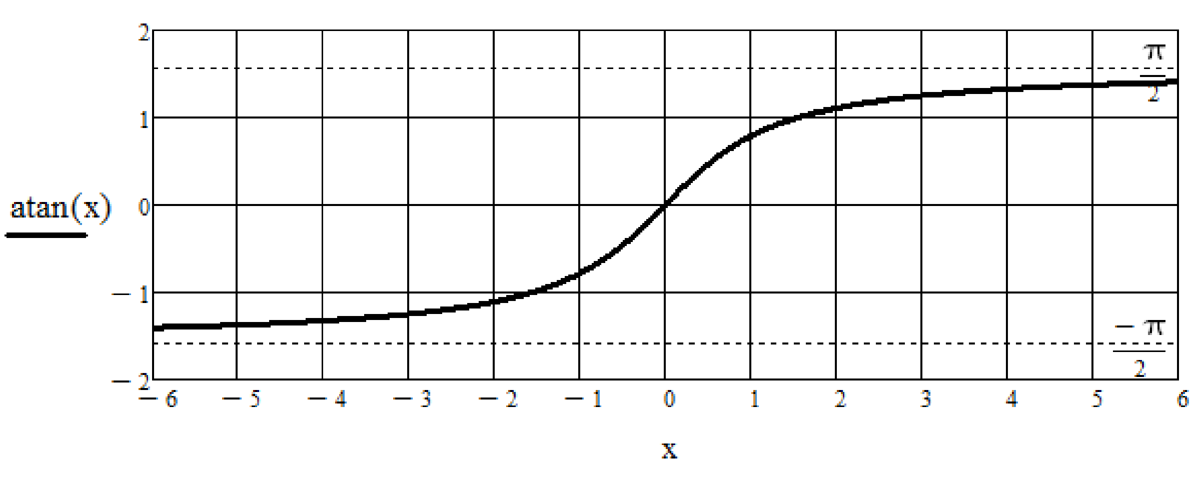


Рисунок. 2.9

2.3. Висновки

Def. Гіперболічні функції - це функції, для побудови яких використовується показникова функція

$$a^x,$$

де a − неперово число e = 2,718…

Def. Гіперболічним синусом і гіперболічним косинусом називають функції, які визначаються формулами

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Вводяться також поняття тангенса гіперболічного і котангенса гіперболічного:

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Якщо в одиничному колі $x^2 + y^2 = 1$ можна записати тригонометричні функції:

$$sin(\alpha) = AC; \ \ cos(\alpha) = OC; \ \ tg(\alpha) = BD,$$

тоді в одиничній гіперболі $x^2 - y^2 = 1$ − гіперболічні:

$$sh(\alpha) = AC; \ \ ch(\alpha) = OC; \ \ th(\alpha) = BD.$$

Серед гіперболічних функцій парною є $ch(\alpha)$, а три останні – непарні:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = ch(x);$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -sh(x).$$

Основні залежності для гіперболічних функцій:

$$ch^2x - sh^2x = 1;$$

$$ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy;$$

$$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm shy \cdot chx;$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x;$$

$$sh2x = 2 \cdot shx \cdot chx.$$

Маючи графіки функцій $y = \frac{1}{2}e^x$ *и* $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^x$, *графічним складанням можна отримати точки гіперболічних функцій.*

Def. Під числовою послідовністю будемо розуміти множину дійсних чисел, які є значеннями функції, областю визначення якої є безліч натуральних чисел.

Це можна записати як

$$x_n = f(n),\ n \in N \text{ или } \{f(n)\},$$

де x_n – n-й елемент послідовності, або загальний елемент послідовності.

Послідовність можна задати так:

1. Значеннями її елементів.

2. Загальною залежністю.

3. Рекурентною залежністю, коли задаються перший елемент і залежність для отримання наступного елемента через попередній:

Розрізняють такі послідовності $\{x_n\}$:

1) обмежена зверху, якщо $(\exists M)\ (\forall x_n) : x_n \le M$;

2) обмежена знизу, якщо $(\exists m)\ (\forall x_n) : x_n \ge m$;

3) обмежена, якщо $(\exists a>0)\ (\forall x_n) : x_n \le |a|$;

4) необмежена, якщо $(\forall M>0)\ (\exists N : n>N) \ \rightarrow\ |x_n| > M$.

Def. Число a називається границею числової послідовності $\{u_n\}$, якщо для будь-якого позитивного числа ε існує номер N(ε), такий, що при n > N(ε) виконується нерівність

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Позначаєтся границя як

$$\lim_{x\to\infty} u_n = a.$$

Це можна записати через квантори у вигляді

$$\lim_{x\to\infty} u_n = a \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))(\forall\ n>N) \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Можна ще записати так:

$$u_n \ \rightarrow a \ \text{ при } n \ \rightarrow\ \infty.$$

Def. Послідовність, що має границю, називається збіжною. Послідовність, яка не має границі, називається розбіжною.

***Def. 1** (по Гейне). Число A називається границею функції f (x) в точці $x = x_0$ (або при $x \rightarrow x_0$), якщо будь-який збігається до x_0 послідовності*

$$\{x_n\}_{n=1,\dots,\infty}$$

відповідає послідовність значень функції

$$\{f(x_n)\}_{n=1,\dots,\infty},$$

яка збігається до A.

***Def. 2** (по Коші). Число A називається границею функції f(x) в точці $x = x_0$ (або при $x \rightarrow x_0$), якщо для будь-якого числа ε > 0 існує число δ >0, таке, що для всіх $x \in X$, $x \ne x_0$, задовольняють нерівності*

$$|x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X \wedge x\ne x_0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

У визначенні границі не потрібно, щоб функція була визначена в самій граничній точці.

Під δ-окілком точки x_0 розуміють множину виду $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Зауваження. При $x \to x_0$ мається на увазі, що $x \neq x_0$, а x знаходиться в окілку точки x_0.

Для позначення наближення точки до x_0 зліва використовують запис $x_0 - 0$, а справа − $x_0 + 0$.

***Def.* Число *A* називається границею функції *f(x)* зліва в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:**

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \text{ або } f(x_0 - 0) = A.$$

***Def.* Число *B* називається границею функції *f(x)* справа в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$:**

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B \text{ або } f(x_0 + 0) = B.$$

Зауваження. Для заданої точки не завжди існує загальна границя.

Для того щоб в заданій точці існувала загальна границя, необхідно, щоб

$$x \to x_0 - 0 = x \to x_0 + 0,$$

тобто $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow (\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x))$.

Розрізняють також границі при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$; якщо ж границі співпадають, то $x \to \infty$.

***Def.* Число *A* називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо можна записати**

$$\lim_{\substack{x>0 \\ x \to +\infty}} f(x) = A \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) \Rightarrow (|x| > M) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

За аналогією для невід'ємної нескінченності:

$$\lim_{\substack{x<0 \\ x \to -\infty}} f(x) = A \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists M < 0) \Rightarrow (x < M) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2.4. Питання для перевірки

1. Числова послідовність - це множина дійсних чисел, які є значеннями функції, областю визначення якої є множина:

а) натуральних чисел; б) цілих чисел; в) додатніх чисел.

2. Послідовність можна задати:

а) номерами її елементів, загальною залежністю, рекурентною залежністю; б) значеннями її елементів, загальною залежністю, рекурентною залежністю; в) значеннями її елементів, загальною залежністю, рекурсією.

3. Рекурентна залежність - це залежність, коли задаються:

а) перший елемент і наступні елементи; б) перший елемент і залежність для отримання наступного елемента через попередній елемент;в) довільний елемент і залежність для отримання наступного елемента через попередній елемент.

4. Види послідовностей щодо обмеження:

а) обмежені зверху, обмежені знизу, необмежені; б) обмежені, необмежені; в) обмежені зверху, обмежені знизу, обмежені, необмежені.

5. По Коші, число А називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо для будь-якого числа ε > 0 існує число δ >0, таке, що для всіх $x \in X$, $x \neq x_0$, задовольняють нерівності $| x - x_0 | < \delta$, виконується нерівність:

а) $|f(x) - A| > \varepsilon$; б) $|f(x) - A| < \varepsilon$; в) $|f(x) - A| = \varepsilon$.

6. Числова послідовність, яка має границю, називається:

а) збіжною; б) розбіжною; в) граничною.

7. Числова послідовність, яка не має меж, називається:

а) розбіжною; б) збіжною; в) неграничною.

8. Число a називається границею числової послідовності $\{u_n\}$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує номер $N(\varepsilon)$, такий, що при $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність:

а) $\left| u_n - a \right| = \varepsilon$; б) $\left| u_n - a \right| > \varepsilon$; в) $\left| u_n - a \right| < \varepsilon$.

9. По Гейне, число А називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо:

а) будь-який збігається до x_0 послідовності $\{x_n\}_{n=1,\dots,\infty}$ відповідає послідовність значень функції $\{f(x_n)\}_{n=1,\dots,\infty}$, яка збігається до числа А;

б) будь-якій послідовності $\{x_n\}_{n=1,\dots,\infty}$ відповідає послідовність значень функції $\{f(x_n)\}_{n=1,\dots,\infty}$, яка збігається до числа А; в) відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}_{n=1,\dots,\infty}$ збігається до числа А.

10. Правильний запис визначення границі функції в квантор має вигляд:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0):(|x-x_0| > \delta) \rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0):(|x-x_0| < \delta) \rightarrow |f(x)-A| > \varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0):(|x-x_0| < \delta) \rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$.

11. Правильний запис визначення границі числової послідовності в квантор має вигляд:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = a \leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))(\forall\ n > N) \rightarrow \left| u_n - a \right| = \varepsilon$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = a \leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))(\forall\ n > N) \rightarrow \left| u_n - a \right| > \varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = a \leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))(\forall\ n > N) \rightarrow \left| u_n - a \right| < \varepsilon$.

12. Чи потрібно, щоб для визначення границя функція була задана в граничної точці:

а) ні; б) так; в) тільки в особливих випадках?

13. У заданій точці загальна границя функції існує:

а) завжди; б) тільки в особливих випадках; в) не завжди.

14. Число A називається границею функції $f(x)$ зліва в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке:

а) що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$; а) що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$; а) що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| > \varepsilon$.

15. Число B називається границею функції $f(x)$ справа в точке x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке:

а) що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$; а) що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$; а) що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| > \varepsilon$.

16. Границею функції при $x \to +\infty$ називається таке число А, коли для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, таке, що при всіх значеннях $|x| > M$ виконується нерівність:

а) $|f(x)-A|>\varepsilon$; б) $|f(x)-A|=\varepsilon$; в) $|f(x)-A|<\varepsilon$.

17. Для визначення границь досить, щоб функція була визначена:

а) в граничній точці; б) в околі граничної точки; в) поза околом граничної точки.

18. Щоб в заданій точці існувала загальна границя, має виконуватися умова:

а) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$; б) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$; в) $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) > \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

3. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ І НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Визначення нескінченно малої і нескінченно великої величини

Def. Функція $f(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно великою величиною, якщо для будь-якого скільки завгодно великого додатнього числа M існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$, тобто

$$(\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \left(\forall x \in X \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow |f(x)| > M .$$

Def. Функція $f(x)$, яка прямує до нескінченності при $x \to x_0$, називається нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Нескінченно велика величина позначається так:

$$f(x) - \text{ н.в.в.; } f(x) \to \infty ;\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

Отже, можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0)\ \left(\forall x \in X \wedge x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x)| > M .$$

ПРИКЛАД. Нескінченно велика величина $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$. При цьому $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ та $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ (рисунок 3.1).

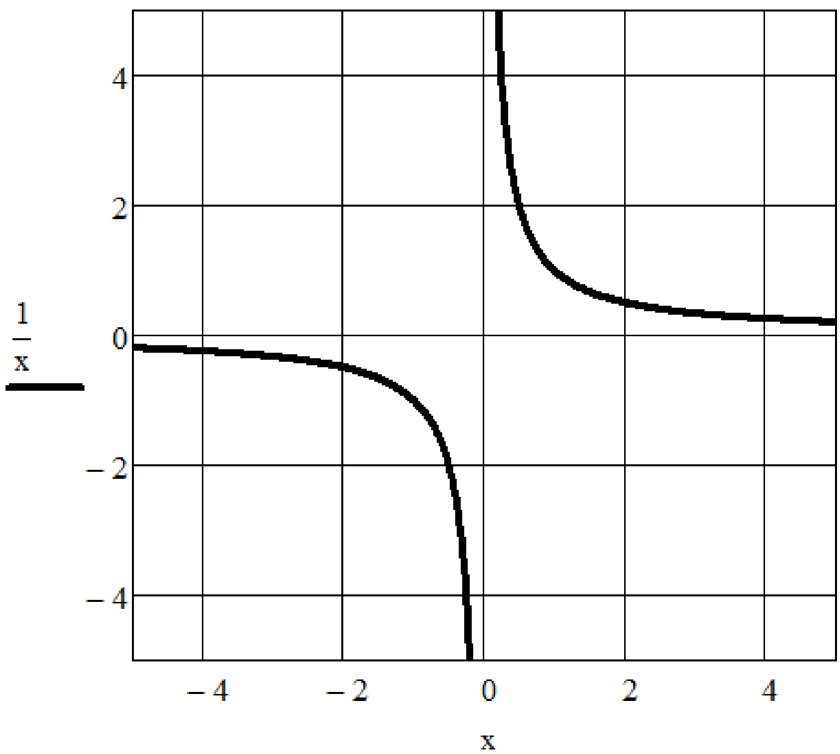


Рисунок. 3.1

Def. Функція $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно малою величиною, якщо в цьому випадку вона прямує до нуля.

Найбільш часто зустрічаються позначення нескінченно малої величини:

$$\alpha(x) - \text{ н.м.в.}; \ \alpha(x) \to 0; \ \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

За Коші, нескінченно мала величина визначається так:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0 \wedge (x - x_0) < \Delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Зауваження:

1. Тільки одна величина умовно приймається за нескінченно малу величину - це нуль.

2. Нескінченно мала величина є обмеженою функцією, тому що $|\alpha(x)| < \varepsilon$, де ε - мала величина.

3.2. Основні теореми про нескінченно малі і нескінченно великі величини

Th. Якщо функція $f(x)$ − нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ − нескінченно мала величина. Якщо функція $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ − нескінченно велика величина. Кажуть ще, що величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою величиною і навпаки.

◄ *Доведення.* Нехай $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Доведемо, що в цьому випадку $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

За визначенням

$$f(x) \to \infty \ \Rightarrow \ (\forall M > 0)(\exists \delta > 0 \wedge (x - x_0) < \delta) \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Задамо будь-яке число $\varepsilon > 0$ і візьмемо величину $M = \frac{1}{\varepsilon}$, тобто $|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}$.

Але це означає, що $\frac{1}{|f(x)|} < M = \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$. Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0 \wedge (x - x_0) < \delta) \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon,$$

тобто $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. А це за визначенням означає, що $\frac{1}{f(x)}$ − нескінченно мала величина.

Аналогічно доводиться і зворотне твердження. ►

Th (пряма). Якщо функція має границю, то її можна представити як суму постійної, рівної її границі, і нескінченно малої величини, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Rightarrow\; f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x) \to 0$.

◀ *Доведення.* Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Це означає, що

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0 \wedge (x - x_0) < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon,$$

а це можна записати так: $|\alpha(x)| < \varepsilon$, т. е. $f(x) - A = \alpha(x)$ або $f(x) = A + \alpha(x)$.▶

Th (зворотна). Якщо функцію можна представити як суму постійної і нескінченно малої величини, то постійна доданка є границею функції.

◀ *Доведення.* Із рівності $f(x) = A + \alpha(x)$, где $A = const$ та $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина при $x \to x_0$, випливає, що якщо $\varepsilon > 0$, тоді $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$. Але це і є визначення того, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. ▶

3.3. Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин

1. Th. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною, тобто якщо $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ **− нескінченно малі величини, то і** $u(x) = \alpha(x) \pm \beta(x)$ **− нескінченно мала величина.**

◀ *Доведення.* За визначенням можна записати $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже,

$|u(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким чином, $|u(x)| \le \varepsilon$. ▶

Слідство. Кінцева сума нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Особливість. Нескінченна сума нескінченно малих величин може приймати кінцеве значення.

2. Th. Добуток нескінченно малої величини на обмежену функцію є нескінченно малою величиною в околиці заданої точки, тобто якщо $\alpha(x)$ **− нескінченно мала величина і** $|g(x)| \le M$ **, тоді** $\alpha(x)g(x)$ **− нескінченно мала величина.**

◀ *Доведення.* Якщо $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина, то $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, але

$|g(x)| \le M$, отже, $|\alpha(x)||g(x)| \le M\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Або $|\alpha(x)||g(x)| \le \varepsilon$, а це за визначенням означає, що $|\alpha(x)||g(x)|$ − нескінченно мала величина. ▶

Слідство. Добуток нескінченно малої величини на число є нескінченно мала величина.

3. Th. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно мала, тобто якщо $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, тоді $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ − нескінченно мала величина.

◀ *Доведення.* При $x = x_0$ функція має значення, тобто вираз $\dfrac{1}{f(x)}$ можна розглядати в самій точці як обмежену функцію, і в силу попередньої властивості $\alpha(x)\dfrac{1}{f(x)}$ − нескінченно мала величина. ▶

Зауваження. Аналогічними властивостями володіють і нескінченно великі величини. Доводяться вони теж аналогічно. Перерахуємо ці властивості:

1. Сума двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною, тобто якщо $f_1(x) \wedge f_2(x)$ − нескінченно великі величини, то і $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ − нескінченно велика величина.

Особливість. Різниця двох нескінченно великих величин є невизначеною.

2. Добуток нескінченно великої величини на обмежену функцію є нескінченно великою величиною в околі заданої точки, тобто якщо $f(x)$ − нескінченно велика величина і $|g(x)| \le M$, то $f(x)g(x)$ − нескінченно велика величина.

Слідство. Добуток нескінченно великої величини на число є нескінченно велика величина.

3. Частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно велика, тобто якщо $f(x)$ − нескінченно велика величина і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ − нескінченно велика величина.

3.4. Властивості границь

Границі мають лінійні властивості.

1. Th. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі границь доданків функцій:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

◀ *Доведення.* З теореми про нескінченно малі величини маємо:

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1 \quad \Rightarrow \quad f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2 \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x).$$

Тоді

$$f_1(x) + f_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha_1(x) + \alpha_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha(x).$$

Отже,

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f_1(x)+f_2(x)\bigr)=A_1+A_2=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x).\ ►$$

2. Th. Границя добутку кінцевого числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f_1(x)f_2(x)\bigr)=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\lim_{x\to x_0}f_2(x).$$

◄ *Доведення.* З теореми про нескінченно малі величини маємо:

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)=A_1 \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=A_1+\alpha_1(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}f_2(x)=A_2 \quad\Rightarrow\quad f_2(x)=A_2+\alpha_2(x).$$

Тоді

$$f_1(x)f_2(x)=\bigl(A_1+\alpha_1(x)\bigr)\bigl(A_2+\alpha_2(x)\bigr)=$$

$$=A_1A_2+A_1\alpha_2(x)+\alpha_1(x)A_2+\alpha_1(x)\alpha_2(x)=A_1A_2+\alpha(x).$$

Отде,

$$\lim_{x\to x_0}\bigl(f_1(x)f_2(x)\bigr)=A_1A_2=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\lim_{x\to x_0}f_2(x).\ ►$$

3. Th. Границя частки двох функцій дорівнює частці при цих функціях, якщо знаменник не дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)},\ \text{якщо}\ \lim_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0.$$

◄ *Доведення.* З теореми про нескінченно малі величини маємо:

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)=A_1 \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=A_1+\alpha_1(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}f_2(x)=A_2 \quad\Rightarrow\quad f_2(x)=A_2+\alpha_2(x).$$

Тоді

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1+\alpha_1(x)}{A_2+\alpha_2(x)}=\frac{A_1+\alpha_1(x)}{A_2+\alpha_2(x)}+\frac{A_1}{A_2}-\frac{A_1}{A_2}=$$

$$=\frac{A_1}{A_2}+\frac{A_1A_2+\alpha_1(x)A_2-A_2A_1-\alpha_2(x)A_1}{\bigl(A_2+\alpha_2(x)\bigr)A_2}=$$

$$=\frac{A_1}{A_2}+\frac{\alpha_1(x)A_2-\alpha_2(x)A_1}{A_2A_2+\alpha_2(x)A_2}=\frac{A_1}{A_2}+\alpha(x).$$

Отже,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)}.\ ►$$

3.5. Властивість функцій зберігати знак

1. Th. Якщо функція $f(x)$ невід'ємна в околі точки x_0, то її границя невід'ємна:

якщо $f(x) \geq 0$ **при** $x \to x_0$**, то** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$**.**

◀ *Доведення.* Для $f(x) \geq 0$ маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)A \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Нехай для $f(x) \geq 0$ маємо $A < 0$. Тоді отримаємо, що $|f(x) - (-A)| = = |f(x) + A| > A$. Прийшли до суперечності. Отже, $A > 0$. ▶

2. Th. Якщо при $x \to x_0$ $f_1(x) > f_2(x)$ **і існують границі** $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ **і** $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$**, то виконується нерівність**

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) > \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

◀ *Доведення.* Задано $f_1(x) > f_2(x)$, отже, $f_1(x) - f_2(x) > 0$ і виконується нерівність $\lim\limits_{x \to x_0}(f_1(x) - f_2(x)) > 0$. Використовуючи властивість границь, можна записати

$$\lim_{x \to x_0}\left(f_1(x) - \lim_{x \to x_0} f_2(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) - \lim_{x \to x_0} f_2(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f_1(x) > \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

.▶

3.6. Використання властивостей границь для їх обчислення

З властивостей границь слідують правила, які використовуються при розв’язуванні границь.

1. Границя константи дорівнює константі (випливає з визначення константи).

2. Постійний множник на функцію можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Зауваження. Границі мають лінійні властивості.

3. Границя цілої додатньої степені змінної величини дорівнює тій же мірі границі цієї змінної:

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^n.$$

4. При визначенні $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, де x_0 належить області допустимих значень функції, значенням x_0 заміняють x:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для многочленів це використовується наступним чином:

а) $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$;

б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ при $Q(a) \neq 0$.

ПРИКЛАДИ:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^3 - x^2 + 2 \right) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 2 = \left(\lim\limits_{x \to 2} x \right)^3 - \left(\lim\limits_{x \to 2} x \right)^2 + 2 =$
$= 2^3 - 2^2 + 2 = 8 - 4 + 2 = 6$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - 2x}{4x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} (3 - 2x)}{\lim\limits_{x \to 1} \left(4x^2 + 1 \right)} = \dfrac{3 - 2 \cdot 1}{4 \cdot 1^2 + 1} = \dfrac{1}{5}$.

5. Для обчислення границі дрібно-раціональної функції при $x \to \infty$ потрібно чисельник і знаменник розділити на найбільший степінь x і використовувати визначення нескінченно малої величини:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + a_{n-2} \frac{1}{x^2} + \ldots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1} \frac{1}{x} + b_{n-2} \frac{1}{x^2} + \ldots + b_0 \frac{1}{x^n}} = \frac{a_n + 0 + 0 + \ldots + 0}{b_n + 0 + 0 + \ldots + 0} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Висновок. Границя відношення многочленів одного і того ж порядку при $x \to \infty$ дорівнює відношенню коефіцієнтів, що стоять при змінних з найбільшою степеню.

ПРИКЛАД: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x - 1} = \dfrac{3}{2}$.

Слідство:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{при} \quad n = m, \\ \infty & \text{при} \quad n > m. \end{cases}$$

6. Якщо для границь відношення многочленів $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ мають місце рівності $P(a) = 0$ і $Q(a) = 0$, тобто a є коренем многочленів, то використовують теорему Безу, на підставі якої многочлени в чисельнику і знаменнику скорочують на $x - a$.

Теорема Безу. Якщо $P(a) = 0$, то цей многочлен ділиться на $x - a$ без остачі.

Зауваження. Випадок коли в границі виходить $\dfrac{0}{0}$, називають невизначеністю.

ПРИКЛАД:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}=\left|\frac{3^2-9}{3^3-27}=\frac{9-9}{27-27}=\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{3+3}{3^2+3\cdot 3+9}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}.$$

7. Якщо у виразі під знаком границі використовується корінь квадратний, то рекомендується використовувати спряжений вираз.

Зауваження. Для виразу $a-b$ спряженим називається вираз $a+b$.

ПРИКЛАД. Визначити значення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ при $a>b$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\left|\frac{\sqrt{a-b}-\sqrt{a-b}}{a^2-a^2}=\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}{\left(x^2-a^2\right)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-b-a+b}{\left(x^2-a^2\right)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=$$

$$=\frac{1}{(a+a)\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\frac{1}{2a\cdot 2\sqrt{a-b}}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}.$$

Для розв'язування з дробовими степенями можна використовувати і заміну змінних.

ПРИКЛАД.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\left|\frac{1^2-\sqrt{1}}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}x=t^2\\ t\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t\left(t^3-1\right)}{t-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{t-1}=\lim_{t\to 1}t\left(t^2+t+1\right)=1\left(1^2+1+1\right)=3.$$

3.7. Теореми існування границь

1. Th. (про границю проміжної функції). Якщо значення функції $f(x)$ знаходиться між значеннями функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які прямують $x\to x_0$ до однієї і тієї ж границі A, то проміжна функція $f(x)$ при $x\to x_0$ також має границю A, тобто якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A$ і при цьому

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x),\ \textbf{то}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

◄ *Доведення.* Із значень границь $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A$ випливає, що $|f_1(x)-A|<\varepsilon$ і $|f_2(x)-A|<\varepsilon$. Ці вирази можна записати в такому вигляді:

$$-\varepsilon < f_1(x) - A < \varepsilon \text{ и } -\varepsilon < f_2(x) - A < \varepsilon.$$

Із умови $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ випливає, що $f_1(x) - A \le f(x) - A \le \le f_2(x) - A$, або

$$-\varepsilon < f_1(x) - A \le f(x) - A \le f_2(x) - A < \varepsilon.$$

Тоді можна записати $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$. А це означає, що для будь якого числа $\delta > 0$ при $|x - x_0| < \delta$ виконується умова $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.▶

Зауваження. Теорему про проміжні функції називають ще теоремою про двох міліціонерів.

2. Th. (про існування границі). Якщо $f(x)$ − функція, спадна при $x \to \infty$ і обмежена знизу $(\exists m > 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| > m)$, то для такої функції існує границя, для якої виконується умова $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \ge m$. Якщо $f(x)$ − функція, що зростає при $x \to \infty$ і обмежена зверху $(\exists M > 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| < M)$, то для такої функції існує границя, для якої виконується умова $\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \le M$.

3. Th. (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ є монотонною і обмеженою ($|f(x)| < M$), то вона має границю.

Слідство. Обмежена монотонна числова послідовність x_n має границю.

3.8. Висновки

Def. Функція $f(x)$, яка прямує до нескінченності при $x \to x_0$, називається нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Позначається так:

$$f(x) - \textit{н.в.в.};\ f(x) \to \infty;\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in X \wedge x \ne x_0 \wedge |x - x_0| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| > M.$$

Def. Функція $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ називається нескінченно малою величиною, якщо в цьому випадку вона прямує до нуля.

Позначается так:

$$\alpha(x) - \textit{н.м.в.};\ \alpha(x) \to 0;\ \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

По Коші, нескінченно мала величина визначається так:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0 \wedge (x - x_0) < \Delta) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

За нескінченно малу величину умовно приймається нуль.

Нескінченно мала величина є обмеженою функцією.

Th. 1. Якщо функція $f(x)$ − нескінченно велика величина, то $\dfrac{1}{f(x)}$ − нескінченно мала величина. Якщо $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ − нескінченно велика величина. Кажуть ще, що величина, обернена до нескінченно великою величиною, є нескінченно малою величиною і навпаки.

Th. (пряма). Якщо функція має межу, то її можна представити як суму постійної, рівної її межі і нескінченно малої величини, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \;\Rightarrow\; f(x)=A+\alpha(x),$$

де $\alpha(x)\to 0$.

Th. (обернена). Якщо функцію можна представити як суму постійної і нескінченно малої величин, то постійна доданка є межа функції, тобто, з рівності $f(x)=A+\alpha(x)$, де $A=const$ і $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина при $x\to x_0$, випливає, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин:

1. Th. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною, тобто якщо $\alpha(x)\wedge\beta(x)$ − нескінченно малі величини, то і $u(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ − нескінченно мала величина.

Слідство. Кінцева сума нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Особливість. Нескінченна сума нескінченно малих величин може приймати кінцеве значення.

2. Th. Добуток нескінченно малої величини на обмежену функцію є нескінченно малою величиною в околиці заданої точки, тобто якщо $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина і $|g(x)|\le M$, тоді $\alpha(x)g(x)$ − нескінченно мала величина.

Слідство. Добуток нескінченно малої величини на число є нескінченно мала величина.

3. Th. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величина нескінченно мала, тобто якщо $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ne 0$, тоді $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ − нескінченно мала величина.

Зауваження. Аналогічними властивостями володіють і нескінченно великі величини і доводяться вони теж аналогічно.

Властивості границь:

1. Границі мають лінійні властивості:

$$\lim_{x\to x_0}\left(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)\right)=C_1\lim_{x\to x_0} f_1(x)+C_2\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

2. Границя добутку функцій дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) f_2(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

3. Границя часного функцій дорівнює часному границь цих функцій:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)}, \textit{ **если** } \lim_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0.$$

Властивість функцій зберігати знак:

1. Якщо** $f(x) \geq 0$ **при** $x \to x_0$**, то** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$**.

2. Якщо при** $x \to x_0$ $f_1(x) > f_2(x)$**, то** $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) > \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$**.

З властивостей границь слідують правила, які використовуються при розв'язуванні границь:

1. Границя константи дорівнює константі (випливає з визначення константи).

2. Постійний множник на функцію можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Зауваження. Границі мають лінійні властивості.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0} x \right)^n.$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *де* x_0 *належить області допустимих значень функції.*

Для многочленів це використовується наступним чином:

а) $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a);$

б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ *при* $Q(a) \neq 0$.

5. $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \textit{при} \quad n = m, \\ \infty & \textit{при} \quad n > m. \end{cases}$$

6. Якщо для границі відношення многочленів $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *мають місце рівності* $P(a) = 0$ *и* $Q(a) = 0$, *тобто* a *є коренем многочленів, то використовують теорему Безу, на підставі якої многочлени в чисельнику і знаменнику скорочують на* $x - a$.

Теорема Безу. Якщо $P(a) = 0$, *то цей многочлен ділиться на* $x - a$ *без остачі.*

Зауваження. Випадок, коли в границі виходить $\frac{0}{0}$, *називають невизначеністю.*

7. Якщо у виразі під знаком границі використовується корінь квадратний, то рекомендується використовувати спряжений вираз.

Зауваження. Для виразу $a-b$ *спряженим називається вираз* $a+b$.

1. Th. (Про границю проміжної функції). Якщо значення функції $f(x)$ ***укладено між значеннями функцій*** $f_1(x)$ ***и*** $f_2(x)$***, які прямують при*** $x \to x_0$ ***до однієї і тієї ж границі*** A***, то проміжна функція*** $f(x)$ ***при*** $x \to x_0$ ***також має границю*** A.

Зауваження. Теорему про проміжну функцію називають ще теоремою про двох міліціонерів.

2. Th. (проіснування границі). Якщо $f(x)$ ***− функція, спадна при*** $x \to \infty$ ***і обмежена знизу*** $\left(\exists m > 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| > m\right)$***, то для такої функції існує границя, для якої виконується умова*** $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \geq m$***. Якщо*** $f(x)$ ***− функція, зростає при*** $x \to \infty$ ***і обмежена зверху*** $\left(\exists M > 0 \;\Rightarrow\; |f(x)| < M\right)$***, то для такої функції існує границя, для якої виконується умова*** $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq M$.

3. Th. (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ ***є монотонною і обмеженою (*** $|f(x)| < M$ ***), то вона має границю.***

Слідство. Обмежена монотонна числова послідовність x_n *має границю.*

3.9. Питання для перевірки

1. Нескінченно малою величиною називається функція, границя якої:

а) дорівнює нулю; б) не існує; в) дорівнює нескінченності.

2. Позначення нескінченно малої величини:

а) $\alpha(x)$ − н.м.в.; б) $\alpha(x) \to \infty$; в) $\alpha(x) \to 0$.

3. Нескінченно великою величиною називається функція, границя якої:

а) дорівнює нулю; б) не існує; в) дорівнює нескінченності.

4. Позначення нескінченно малої величини:

а) $\alpha(x)$ − н.м.в.; б) $\alpha(x)$ − н.в.в.; в) $\alpha(x) \to \infty$.

5. Позначення нескінченно великої величини.

а) $f(x)$ − н.м.в.; б) $f(x)$ − н.в.в.; в) $f(x) \to 0$.

6. Позначення нескінченно великої величини:

а) $f(x)$ − н.м.в.; б) $f(x) \to \infty$; в) $f(x) \to 0$.

7. Яке число розглядається як нескінченно мала величина:

а) 10^{-n}, де $n \to \infty$; б) 0; в) $\frac{1}{\infty}$?

8. Зв'язок між нескінченно великию і нескінченно малою величинами:

а) величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою величиною; б) величина, обернена до нескінченно великої величини, дорівнює величині, оберненій нескінченно малій величині; в) нескінченно велика величина протилежна за значенням нескінченно малой величині.

9. Зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою величинами:

а) величина, обернена до нескінченно малої величини, є нескінченно великою величиною; б) величина, обернена до нескінченно малої величини, дорівнює величині, обененій нескінченно великій величині; в) нескінченно мала величина протилежна за значенням нескінченно великій величині.

10. Кінцева сума нескінченно малих величин дорівнює:

а) нескінченно великій величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

11. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу величину дорівнює:

а) нескінченно великій величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

12. Добуток обмеженої функції на нескінченно велику величину дорівнює:

а) нескінченно великій величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

13. Добуток нескінченно великої величини на число дорівнює:

а) нескінченно великій величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

14. Функцію, що має границю $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = A}$, можна записати так:

а) $f(x) = A + \alpha(x_0),\ \alpha(x_0) \to 0$; б) $f(x) = f(x_0) + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0$; в) $f(x) = A + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0$.

15. Якщо функцію можна представити як суму константи і нескінченно малої величини, то границею цієї функції є:

а) константа; б) сума константи і нескінченно малої величини; в) різниця константи і нескінченно малої величини.

16. Кінцева сума нескінченно великих величин дорівнює:

а) нескінченно великіц величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

17. Добуток нескінченно малої величини на число дорівнює:

а) нескінченно великіц величині; б) нескінченно малій величині; в) константі.

18. Границя відношення двох функцій, якщо знаменник відмінний від нуля, дорівнює:

а) відношенню границь функцій; б) добутку границь функцій; в) алгебраїчній сумі границь функцій.

19. Якщо функція є невід'ємною в околі заданої точки, то границя цієї функції в околі заданої точки має знак:

а) недодатнім; б) невід'ємним; в) довільним.

20. При визначенні границь постійний множник виносити за знак границі:

а) не можна; б) можна; в) можна тільки в окремих випадках.

21. Границя алгебраїчної суми величин дорівнює:

а) сумі границь величин; б) добутку границь величин; в) алгебраїчній сумі границь величин.

22. Границя добутку множників дорівнює:

а) сумі границь величин; б) добутку границь величин; в) алгебраїчній сумі границь величин.

23. Границя константи дорівнює:

а) нулю; б) одиниці; в) константі.

24. Границя відношення двох раціональних функцій, якщо змінна прямує до нескінченності, якщо порядок чисельника більше порядку знаменника, дорівнює:

а) нулю; б) відношенню коефіцієнтів при змінних найбільшого степеню; в) нескінченності.

25. Границя відношення двох раціональних функцій, якщо змінна прямує до нескінченності, якщо порядок чисельника дорівнює порядку знаменника, дорівнює:

а) нескінченності; б) нулю; в) відношенню коефіцієнтів, які стоять при змінних найбільшого степеню.

26. Границя відношення двох раціональних функцій якщо змінна прямує до нескінченності, якщо порядок чисельника менше порядку знаменника, дорівнює:

а) нескінченності; б) одиниці; в) нулю.

27. При визначенні границь, що містить радикали, в разі невизначеності цієї границі, необхідно:

а) розкласти многочлени на множники; б) обчислити відношення коефіцієнтів, що стоять при змінних найбільшого степеню; в) помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

28. При визначенні границі функції, коли значення, до якого прямує змінна, належить області допустимих значень функції, знадходять так:

а) розкладають функцію на множники; б) змінній присвоюють значення, до якого прямує змінна; в) множать і ділять функцію на спяжені вирази.

29. При визначенні границі відношення двох многочленів, якщо значення, до якого прямує змінна, є коренем цих многочленів, знадходять так:

а) множать чисельник і знаменник на спряжений вираз; б) розкладають многочлени на множники за коренями; в) обчислюють відношення коефіцієнтів, що стоять при змінних найбільшого степеню.

30. Теорема про двох міліціонерів:

а) якщо $f_1(x) < g(x) < f_2(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то і $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$;

б) якщо $f_1(x) < g(x) < f_2(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$; в) якщо $f_1(x) < g(x) < f_2(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то і $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A$.

31. Обмежена монотонно зростаюча функція:

а) не має границь; б) має границю; в) має границю тільки в певних випадках.

32. Обмежена монотонно спадна функція:

а) не має границь; б) має границю; в) має границю тільки в певних випадках.

33. Границя цілого додатнього степеня змінної величини $\lim\limits_{x\to x_0} x^n$ дорівнює:

а) $n \lim\limits_{x\to x_0} x^{n-1}$; б) $\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^n$; в) $n \lim\limits_{x\to x_0} x$.

4. ЧУДОВІ ГРАНИЦІ

4.1. Перша чудова границя

Def. Границя виду

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\,\alpha}{\alpha} = 1$$

називається першою чудовою границею.

Th. Границя відношення $sin\,\alpha$ **до кута** α**, коли кут** α **прямує до нуля, дорівнює одиниці:** $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{sin\,\alpha}{\alpha} = 1.$

◄ *Доведення.* Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при х→ 0, область визначення якої $D_f = (-\infty, 0)\ U\ (0, +\infty)$.

Для аналізу границі функції розглянемо дугу одиничному колі (рисунок 4.1)

$x^2 + y^2 = 1,\ R=OA=1$

з кутом α в першій чверті. Тут

$OA = OD = 1;\ \ AC = sin\alpha;\ \ BD = tg\alpha.$

З геометричного малюнка можна записати

$S_{\Delta OAD} < S_{O\breve{}AD} < S_{\Delta OBD},$

або

$1/2 \cdot OD \cdot AC < 1/2 \cdot OA \cdot \breve{}AD < 1/2 \cdot OD \cdot BD.$

Так як $OD=OA=1$, $\cdot\cup AD = \alpha$, маємо нерівність

$$\sin\alpha < \alpha < tg\alpha.$$

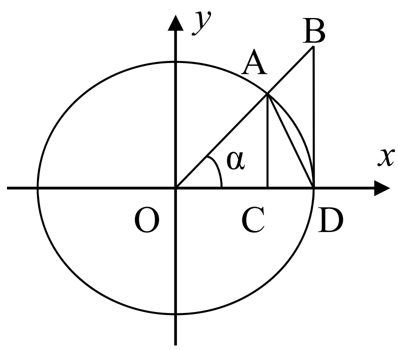


Рисунок 4.1

Розділивши цю нерівність на sinα, отримаємо

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Це можна записати так:

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

При α → 0 => cosα → 1 відповідно до теореми про двох міліціонерів, так як границя праворуч і ліворуч дорівнює 1, отримаємо

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{sin\,\alpha}{\alpha} = 1.$$

При α<0, так як cos(– α) = cos α, отримаємо $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Отже, і для (– α) наведена рівність має місце. ►

ПРИКЛАДИ:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}-\dfrac{2x}{5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{tg2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x\cos 2x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)=\dfrac{7}{2}$.

4.2. Друга чудова границя. Число e

Особливе місце займає послідовність

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1,\dots,\infty}.$$

Чи є вона збіжною, тобто чи існує її границя?

Попередньо розглянемо:

- нерівність Бернуллі;
- факторіал;
- поліном Ньютона.

1. Нерівність Бернуллі. Нерівність Бернуллі читається так: «Послідовність $(1+x)^n$ не менше $1+nx$»:

$$(1+x)^n\geq 1+nx.$$

Доводиться нерівність методом індукції.

◄ Вважаємо, що записане нерівність виконується для $n=1$:

$$(1+x)^k=(1+x)^1=1+1x.$$

Потім припускаємо, що ця нерівність має місце для $n=k$:

$$(1+x)^k\geq 1+kx.$$

Доведемо, що при $n=k+1$ нерівність також має місце:

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)=1+x+kx+kx^2=$$
$$=1+(1+k)+kx^2\geq 1+(1+k)x\Rightarrow(1+x)^{k+1}\geq 1+(1+k)x.$$

Отже, $(1+x)^n\geq 1+nx$.►

2. Факторіал визначаємо як

$$n!\;=\begin{cases}1 \;\; \text{при}\; n=0 \quad \text{або} \quad n=1,\\ (n-1)!\;n.\end{cases}$$

3. Біном Ньютона − це запис виду

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i,$$

де C_n^i – біноміальні коефіцієнти, рівні числу сполучень з n елементів по i елементів в кожному, при цьому відрізняються один від одного тільки елементами.

ПРИКЛАДИ:

а) $C_4^2\begin{pmatrix} i=2 \\ n=4 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 1} = 6;$

б) $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{3!\cdot 4}{3!\cdot 1!} = 4.$

Th. Послідовність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ має границю, тобто збігається.

Для доведення збіжності потрібно довести, що послідовність є монотонною і обмеженою.

◀ Послідовність обмежена знизу, так як з використанням нерівності Бернуллі маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\frac{1}{n} = 2\text{, т.е. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Запишемо біном Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^i =$$

$$= C_n^0\left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_n^3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Тоді

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=1+n\frac{1}{n}+\frac{(n-1)n}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{(n-2)(n-1)n}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{(n-n+1)..(n-2)(n-1)n}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Для отриманого ряду k-й елемент буде мати вид

$$a_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Для постійної k з ростом n різниця в дужках збільшується, тобто з ростом n росте a_k. Таким чином, послідовність монотонно зростає.

Оскільки $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}$; $\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{3!}$ и так далі, можна записати

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Для цих значень має місце

$$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2};\quad \frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3}\text{ и так далі.}$$

Отже,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

У заданому ряді записана нескінченно спадна геометрична прогресія, де $a_1=\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{2}<1$. В цьому випадку $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{0,5}{1-0,5}=1$, тоді

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 2+1=3.$$

Отже, задана послідовність є не тільки монотонно зростаючою, а й обмеженою як зверху, так і знизу. В цьому випадку для такої послідовності при $n\to\infty$ існує границя (ознаки існування границь) ►

Def. Границя послідовності виду $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ позначається через *e*.

Def. *e* − це ірраціональне число, що дорівнює 2,718:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \boldsymbol{e \approx 2,718.}$$

Th. Границя функції $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ дорівнює *e*.

◄*Доведення.* Для переходу до речових ступенів використовуємо функцію Ентье для x > 0:

$$[x]<x<[x]+1.$$

Нехай $[x]=n$, тоді $n<x<n+1$. Запишемо для цього відношення перевернуту нерівність

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}.$$

Додамо до кожної частини нерівності одиницю:

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}.$$

Це нерівність ще більше посилюється, якщо записати так:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Розглянемо границі функцій зліва і справа цієї нерівності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=e\cdot 1=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Тоді по теоремі про двох міліціонерів як результат отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Друга чудова границя має місце і для $x < 0$ і $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|\begin{matrix} x=-y \\ x\to-\infty \Rightarrow y\to\infty \end{matrix}\right| = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Висновок. Друга чудова границя має вигляд

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4.3. Перехід від десяткового логарифма до натурального

Def. Логарифм, за основу якого прийнято число *e*, називається натуральним логарифмом. Позначається як *ln*..., наприклад, $ln e = 1$.

Розглянемо зв'язок між десятковим і натуральним логарифмами (рисунок 4.2).

Нехай $N = a^x$; $N = b^y$; $a^x = b^y$, тоді $log_a(a^x) = log_a(b^y)$.

Оскільки $log_a(a) = 1$, маємо $x = y\, log_a b$. Але так як $x = log_a N$ и $y = log_b N$,

$$Log_a N = log_a b log_b N.$$

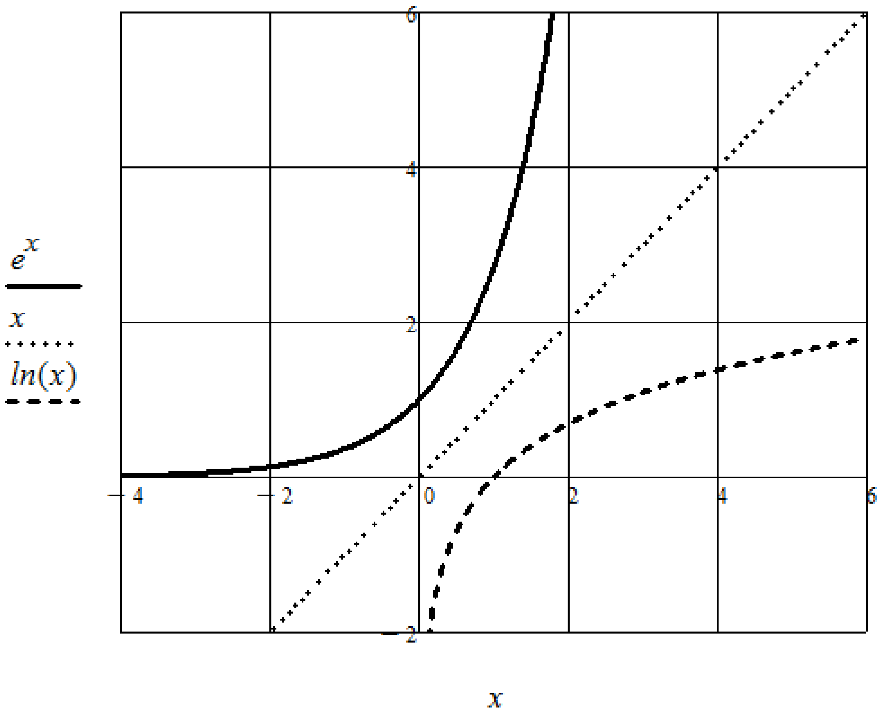


Рисунок. 4.2

Зокрема, якщо $a = e$, $b = 10$, то $ln\,N = ln\,10\;lg\,N$, де $ln10 \approx 2{,}3$, тоді

$$ln\,N = 2{,}3\;lg\,N.$$

Якщо $b = e$, $a = 10$, то

$$lg\,N = lg\,e\;lg\,N,$$

де $lg\,e \approx 0{,}43$.

Отже,

$$lg\,N = 0{,}43\;ln\,N.$$

Функція $y = ln\,x$ є оберненою до функції $y = e^x$. Обидві ці функції показані на рисунку 4.2.

4.4. Слідство другої чудової границі

Запишемо другу чудову границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Нехай $x = \dfrac{1}{t}$. Оскільки $x \to \infty$, то $t \to 0$. Таким чином,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Отриманий вираз про логарифмуємо по основі e:

$$ln\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = ln\,e.$$

В цьому випадку маємо

$$\lim_{t\to 0}\frac{ln(1+t)}{t} = 1.$$

Введемо позначення: $1+t = a^p$. Тоді при $t \to 0$ $a^p \to 1$, якщо $p \to 0$. Враховуючи, що $t = a^p - 1$, можна записати

$$\lim_{t\to 0}\frac{ln(1+t)}{t} = \lim_{p\to 0}\frac{ln\,a^p}{a^p-1} = \lim_{p\to 0}\frac{p\,ln\,a}{a^p-1} = 1.$$

Ця формула широко використовується і в таких видах:

$$\lim_{p\to 0}\frac{a^p-1}{p} = ln\,a;\quad \lim_{p\to 0}\frac{e^p-1}{p} = 1.$$

Розглянемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\,ln(1+x)}-1}{\mu\,ln(1+x)}\;\frac{\mu\,ln(1+x)}{x\cdot 1} = 1\cdot\mu\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = \mu.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu.$

Висновки. З другої чудової границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ слідує:

1) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e;$

2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1;$

3) $\lim\limits_{p\to 0}\frac{a^p - 1}{p} = \ln a;$

4) $\lim\limits_{p\to 0}\frac{e^p - 1}{p} = 1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$

4.5. Порівняння нескінченно великих і нескінченно малих величин

Міркування щодо нескінченно малих величин аналогічні міркуванням щодо нескінченно великих величин. Тому розглянемо твердження тільки щодо нескінченно малих величин.

Нехай $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ − нескінченно малі величини (н.м.в.).

Def 1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, що $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$, або що нескінченно мала величина $\alpha(x)$ має вищий порядок малості, ніж $\beta(x)$.

Def 2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то говорят, що $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ − нескінченно малі величини одного порядку.

Def 3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то говорят, що $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − еквівалентні нескінченно малі величини. Це записується через "тильду": $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Def 4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то говорят, що $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина *n*-го порядку малостності відносно $\beta(x)$.

ПРИКЛАДИ:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+5x^3}{2x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(3+5x)}{x(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(3+5x)}{2x+1} = \frac{0}{1} = 0$. Отже, $3x^2+5x^3$ − нескінченно мала величина вищого порядку малості, ніж $2x^2+x$, тобто швидше прямує до своєї границі (нулю), ніж $2x^2+x$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}3x\frac{x}{\sin x}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3$. Отже, $\sin 3x$ і $\sin x$ − нескінченно малі величини одного порядку.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Отже, $\sin x$ і x − еквівалентні нескінченно малі величини, тобто $\sin x \sim x$.

Як висновок можна записати, що при $x \to 0$

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\mu \sim \mu x.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(x/2\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin\left(x/2\right)}{x/2}\right)^2 \cdot 1/4 = \frac{1}{2}$. Отже, $1-\cos x$ − нескінченно мала величина другого порядку малості по відношенню до нескінченно малої величини x, тобто можна записати

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

4.6. Властивості еквівалентних нескінченно малих величин

1. Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − нескінченно малі величини в точці x_0, тоді добуток цих функцій $\alpha(x)\beta(x)$ має більш вищий порядок малості, ніж кожен з його множників.

◄ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$. ►

2. Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ − еквівалентні нескінченно малі величини, тобто $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то різниця цих величин $\alpha(x)-\beta(x)$ є нескінченно мала величина вищого порядку малості, ніж кожна з них.

◄ Оскільки $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, тоді отримуємо, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1-1 = 0$. ►

3. Якщо різниця двох нескінченно малих величин $\alpha(x)-\beta(x)$ при $x \to x_0$ є величина вищого порядку малості, ніж будь-яка з них, то ці величини еквівалентні.

◄ Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 0$ і $1-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$,

Отже, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, тобто $\alpha(x) \sim \beta(x)$. ►

4. Якщо при $x \to x_0$ нескінченно мала величина $\alpha(x)$ еквівалентна нескінченно малой величині $\alpha_1(x)$, тобто $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, нескінченно мала величина $\beta(x)$

еквівалентна нескінченно малій величині $\beta_1(x)$, тобто $\beta(x)\ \sim\ \beta_1(x)$, і існує границя відношення виду $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, тоді існує також границя відношення виду $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ і ці границі рівні: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

◄ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\alpha(x)\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\dfrac{1}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. ►

4.7. Використання нескінченно малих величин для обчислення границь

Знання властивостей еквівалентних нескінченно малих величин у багатьох випадках спрощує обчислення границь. При цьому зручно користуватися таблич-кою еквівалентних нескінченно малих величин, деякі елементи якої ми вже запи-сали, а решта можна вивести самостійно:

1) $sin\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
2) $tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
3) $arcsin\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
4) $arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5) $1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;
6) $ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;
7) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;
8) $(1+\alpha(x))^{\mu}\sim\mu\alpha(x)$.

ПРИКЛАДИ:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,3x}{x+x^3}=\begin{vmatrix} sin\,3x\approx 3x \\ x+x^3\approx x\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3.$

2. Аналогічно можна розв'язувати приклади і відносно нескінченно великих величин: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5}{x^2-3}=\begin{vmatrix} x\to\infty \\ 4x^2+5\approx 4x^2 \\ x^2-3\approx x^2\end{vmatrix}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4.$

4.8. Висновки

***Def.* Границя виду**

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sin\,\alpha}{\alpha}=1$$

називається першою чудовою границею.

1. Нерівність Бернуллі *читається так: «Послідовність* $(1+x)^n$ *не менше* $1+nx$*:*

$$(1+x)^n\ge 1+nx\ \text{».}$$

2 Факторіал *визначаємо як*

$$n! = \begin{cases} 1, & при\ n = 0 \quad або \quad n = 1, \\ (n-1)!\ n. \end{cases}$$

3. Біном Ньютона *− це запис виду*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i,$$

де C_n^i *– біноміальні коефіцієнти, равні числу сполучень з n елементів по i відрізняються один від одного тільки елементами).*

Th. Послідовність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ***має границю, тобто збігається.***

Def. Границя послідовності виду $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ***позначаєтся через е.***

Def. е – це ірраціональне число, рівне 2,718: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718.$

Def. Логарифм, за основу якого принято число е, називається натуральним логарифмом (позначається як ln...). Перехід від десяткового логарифма до натурального:

$$Log_a N = log_a b\ log_b N;$$
$$lg\ N = lg\ e\ lg\ N;$$
$$lg\ N = 0{,}43\ ln\ N.$$

Функція $y = ln\ x$ *є оберненоюй до функції* $y = e^x$.

Висновки. З другої чудової границі $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ *слідує:*

1) $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e;$

2) $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1;$

3) $\lim_{p\to 0}\frac{a^p - 1}{p} = \ln a;$

4) $\lim_{p\to 0}\frac{e^p - 1}{p} = 1;$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu.$

Def. 1. Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$***, то говорят, що*** $\alpha(x)$ ***− нескінченно мала величина більш високого порядку малості, ніж*** $\beta(x)$***, або що нескінченно мала величина*** $\alpha(x)$ ***має більш високий порядок малості, ніж*** $\beta(x)$***.***

Def. 2. Якщо $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$***, то говорять, що*** $\alpha(x)$ ***і*** $\beta(x)$ ***− нескінченно малі величини одного порядка.***

Def. 3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$***, то говорять, що*** $\alpha(x)$ ***і*** $\beta(x)$ ***−еэквівалентні нескінченно малі величини. Це записується через "тильду" :*** $\alpha(x) \sim \beta(x)$***.***

Def. 4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$***, то говорять, що*** $\alpha(x)$ ***− нескінченно мала величина n-го порядка малостностиі відносно*** $\beta(x)$***.***

Властивості еквівалентних нескінченно малих величин:

1. Якщо при $x\to x_0$ $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *− нескінченно малі величини в точці* x_0*, то добуток цих функцийй* $\alpha(x)\,\beta(x)$ *має більш високий порядок малості, ніж кожний з його множників.*

2. Якщо при $x\to x_0$ $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *− еквіваленті нескінченно малі величини, тобто* $\alpha(x) \sim \beta(x)$*, то різниця цих величин* $\alpha(x)-\beta(x)$ *є нескінченно мала величина більш вищого порядку малості, ніж кожна з них.*

3. Якщо різниця двох нескінченно малих величин $\alpha(x)-\beta(x)$ *при* $x\to x_0$ *є величина більш вищого порядку малості, ніж будь-яка з них, то ці величини еквівалентні.*

4. Якщо при $x\to x_0$ *нескінченно мала величина* $\alpha(x)$ *еквівалентна нескінченно малій величині* $\alpha_1(x)$*, тобто* $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$*, нескінченно мала величина* $\beta(x)$ *еквівалентна нескінченно малій величині* $\beta_1(x)$*, тобто* $\beta(x) \sim \beta_1(x)$*, існує границя відношення виду* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$*, то існує також границя відношення виду* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ *і ці границі рівні:* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Таблиця еквівалентних величин для нескінченно малих величин:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

2) $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4) $arctg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

5) $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;

6) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$;

7) $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$;

8) $(1+\alpha(x))^{\mu} \sim \mu\alpha(x)$.

4.9. Питання для перевірки

1. Функція $f(x)$ **при** $x\to x_0$ **називається нескінченно великою величиною:**

а) якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|<\varepsilon$; б) якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $M>0$, таке, що для всіх $x\in X$, що задовольняють нерівності $|x|>M$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$; в) якщо для будь-якого скільки завгодно великого додатного числа M існує число $\delta>0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>M$.

2. Виберіть правильний запис визначення нескінченно великої величини:

а) $f(x)-б.б.в. \Leftrightarrow (\forall M>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |f(x)|>M$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |f(x)|<\varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |f(x)|<\varepsilon$.

3. Функція $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ називається нескінченно малою величиною:

а) якщо не прямує до нуля; в) якщо замість функції можна використовувати нуль; в) якщо прямує до нуля.

4. Функція $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ називається нескінченно малою величиною:

а) якщо для будь-якого скільки завгодно великого додатного числа M існує число $\delta>0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>M$; б) якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|<\varepsilon$; в) якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>\varepsilon$.

5. Виберіть правильний запис визначення нескінченно малої величини:

а) $\alpha(x)-б.м.в. \Leftrightarrow (\forall M>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |f(x)|>M$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0 \wedge |x-x_0|<\delta) \Rightarrow\ |\alpha(x)|>\varepsilon$.

6. Числом, яке розглядається в якості нескінченно малої величини, служить:

а) нуль; б) немає такого числа; в) число, яке прямує до нуля.

7. Чи є нескінченно мала величина обмеженою функцією:

а) ні; б) тільки тоді, коли вона додатна; в) так?

8. Якщо функція $f(x)$ нескінченно велика величина, то функція $\frac{1}{f(x)}$:

а) нескінченно мала величина; б) нескінченно велика величина; в) не існує.

9. Якщо функція $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$:

а) нескінченно мала величина; б) нескінченно велика величина; в) не існує.

10. Якщо функція має границю, то її можна уявити:

а) як постійну величину, рівну межі; б) як нескінченно малу величину; в) як суму постійної, рівної межі, і нескінченно малої величини.

11. Виберіть правильний запис:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A$; б) якщо $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha \to 0$; в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha \to 0$.

12. Виберить правильний запис:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A$; б) $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; в) якщо $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha \to 0$.

13. Якщо функцію можна представити як суму постійної і нескінченно малої величин:

а) то постійна доданків є границею функції; б) то нескінченно мала доданків є границя функції; в) то функція не має границі.

14. Виберіть правильне твердження:

а) алгебраїчна сума нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною; б) кінцева сума алгебри нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною; в) кінцева алгебраїчна сума малих величин є нескінченно малою величиною.

15. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу величину - це:

а) обмежена функція; б) нескінченно мала величина; в) постійна величина.

16. Добуток нескінченно малої величини на функцію є:

а) обмежена функція; б) нескінченно мала величина; в) постійна величина.

17. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є:

а) обмежена функція; б) нескінченно мала величина; в) постійна величина.

18. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа функцій:

а) не дорівнює сумі границь цих функцій; б) є нескінченно великою величиною; в) дорівнює сумі границь цих функцій.

19. Границя добутку кінцевого числа функцій:

а) не дорівнює добутку границь цих функцій; б) дорівнює добутку границь цих функцій; в) є нескінченно великою величиною.

20. Границя відношення двох функцій, якщо границя знаменника відмінна від нуля:

а) дорівнює відношенню границь цих функцій; б) дорівнює відношенню границь цих функцій; в) є нескінченно великою величиною.

21. Якщо функція $f(x)$ невід'ємна в околі точки x_0, то її границя при $x \to x_0$:

а) є невід'ємна; б) є від'ємна; в) дорівнює нулю.

22. Якщо при $x \to x_0$ $f_1(x) > f_2(x)$ і існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, то:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) < \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$; б) $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$; в) $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) > \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$.

23. Границя константи дорівнює:

24. Границя відношення двох раціональних функцій при прямуванні змінної до безкінечності, якщо порядок чисельника більше порядку знаменника, дорівнює:

а) нулю; б) відношенню коефіцієнтів при змінних найбільшого степеню; в) нескінченності.

25. Границя відношення двох раціональних функцій при прямуванні змінної до безкінечності, якщо порядок чисельника менше порядку знаменника, дорівнює:

а) нулю; б) відношенню коефіцієнтів при змінних найбільшого степеню; в) нескінченності.

26. Границя відношення двох раціональних функцій при прямуванні змінної до безкінечності, якщо порядок чисельника дорівнює порядку знаменника, дорівнює:

а) нулю; б) відношенню коефіцієнтів при змінних найбільшого степеню; в) нескінченності.

27. При визначенні границі, що містить радикали, в разі його невизначеності, необхідно:

а) розкласти многочлени на множники; б) обчислити відношення коефіцієнтів, що стоять при змінних найбільшого степеня; в) помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

28. При визначенні границі відношення двох раціональних функцій при $x \to x_0$, якщо це відношення приводить до невизначеності $\left|\frac{0}{0}\right|$, необхідно:

а) розкласти многочлени на множники; б) обчислити відношення коефіцієнтів, що стоять при змінних найбільшого степеню; в) помножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

29. Якщо значення функції $f(x)$ укладено між відповідними значеннями функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$, що прямують при $x \to x_0$ до однієї і тієї ж границі A, то

а) $f(x)$ при $x \to x_0$ може мати границю, відмінну від числа A; б) $f(x)$ при $x \to x_0$ має границю, що дорівнює числу A; в) $f(x)$ при $x \to x_0$ не має границі.

30. Якщо обмежена функція $f(x) \le M$ монотонно зростає:

а) то вона має границю, що дорівнює або менше M; б) то вона не має границі; в) то її монотонність порушується.

31. Якщо обмежена функція $f(x) \ge m$ монотонно убуває:

а) то вона не має границі; б) то вона має границю, рівну або більшу m; в) то її монотонність порушується.

32. Перша чудова границя виводиться:

а) з геометричних уявлень; б) з тригонометричних співвідношень; в) з алгебраїчних перетворень.

33. Перша чудова границя має вигляд:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

34. Як в першій чудовій границі *x* прямує до нуля:

а) зліва; б) байдуже, як; в) справа?

35. Нерівність Бернуллі має вид:

а) $(1+x)^n \geq 1+nx$; б) $(1+x)^n \leq 1+nx$; в) $(1+x)^n > 1+nx$.

36. Виберіть запис визначення факторіалу:

а) $n!=\begin{cases}1 \ \ \text{при } n=0, \\ (n-1)! \ n;\end{cases}$ б) $n!=\begin{cases}1 \ \ \text{при } n=0 \ \ \text{або} \ \ n=1, \\ (n-1)! \ n;\end{cases}$ в) $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

37. Біном Ньютона має вид:

а) $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$; б) $(a+b)^n=\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$;

в) $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i\left(a^{n-i}+b^i\right)$.

38. Число сполучень в біном Ньютона можна записати так:

а) $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$; б) $C_n^m=\frac{m!}{n!(n-m)!}$; в) $C_n^m=\frac{n!}{m!(n+m)!}$.

39. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії має вигляд:

а) $a_1\frac{1-q^n}{1-q}$; б) $\frac{a_1}{1-q}$; в) $\frac{a_1}{1-q^n}$.

40. Друга чудова границя має вигляд:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$; в) $\lim\limits_{n\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

41. Неперово число дорівнює:

а) ≈3,14; б) ≈2,718…; в) ≈1,718… .

42. Запис натурального логарифма числа *N*:

а) $\lg N$; б) $\ln N$; в) $\log_2 N$.

43. Виберіть правильний запис:

а) $log_a N=log_b a\, log_b N$; б) $log_a N=\frac{log_b N}{log_a b}$; в) $log_a N=log_a b\, log_b N$.

44. Слідство другої чудової границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=e$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{x}=e$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

45. Слідство другої чудової границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x+1}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

46. Слідство другої чудової границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=e$.

47. Слідство другої чудової границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

48. Якщо для нескінченно малих величин $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ виконується умова $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то кажуть, що:

а) $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ − нескінченно малі величини одного порядку; б) $\alpha(x)$ − нескінченно мала величина більш вищого порядку, ніж $\beta(x)$; в) нескінченно мала величина $\alpha(x)$ еквівалентна нескінченно малій величині $\beta(x)$.

5. НЕПЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ І НА ПРОМІЖКУ

Def. Околом точки x_0 називається множина точок, для яких існує число δ з множини нескінченно малих величин, таке, що

$$x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta.$$

5.1. Визначення неперервності в точці

Нехай функція *f(x)* визначена в деякому околі точки x_0.

Def. 1. Функція *f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то можна записати $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$, тобто для неперервної функції можна поміняти місцями символи *«f»* и *«lim»*.

Можна дати означення неперервної функції, використовуючи визначення границі функції через послідовність.

Def. 2. Функція *f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності аргумента $\{x_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ послідовність відповідних значень функції $\{f(x_i)\}_{i=1,\ldots,\infty}$ збігається до $f(x_0)$.

Def. 3. Функція *f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, тобто

$$f(x) - \text{непер.} \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists \delta > 0) \ (|x - x_0| < \delta) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Визначимо неперервність функції через приріст.

Те, що для неперервної функції $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ і $x \to x_0$, можна уявити як $x - x_0 \to 0$ і відповідно

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ \Rightarrow \ \lim_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 .$$

Def. Різниця

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

називається приростом функції в точці x_0 .

Def. Різниця

$$\Delta x = x - x_0$$

називається приростом аргумента в точці x_0 .

Приріст функції і аргумента характеризують поведінку функції в околі точки (рисунок 5.1).

З огляду на введені позначення, можна записати так:

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 .$$

Def. 4. Функція *f(x)* називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою величиною.

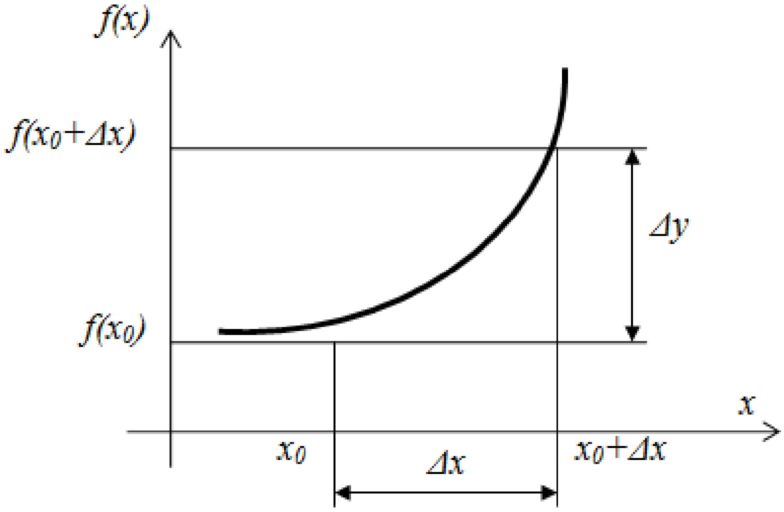


Рисунок. 5.1

Зауваження. Оскільки вводиться позначення $\Delta x = x - x_0$, то приріст функції можна записати ще так:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0).$$

5.2. Різновиди неперервності

Введене означення неперервності функції в точці

$$f(x) \text{ – непер. в точці } x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

дозволяє ввести поняття неперервності функції на множині.

Def. Функція *f(x)* є неперервною на множині, де вона визначена, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини, тобто *f(x)* − неперервна функція на множині $X \Rightarrow (\forall x \in X)$: *f(x)* – непер. в точці x_0.

Окремим випадком функції, неперервної на множині, є *функція, неперервна на відрізку*. Функція може бути неперервною не у всій області визначення, а в якійсь виділеній області.

5.3. Критерій неперервності

Оскільки існують такі уявлення, як «границя зліва» і «границя справа», розрізняють функції, неперервні зліва (рисунок 5.2), і функції, неперервні справа (рисунок 5.3). Таким же чином можна розглядати і неперервність функції в точці, коли можна записати

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

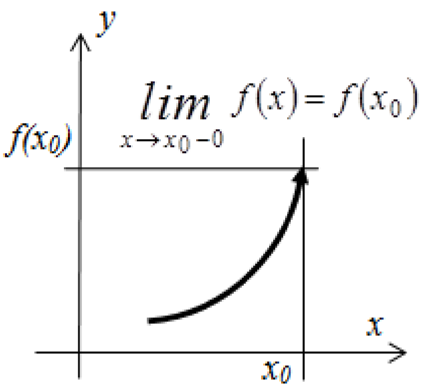


Рисунок. 5.2

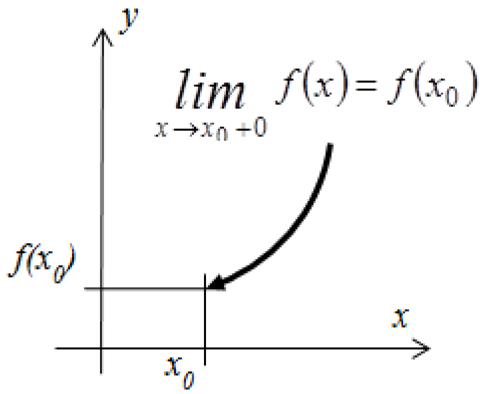


Рисунок. 5.3

Це дозволяє ввести таке поняття, як *«критерій неперервності»*.

Def. (визначення критерію неперервності функції в точці). Функція *f(x)* неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли існує границя функції зліва в точці x_0 як $f(x_0-0)$ і границя функції справа в точці x_0 як $f(x_0+0)$ і ці границі рівні значенню функції в точці x_0.

Це можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0);$$

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0);$$

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

ПРИКЛАД. Визначити неперервність функції:

1. $y = x^2$.

Розв'язання

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2 = x^2+2x\Delta x+\Delta x^2; \quad f(x)=x^2;$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x(2x+\Delta x);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\Delta x = 0.$$

2. $y = \cos x$.

Розв'язання

$$f(x)=\cos x; \; f(x+\Delta x)=\cos(x+\Delta x);$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = -\lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} = 0.$$

3. $y = |x|$.

Розв'язання

Графік функції $y = |x|$ представлений на рисунку 5.4. Із графіка видно, що і при $x>0$, і при $x<0$ функція неперервна.

Для встановлення неперервності графіка в точці $x=0$ розглянемо однобічні границі функції в цій точці:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}|x| = \lim_{\Delta x\to 0-0}(-x)=0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} |x| = \lim_{\Delta x \to 0+0} x = 0.$$

Границі в точці $x=0$ зліва і справа збігаються і дорівнюють значенню функції в цій точці. Отже, функція $y = | x |$ є неперервною в усіх точках числової прямої.

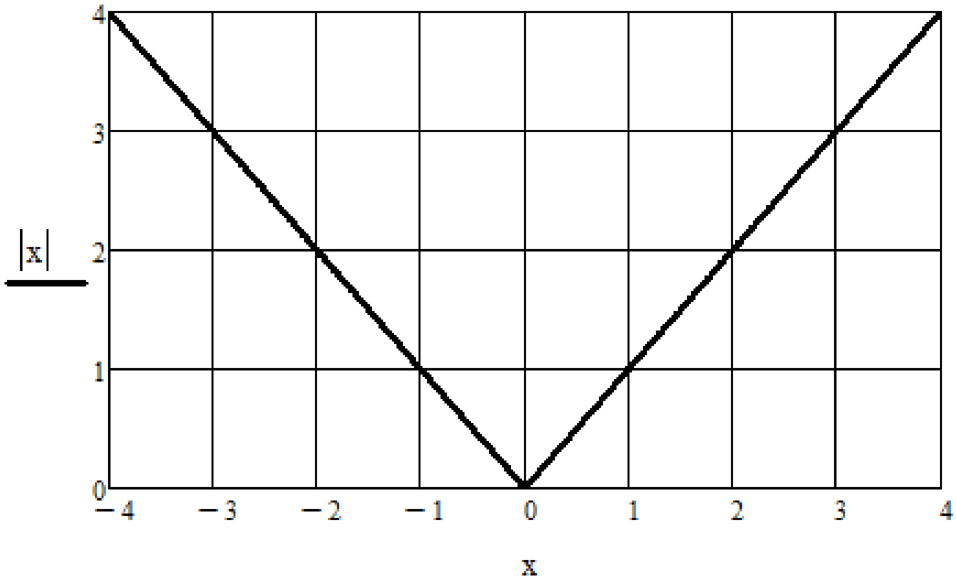


Рисунок. 5.4

5.4. Арифметичні дії над над неперервними функціями

Th. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, тоді функції

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

також неперервні в точці x_0.

Ці властивості неперервності випливають з властивостей границь, наприклад, для $f(x) \pm g(x)$ доведемо теорему.

◄ Оскільки функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

і тоді із властивостей границь слідує

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0),$$

тобто $\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = f(x_0) \pm g(x_0)$, що і і визначає неперервність в заданій точці. ►

Аналогічно теорема доводиться для добутку і частки двох заданих функцій.

5.5. Точки розриву і їх класифікація

Def. Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо ця функція в точці x_0 не є неперервною.

Це можна уявити з використанням критерію неперервності.

З критерію неперервності функції випливає, що для неперервної функції в точці x_0 повинні виконуватися три умови:

$$\exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0);$$

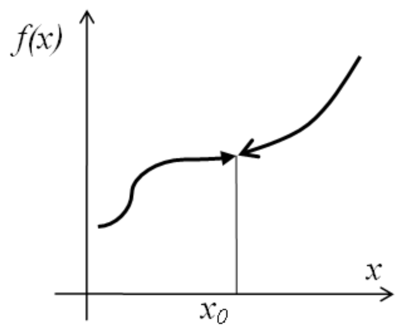
$$\exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

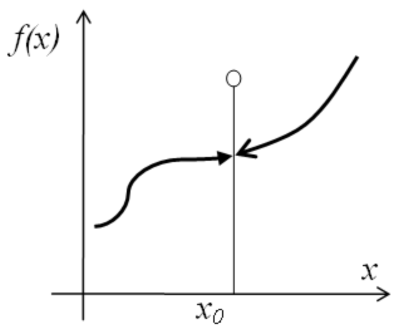
Якщо порушується хоча б одна з трьох умов, то x_0 називають точкою розриву функції $f(x)$.

Для точок розриву вводиться наступна класифікація

1. Якщо границя зліва є кінцевою і дорівнює границі справа, причому ці границі не рівні значенню функції в цій точці, або функція в точці x_0 є невизначеною, то такий розрив називається ***усувним*** (рисунок 5.5, а, б).



а



б

Рисунок. 5.5

ПРИКЛАД. Побудувати графіки функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{sin\, x}{x}$.

Графіки заданих функцій показані на рисунку 5.6, а, б.

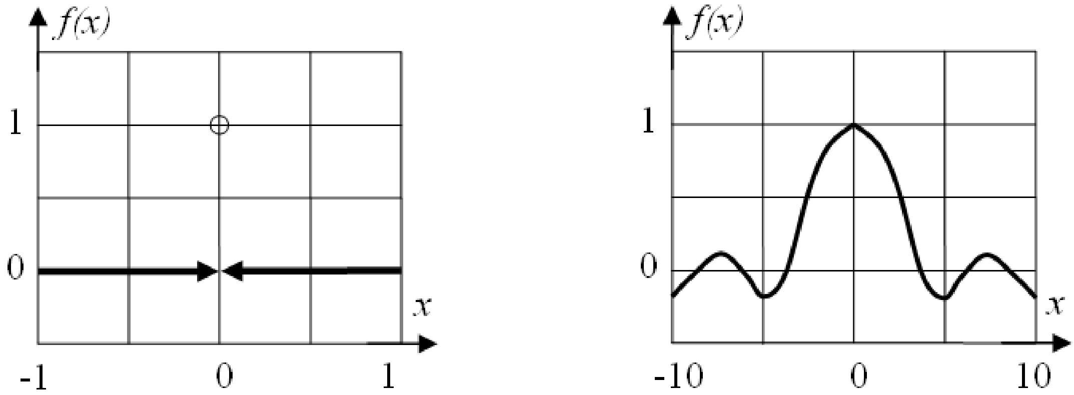
2. Якщо границі зліва і справа кінцеві, але не рівні між собою, то такий розрив називається ***розривом первого рода***:

$$\exists f(x_0 \pm 0):\ f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0).$$

ПРИКЛАД. Побудувати графіки функцій:

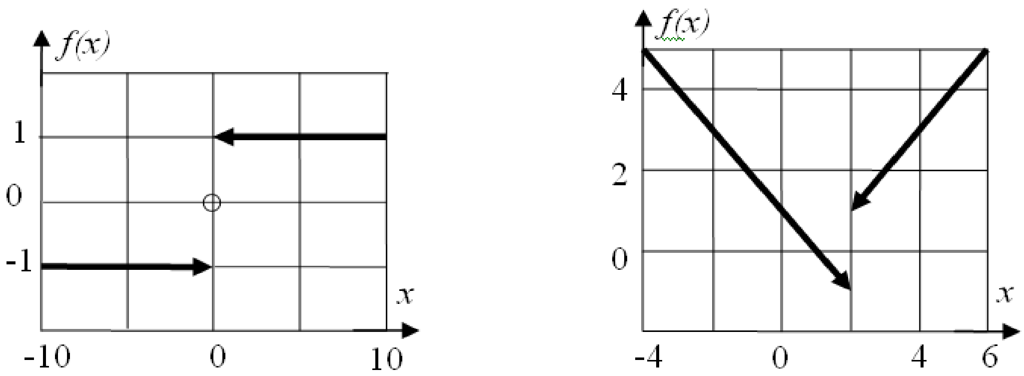
а) $f(x) = Sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x-2|} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{|x-2|}$.

Графіки заданих функцій показані на рисунку 5.7, а, б.



а б

Рисунок 5.6



а б

Рисунок 5.7

3. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ не має принаймні одного з однобічних границь або хоча б одна із однобічних границь нескінченна, то такий розрив називається ***розривом другого роду***.

ПРИКЛАД. Побудувати графіки функцій:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$; б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

Графіки заданих функцій показані на рисунках 5.8 і 5.9.

5.6. Кусково-неперервна функція

Def. Функція називається кусково-неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в усіх точках відрізка $[a,b]$ за винятком, можливого, кінцевого числа точок, в яких є розрив першого роду і, крім того, є однобічні границі в точках a і b.

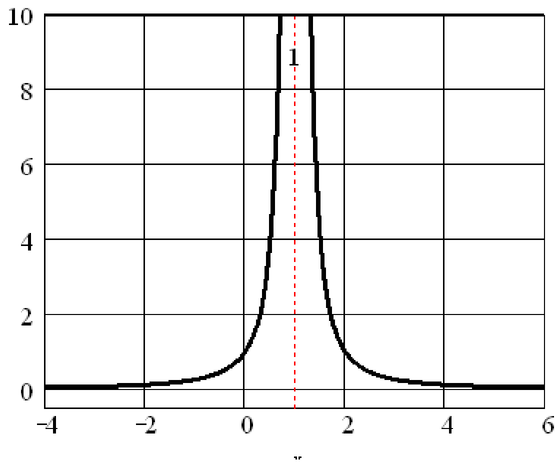


Рисунок 5.8

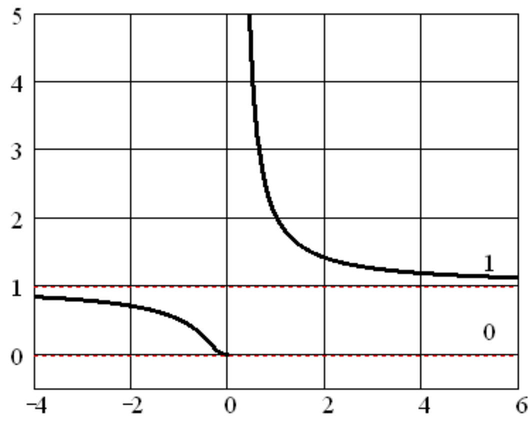


Рисунок 5.9

Def. Функція називається кусково-неперервною на числовій прямій, якщо вона кусково-неперервна на будь-якому відрізку цієї прямої.

Наприклад, функція

$$f(x) = E(x)$$

є кусково-неперервною як на будь-якому відрізку, так і на всій числовій осі (рисунок 5.10).

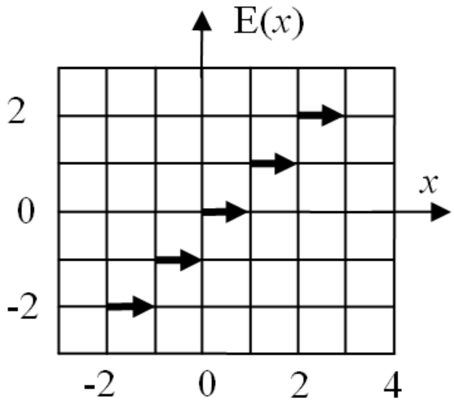


Рисунок 5.10

5.7. Властивості неперервних функцій

Th. 1. Суперпозиція двох неперервних функцій є неперервною функцією, тобто якщо функція $f = f(g)$ неперервна в точці g_0, а функція $g = g(z)$ неперервна в точці z_0, то функція $f(g(z))$ неперервна в точці z_0.

Def. Якщо функція монотонна і при цьому зростає або спадає, то її називають строго монотонною.

Th. 2. Функція, обернена до строго монотонної і неперервної функції, неперервна і строго монотонна (рисунок 5.11).

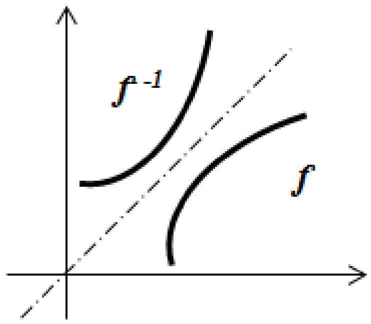


Рисунок 5.11

Th. 3 (про стійкість знака неперивної функції). Нехай функція $f(x)$ **неперервна в точці** x_0 **і** $f(x_0)\neq 0$**. Тоді існує число** $\delta>0$**, таке, що для всіх** $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **функція** $f(x)$ **має той же знак, що і** $f(x_0)$**.**

Таким чином, якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0)\neq 0$, то

$$(\exists\delta>0)\ \ (x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)):\ sign(f(x))=sign(f(x_0)).$$

Th. (1-ша теорема Больцано − Коші). Нехай функція $f(x)$ **неперервна на відрізку** $[a,b]$ **і на кінцях відрізка має значення різних знаків. Тоді існує точка** $c\in[a,b]$**, в якій** $f(c)=0$**, тобто якщо функція** $f(x)$ **неперервна на відрізку** $[a,b]$ **і** $f(a)f(b)<0$**, то** $\exists c\in[a,b]$: $f(c)=0$ (рисунок 5.12).

Бернард Больцано (1781–1848) – чеський математик і філософ.

Th. (2-га теорема Больцано − Коші). Нехай функція $f(x)$ **неперервна на відрізку** $[a,b]$**, причому** $f(a)=A$ **і** $f(b)=B$**. Тоді для будь-якої точки** C **інтервалу** $[A,B]$**, тобто** $A\leq C\leq B$**, знайдеться така точка** c **інтервалу** $[a,b]$**, тобто** $a\leq c\leq b$**, в якій** $f(c)=C$**, тобто якщо функція** $f(x)$ **неперервна на відрізку** $[a,b]$ **і** $f(a)=A$**,** $f(b)=B$**, то** $(\forall C)$ $(C\in[A,B])$ $(\exists c\in[a,b]): f(c)=C$ (рисунок 5.13).

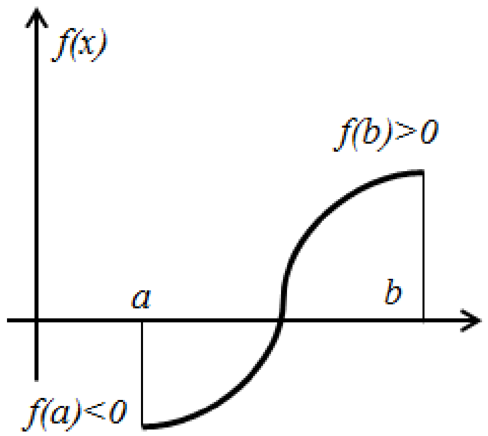


Рисунок 5.12

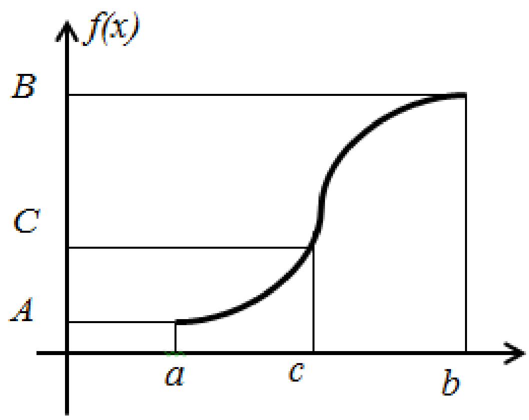


Рисунок 5.13

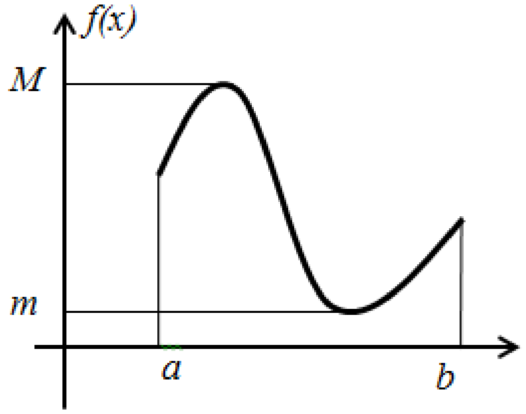


Рисунок 5.14

Th. Неперервна на відрізку функція має на цьому відрізку максимальне і мінімальне значення (рисунок 5.14).

Def. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ називається коливанням неперервної функції на цьому відрізку і позначається

$$\omega = \max_{[a,b]} f(x) - \min_{[a,b]} f(x).$$

5.8. Висновки

Def. Окілком точки x_0 називається множина точок, для яких існує таке число δ із множини нескінченно малих величин, що

$$x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta.$$

Def. 1. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Def. 2. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності аргументу $\{x_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ послідовність відповідних значень функції $\{f(x_i)\}_{i=1,\ldots,\infty}$ збігається до $f(x_0)$.

Def. 3. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх x, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$***, виконується нерівність*** $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$***, тобто***

$$f(x) - \text{непер.} \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\exists \delta > 0)\ (|x - x_0| < \delta) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Def. Різницею

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

називається приріст функції в точці x_0.

Def. Різницею

$$\Delta x = x - x_0$$

називається приростом аргументу в точці x_0.

Def. 4. Функція f(x) називається неперервною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою величиною.

Зауваження. Оскільки вводиться позначення $\Delta x = x - x_0$, *то приріст функції можна записати ще так:*

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0).$$

Def. Функція f(x) є неперервною на множині, де вона визначена, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини, тобто f(x) − неперервна функція на множині $X \Rightarrow (\forall x \in X)$: ***f(x) – непер. в точці x_0.***

Окремим випадком функції, неперервної на множині, є функція, неперервна на відрізку. Функція може бути неперервною не у всій області визначення, а в якійсь виділеній області.

***Def.* (Визначення критерію неперервності функції в точці). Функція f(x) неперервна в точці x_0 x0 тоді і тільки тоді, коли існує границя функції зліва в точці x_0 $f(x_0-0)$ і границя функції справа в точці x_0 $f(x_0+0)$ і ці границі дорівнюють значенню функції в точці x_0.**

Це можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_{0-0}} f(x)=f(x_0-0);$$

$$\exists \lim_{x\to x_{0+0}} f(x)=f(x_0+0);$$

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

***Th.* Нехай функції $f(x)$ и $g(x)$ неперервні в точці x_0, тоді функції**

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

також неперервні в точці x_0.

***Def.* Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо ця функція в точці x_0 не є неперервною.**

Для точок розриву вводиться наступна класифікація:

1. Якщо границя зліва є кінцевою і дорівнює границі справа, причому ці границі не рівні значенням функції в цій точці, або функція в точці x_0 є невизначеною, то такий розрив називається ***усувним.***

2. Якщо границі зліва і справа кінцеві, але не рівні між собою, то такий розрив називається ***розривом першого роду.***

3. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ не має принаймні однієї з однобічних границь або хоча б одна з однобічних границь нескінченна, то такий розрив називається ***розривом другого роду****.*

***Def.* Функція називається кусочно неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна в усіх точках відрізка $[a,b]$ за винятком, можливого, кінцевого числа точок, в яких є розрив першого роду, і, крім того, є однобічні границі в точках a і b.**

***Def.* Функція називається кусково-неперервною на числовій прямій, якщо вона кусково-неперервна на будь-якому відрізку цієї прямої.**

***Th.* 1. Суперпозиція двох неперервних функцій є неперервною функцією, тобто якщо функція $f=f(g)$ неперервна в точці g_0, а $g=g(z)$ неперервна в точці z_0, то функція $f(g(z))$ неперервна в точці z_0.**

***Def.* Якщо функція монотонна і при цьому зростає або спадає, то її називають строго монотонною.**

***Th.* 2. Функція, обернена до строго монотонної і неперервної функції, неперервна і строго монотонна.**

Th. 3 (про стійкість знака неперервної функції). Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0)\neq 0$. Тоді існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ має той же знак, що і $f(x_0)$.

Th. (1-ша теорема Больцано − Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях відрізка має значення різних знаків. Тоді існує точка $c \in [a,b]$, в якій $f(c)=0$, тобто якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(a)f(b)<0$, то $\exists c \in [a,b]$: $f(c)=0$.

Th. (2-га теорема Больцано − Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, причому $f(a)=A$ і $f(b)=B$. Тоді для будь-якої точки C інтервалу $[A,B]$, тобто $A \le C \le B$, знайдеться така точка c інтервалу $[a,b]$, тобто $a \le c \le b$, в якій $f(c)=C$, тобто якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(a)=A$, $f(b)=B$, то $(\forall C)$ $(C \in [A,B])$ $(\exists c \in [a,b]): f(c)=C$.

Th. Неперервна на відрізку функція має на цьому відрізку максимальне і мінімальне значення.

Def. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ називається коливанням неперервної функції на цьому відрізку і позначається $\omega = \max\limits_{[a,b]} f(x) - \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

5.9. Питання для перевірки

1. Функція називається неперервною в точці x_0 :

а) якщо функція в цій точці визначена; б) якщо в цій точці існує границя; в) якщо границя функції при «ікс» прямує до точки і дорівнює значенню функції в цій точці.

2. Критерій неперервності функції:

а) якщо існують границі функції зліва і справа в цій точці; б) якщо існують границі функції зліва і справа і вони рівні між собою; в) якщо існують границі функції зліва і справа і вони дорівнюють значенню функції в самій точці.

3. Усувним називається розрив:

а) якщо границя зліва дорівнює границі справа, але не дорівнює значенню функції в самій точці; б) якщо границя зліва не дорівнює границі справа; в) який усуває невизначеність функції.

4. Розривом першого роду називається розрив:

а) якщо існують границі зліва і справа, але вони не рівні між собою; б) якщо існують границі зліва і справа і вони рівні між собою; в) якщо не існує хоча б однієї границі зліва чи справа.

5. Розривом другого роду називається розрив:

а) якщо існують границі зліва і справа, але вони не рівні між собою; б) якщо відсутня або дорівнює нескінченності хоча б один границя зліва чи справа; в) якщо в точці розриву значення функції дорівнює нескінченності.

6. Точка розриву - це:

а) точка, в якій не існує границь; б) точка, в якій порушується неперервність функції; в) точка, в якій не існує значення функції.

7. Чи є неперервною в точці функція, якщо вона являє собою суму двох неперервних функцій в цій точці:

а) так; б) немає; в) за певних умов?

8. Чи є неперервною функція, що представляє собою суперпозицію двох неперервних функцій:

а) так; б) немає; в) за певних умов?

9. Якщо функція неперервна на відрізку і на кінцях цього відрізка знак функції змінюється, то на цьому відрізку існує:

а) точка, в якій функція зростає; б) точка, в якій функція дорівнює нулю; в) точка, в якій функція спадає.

10. Функція називається кусково-неперервною на числовій прямій:

а) якщо вона кусково-неперервна на будь-якому відрізку цієї прямої; б) якщо вона неперервна шматочками; в) якщо вона має неперервні шматочки.

11. Суперпозиція двох неперервних функцій:

а) є неперервною функцією; б) має розрив; в) може бути неперервною або мати розрив.

12. Строго монотонна функція - це:

а) монотонна функція, яка або зростає, або спадає; б) монотонна функція, яка тільки зростає; в) монотонна функція, яка тільки спадає.

13. Функція, обернена до строго монотонної і неперервної функції, є:

а) неперервною і строго монотонною; б) неперервної; в) строго монотонною.

14. Знак неперервної функції в точці, де вона не дорівнює нулю:

а) змінюється; б) не змінюється; в) може змінюватися і не змінюватися.

15. 11-ша теорема Больцано - Коші. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях відрізка має значення різних знаків:

а) тоді немає такої точки $c \in [a,b]$, в якій $f(c)=0$; б) тоді функція на відрізку дорівнює нулю; в) тоді існує точка $c \in [a,b]$, в якій $f(c)=0$.

16. 2-га теорема Больцано – Коші. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, причому $f(a)=A$ і $f(b)=B$, тоді для будь-якої точки C інтервалу $[A,B]$, тобто $A \le C \le B$:

а) відсутня така точка c інтервалу $[a,b]$, тобто $a \le c \le b$, в якій $f(c)=C$; б) знайдеться така точка c інтервалу $[a,b]$, тобто $a \le c \le b$, в якій $f(c)>B$; в) знайдеться така точка c інтервалу $[a,b]$, тобто $a \le c \le b$, в якій $f(c)<A$.

17. Неперервна на відрізку функція:

а) не має на цьому відрізку максимального значення; б) не має на цьому відрізку мінімального значення; в) має на цьому відрізку максимальне і мінімальне значення.

18. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ називається:

а) коливанням неперервної функції на цьому відрізку; б) відхиленням неперервної функції на цьому відрізку; в) перепадом неперервної функції на цьому відрізку.

6. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0. Розглянемо приріст функції Δy при зміні аргументу Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Def. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя при $\Delta x \to 0$ відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу (за умови, що ця границя існує).

Для позначення використовують символи $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$. Тоді за визначенням

$$F'(x_0) = y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x)}{\Delta x}.$$

6.1. Зв'язок між похідною і неперервністю

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, з визначення границі, коли

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \to (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0, \ |\Delta x| < \delta): \ \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon,$$

можна записати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

звідки

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \text{ при } \Delta x \to 0.$$

І якщо розглянути границю приросту, то отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) + \varepsilon)\,\Delta x = 0,$$

а це означає, що функція неперервна.

Висновок: Якщо при деякому значенні x_0 похідна функції $f(x)$ існує, то при цьому значенні функція $f(x_0)$ неперервна.

6.2. Геометричний зміст похідної

Нехай заданий графік функції $y = f(x)$ (рисунок 6.1). Задамо дві точки на графіку: $M(x_M, f(x_M))$ і $M'(x_M + \Delta x, f(x_M + \Delta x))$. Проведемо через ці точки січну MM', позначимо кут між MM' і Ox як φ. Цей кут залежить від Δx, тобто $\varphi = \varphi(\Delta x)$. Якщо існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_M,$$

то пряму з кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi_M$, що проходить через точку $M(x_M, f(x_M))$, називають граничним положенням січної MM' при $\Delta x \to 0$ або $M' \to M$.

Def. Дотичної до графіка функції *f(x)* в точці *M* називають граничне положення січної *MM'* при $\Delta x \to 0$ або $M' \to M$.

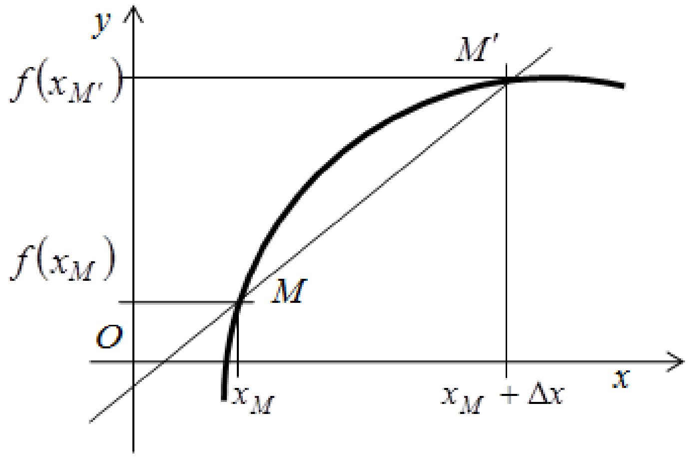


Рисунок 6.1

З визначення випливає, що для існування дотичної досить, щоб існувала границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0,$$

причому границя φ_0 дорівнює куту нахилу дотичної до осі Ox.

Кут φ можна охарактеризувати як

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тоді отримаємо

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} tg\varphi_M.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi_M.$$

Висновок. Геометричний зміст похідної − це тангенс кута нахилу дотичної в заданій точці.

6.3. Фізичний зміст похідної

Нехай функція має вигляд залежності шляху від часу

$$S = S(t),$$

тобто шлях S пройдений за час t. Тоді за час t_1 пройдений шлях $S(t_1)$, за час t_0 − $S(t_0)$, за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$ пройдений відрізок часу

$$\Delta S = S(t_1) - S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Відношення $\Delta S/\Delta t$ називають середньою швидкістю руху $V_{сер}$ за час Δt.

Границя відношення виду $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ – це миттєва швидкість точки в момент часу t_0 .

Висновок. Фізичний зміст похідної – це швидкість зміни процесу або явища.

6.4. Одностороння похідна

Def. Похідною справа від заданої точки x_0 називається величина

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Def. Похідною зліва від заданої точки x_0 називається величина

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Геометричний зміст похідних справа и зліва – це кутовий коефіцієнт дотичної справа і зліва від точки x_0.

Умова існування похідної в точці x_0 полягає в тому, що існують права і ліва похідні і вони рівні між собою:

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

ПРИКЛАД. Для $f(x)=|x|$ відносно точки $x=0$ маємо: $(|x|)'_+=1$ и $(|x|)'_-=-1$ (див. рисунок 5.4). Ці значення похідних не рівні між собою, отже, похідною в точці $x=0$ для заданої функції немає.

6.5. Нескінченна похідна

Якщо для деякого значення x_0 маємо $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ або $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, то це означає, що в точці x_0 функція має нескінченну похідну зі знаком «плюс» чи «мінус».

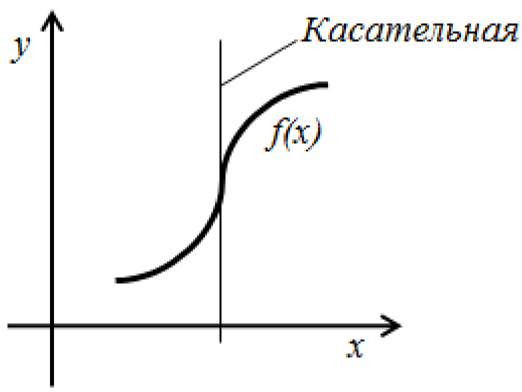


Рисунок 6.2

Геометричний зміст тут полягає в тому, що в цій точці крива має вертикальну дотичну (рисунок 6.2).

6.6. Рівняння дотичної

Припустимо, задана крива *f(x)*, на якій задані дві точки $M(x_0,y_0)$, $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Побудуємо січну, що проходить через ці точки (рисунок 6.3).

Рівняння прямої, що проходить через ці дві точки, має вигляд

$$\frac{x - x_M}{x_{M'} - x_M} = \frac{y - y_M}{y_{M'} - y_M}.$$

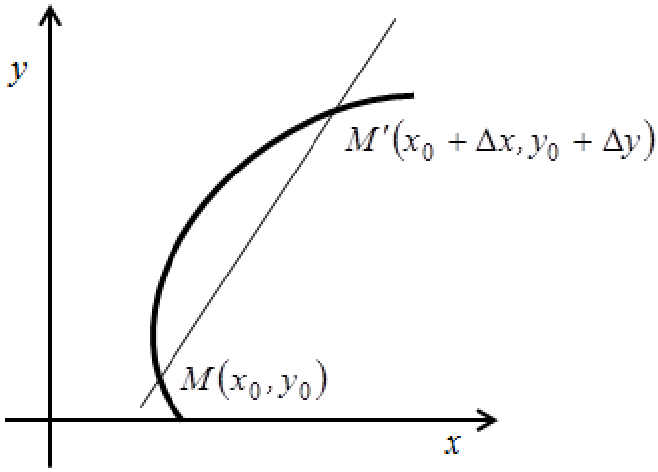


Рисунок 6.3

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y/\Delta x \to f'(x)$ і рівняння дотичної прямої в точці M_0 має вигляд

$$\frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{y - y_0}{y_0 + \Delta y - y_0}, \quad \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} \Rightarrow y - y_0 = \frac{(x - x_0)\Delta y}{\Delta x},$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Висновок. Рівняння дотичної в точці $M(x_M, y_M)$ до кривої $f(x)$ має вигляд

$$y - y_M = f'(M)(x - x_M).$$

6.7. Властивості похідних

Def. Якщо для функції *f(x)* і *g(x)* існує похідна в точці *x*, то сума, добуток і частка (за умови, що g(*x*)≠0) також мають похідні в точці *x* і мають місце формули:

а) $\left(u(x) + v(x)\right)' = u' + v'$;

б) $\left(u(x)v(x)\right)' = v(x)u' + u(x)v'$;

в) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$.

◄ Доведення:

а) $\left(u(x)+v(x)\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-\left(u(x)+v(x)\right)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)+v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u' + v'$;

б) $\left(u(x)v(x)\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)u(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)\left(u(x+\Delta x)-u(x)\right)+u(x)\left(v(x+\Delta x)-v(x)\right)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)\Delta u+u(x)(\Delta v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = v(x)u'+u(x)v'$,

$\left(u(x)v(x)\right)' = vu' + uv'$;

в) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\left(u(x)+\Delta u\right)v(x)-u(x)\left(v(x)+\Delta v\right)}{(v(x)+\Delta v)v(x)\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x)v(x)+v(x)\Delta u-u(x)v(x)-u(x)\Delta v}{\left(v^2(x)+v(x)\Delta v\right)\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{\left(v^2(x)+v(x)\Delta v\right)\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{g^2(x)+g(x)\Delta g} = \dfrac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{vu'-uv'}{v^2}$. ►

Слідство. Якщо похідна береться від добутку константи на функцію, то це дорівнює добутку константи на похідну функції:

$$\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x).$$

Похідна складної функції. **Якщо функція *$g=g(z)$* має похідну в точці *z_0*, а функція *$f=f(g)$* має похідну у відповідній точці *$g_0=g(z_0)$*, то складна функція *$f(g(z))$* має похідну в точці *z_0* і справедлива наступна формула:**

$$f'(z_0) = f'(g)g'(z_0).$$

◄ Доведення:

$\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{f(g+\Delta g)-f(g)}{\Delta z} = \dfrac{f(g+\Delta g)-f(g)}{g(z+\Delta z)}\;\dfrac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = \dfrac{\Delta f}{\Delta g}\;\dfrac{\Delta g}{\Delta z}$;

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g}\;\frac{\Delta g}{\Delta z}=f'(g)g'(z_0).\ \blacktriangleright$$

Похідна оберненої функції. **Якщо функція *y=f(x)* має в точці x_0 похідну $f'(x_0)\neq 0$, то обернена функція *x=φ(y)* також має у відповідній точці y_0=*f(x)* похідну, причому похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної цієї функції.**

◀ Доведення:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}=\frac{\varphi(y+\Delta y)}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}\Rightarrow\frac{1}{f'(x_0)},$$

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.\ \blacktriangleright$$

Висновок. Можна проводити арифметичні дії над диференціалами, як над звичайними числами (це перевага запису похідною через відношення диференціалів).

ПРИКЛАД. Записати похідну функції $x=\varphi(y)$, обернену до функції $y=f(x)$.

Розв'язання

$$\varphi'(y)=\frac{d\varphi}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{d\varphi}}=\frac{1}{\dfrac{df}{dx}},\ \text{тобто}\ \varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

6.8. Похідні елементарних функцій

1. Похідна константи $f(x)=const=C$.

В цьому випадку $\Delta y=0$ і тому $C'=0$.

2. $f(x)=x^n$:

$$\left(x^n\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left((x+\Delta x)^n-x^n\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots-x^n\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3+\ldots^n\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2}{2!\,\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3}{3!\,\Delta x}+\ldots=$$

$$=nx^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^2}{3!}+\ldots=nx^{n-1}.$$

Тут був використаний біном Ньютона $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$, де кількість сполучень з n елементів по i дорівнює $C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Слідство:

а) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$;

б) $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ПРИКЛАДИ:

1) $$\left(\frac{1}{3x^3+4x^2+5}\right)'=\left|\begin{array}{ll} z=\dfrac{1}{u} & u=3x^3+4x^2+5 \\ z'_x=z'_u u'_x=-\dfrac{1}{u^2}u'_x & \end{array}\right|=-\frac{1}{\left(3x^3+4x^2+5\right)^2}\left(9x^2+8x\right);$$

2) $$\left(\sqrt{x^3-2x}\right)'=\left|\begin{array}{ll} z=\sqrt{u} & u=x^3-2x \\ z'_x=z'_u u'_x=-\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'_x & \end{array}\right|=-\frac{1}{2\sqrt{x^3-2x}}\left(3x^2-2\right).$$

3. $\boldsymbol{f(x)=e^x}$**:**

$$\left(e^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}e^x\left(e^{\Delta x}-1\right)=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x.$$

Слідство:

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=\left|\begin{array}{ll} z=e^u & u=x\ln a \\ z'_x=z'_u\cdot u'_x & \end{array}\right|=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

ПРИКЛАД:

$$\left(\frac{1}{2^{x^2+2x+1}}\right)'=\left|\begin{array}{lll} z=\dfrac{1}{u} & u=2^v & v=x^2+2x+1 \\ z'_x=z'_u u'_v v'_x & & \end{array}\right|=-\frac{1}{\left(2^{x^2+2x+1}\right)^2}2^{x^2+2x+1}\ln 2(2x=2)=$$

$$=-\frac{\ln 2(x+1)}{2^{x^2+2x}}\cdot$$

4. $\boldsymbol{f(x)=\ln x}$**:**

$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\approx\frac{\Delta x}{x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{x}.$$

Слідство:

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

5. $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ **:**

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \left| \begin{array}{c} \sin\alpha - \sin\beta = \\ = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \left| \sin\frac{\Delta x}{2} \approx \frac{\Delta x}{2} \right| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Слідство:

$$\left(\cos x\right)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \sin x(-1) = -\sin x.$$

Похідні інших тригонометричних функцій:

$$\left(tgx\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x;$$

$$\left(ctgx\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(-\sin x)\sin x - (\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x.$$

6. $\boldsymbol{y = \arcsin x}$**.** Скористаємося похідною для оберненої функції:

$$f: \quad y = \arcsin x,$$

$$f^{-1}: \quad x = \sin y;$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Слідство. Оскільки $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, маємо

$$\left(\arccos x\right)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\left(\arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. $\boldsymbol{y = arctgx}$**.** Скористаємося похідною для оберненої функції:

$$f: \quad y = arctgx,$$

$$f^{-1}: \quad x = tgy;$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\dfrac{1}{cos^2 y}}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Слідство. Оскільки $arcsin\,x+arccos\,x=\dfrac{\pi}{2}$, маємо

$$(arcctgx)'=\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)'=-(arctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

8. Гіперболічні функції:

$$(shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-\left(-e^{-x}\right)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx;$$

$$(chx)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+\left(-e^{-x}\right)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=shx;$$

$$(thx)'=\left(\frac{shx}{chx}\right)'=\frac{(shx)'chx-(chx)'shx}{ch^2x}=$$

$$=\frac{chx\ chx-shx\ shx}{ch^2x}=\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}=\left|\ ch^2t-sh^2t=1\ \right|=\frac{1}{ch^2x}=1-th^2x;$$

$$(cthx)'=\left(\frac{chx}{shx}\right)'=\frac{(chx)'\ shx-(shx)'\ chx}{sh^2x}=$$

$$=\frac{shx\ shx-chx\ chx}{sh^2x}=\frac{sh^2x-ch^2x}{sh^2x}=-\frac{1}{sh^2x}=1-cth^2x.$$

9. Обернені гіперболічні функції. Скористаємося похідними для обернених функцій:

$$f:\quad y=arshx,$$

$$f^{-1}:\ x=shy,$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(shy)'}=\frac{1}{chy}=\left|\ ch^2t-sh^2t=1\ \right|=\frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$f:\quad y=archx,$$

$$f^{-1}:\ x=chy,$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(chy)'}=\frac{1}{shy}=\left|\ ch^2t-sh^2t=1\ \right|=\frac{1}{\sqrt{ch^2y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$f:\quad y=arthx,$$

$$f^{-1}:\ x=thy,$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(thy)'}=\frac{1}{\dfrac{1}{ch^2y}}=\left|\begin{array}{l} ch^2t-sh^2t=1 \\ 1-\dfrac{sh^2t}{ch^2t}=\dfrac{1}{ch^2t}\end{array}\right|=\frac{1}{1-\dfrac{sh^2y}{ch^2y}}=\frac{1}{1-th^2y}=\frac{1}{1-x^2};$$

$$f:\quad y=arcthx,$$
$$f^{-1}:\ x=cthy,$$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(cthy)'}=\frac{1}{-\dfrac{1}{sh^2y}}=\left|\begin{array}{l} ch^2t-sh^2t=1 \\ \dfrac{ch^2}{sh^2t}-1=\dfrac{1}{sh^2t}\end{array}\right|=\frac{1}{-\dfrac{ch^2}{sh^2t}+1}=\frac{1}{1-cth^2y}=\frac{1}{1-x^2}.$$

6.9. Висновки

***Def.* Похідною функції y = f(x) в точці x_0 називається границя при $\Delta x \to 0$ відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу (за умови, що ця границя існує).**

Для позначення використовують символи $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

За визначенням

$$F'(x_0)=y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо при деякому значенні x_0 похідна функції f(x) існує, то при цьому значенні x_0 функція $f(x_0)$ неперервна.

***Def.* Дотичної до графіка функції f(x) в точці M називають граничне положення січної MM' при $\Delta x \to 0$ або $M' \to M$.**

Геометричний зміст похідної - це тангенс кута нахилу дотичної в заданій точці.

Фізичний зміст похідної - це швидкість зміни процесу або явища.

***Def.* Похідною справа від заданої точки x_0 називається величина**

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

***Def.* Похідною зліва від заданої точки x_0 називається величина**

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Геометричний зміст похідних справа і зліва - це кутовий коефіцієнт дотичної справа і зліва від точки x_0.

Умова існування похідної в точці *x_0 полягає в тому, що існує права і ліва похідні і вони рівні між собою:*

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

Якщо для деякого значення x_0 маємо $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ або $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$, то це означає, що в точці x_0 функція має нескінченну похідну зі знаком «плюс» чи «мінус». Геометричний зміст тут полягає в тому, що в цій точці крива має вертикальну дотичну.

Рівняння дотичної в точці $M(x_M, y_M)$ до кривої $f(x)$ має вигляд

$$y - y_M = f'(M)(x - x_M).$$

Def. Якщо для функцій f(x) і g(x) існує похідна в точці x, то сума, добутку і частки (за умови, що g (x) ≠ 0) також мають похідні в точці x і мають місце формули:

а) $\left(u(x) + v(x)\right)' = u' + v'$;

б) $\left(u(x)v(x)\right)' = v(x)u' + u(x)v'$;

в) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

Слідство. Якщо похідна береться від добутку константи на функцію, то це дорівнює добутку константи на похідну функції:

$$\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x).$$

Похідна складної функції. Якщо функція g=g(z) має похідну в точці z_0, а функція f=f(g) має похідну у відповідній точці $g_0 = g(z_0)$, то складна функція f(g(z)) має похідну в точці z_0 і справедлива наступна формула:

$$f'(z_0) = f'(g)g'(z_0).$$

Похідна оберненої функції. Якщо функція y=f(x) має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$***, то обернена функція x=φ(y) також має у відповідній точці y_0=f(x) похідну, причому похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної цієї функції.***

Висновок. Можна проводити арифметичні дії над диференціалами, як над звичайними числами (це перевага запису похідної через відношення диференціалів).

Похідні елементарних функцій:

1. $C' = 0$.

2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

Слідство: а) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; ***б)*** $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $\left(e^x\right)' = e^x$.

Слідство: $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

4. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.

Слідство: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$.

5. $(\boldsymbol{\sin x})' = \boldsymbol{\cos x}$.

Слідство: $(\boldsymbol{\cos x})' = -\boldsymbol{\sin x}$;

$(\boldsymbol{tgx})' = \frac{1}{\boldsymbol{\cos^2 x}} = 1 + \boldsymbol{tg^2 x}$;

$(\boldsymbol{ctgx})' = -\frac{1}{\boldsymbol{\sin^2 x}} = -1 - \boldsymbol{ctg^2 x}$.

6. $(\boldsymbol{\arcsin x})' = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}}$.

Слідство: $(\boldsymbol{\arccos x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{x}^2}}$.

7. $(\boldsymbol{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}$.

Слідство: $(\boldsymbol{arcctgx})' = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x}^2}$.

8. $(\boldsymbol{shx})' = \boldsymbol{chx}$;

$(\boldsymbol{chx})' = \boldsymbol{shx}$;

$(\boldsymbol{thx})' = \frac{1}{\boldsymbol{ch^2 x}} = 1 - \boldsymbol{th^2 x}$;

$(\boldsymbol{cthx})' = -\frac{1}{\boldsymbol{sh^2 x}} = 1 - \boldsymbol{cth^2 x}$.

9. $(\boldsymbol{arshx})' = \frac{1}{\sqrt{1+\boldsymbol{x}^2}}$;

$(\boldsymbol{archx})' = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 - 1}}$;

$(\boldsymbol{arthx})' = (\boldsymbol{arcthx})' = \frac{1}{1-\boldsymbol{x}^2}$.

6.10. Питання для перевірки

1. Похідна функції в заданій точці – це:

а) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$; б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$; в) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Фізичесний зміст похідної:

а) зміна процесу; б) швидкість процесу; в) прискорення процесу.

3. Геометричний зміст похідної:

а) тангенс кута нахилу дотичної в заданій точці; б) кут нахилу дотичної в заданій точці; в) дотична в заданій точці.

4. Рівняння дотичної до заданої кривої в заданій точці:

а) $y + y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$; б) $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$; в) $y = f'(x_0)(x - x_0) - y_0$.

5. Зв'язок між похідною і неперервністю функції:

а) якщо в заданій точці функція має похідну, то в цій точці функція неперервна; б) якщо в заданій точці функція неперервна, то в цій точці функція має похідну; в) не існує.

6. Однобічна похідна - це:

а) похідна з одного боку точки; б) похідна, яка визначається однобічною границею; в) похідна з одного боку функції.

7. Нескінченна похідна - це:

а) похідна на нескінченності; б) коли похідна в заданій точці дорівнює нескінченності; в) похідна в точках розриву.

8. Похідна суми дорівнює:

а) добутку похідних; б) сумі похідних; в) різниці похідних.

9. Похідна добутку:

а) $(u(x)v(x))' = v(x)u' - u(x)v'$; б) $(u(x)v(x))' = v(x)u' + u(x)v'$;

в) $(u(x)v(x))' = v(x)u'u(x)v'$.

10. Похідна відношення:

а) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$; б) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{vu' + uv'}{v^2}$; в) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v}$.

11. Похідна складної функції $(f(g(x)))'$ дорівнює:

а) $f'(x)g'(x)$; б) $f'(g)g'(x)$; в) $f'(g) + g'(x)$.

12. Похідна оберненої функції має вигляд:

а) $\left(f^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)}$; б) $\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$; в) $\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$.

7. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

7.1. Табличка похідних

1. $C' = 0$.
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\left(e^x\right)' = e^x$.
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
7. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$.
8. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$.
9. $\left(\sin x\right)' = \cos x$.
10. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.
11. $\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.
12. $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x$.
13. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.
16. $\left(arcctg\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
17. $\left(shx\right)' = chx$.
18. $\left(chx\right)' = shx$.
19. $\left(thx\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$.
20. $\left(cthx\right)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.
21. $\left(arshx\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
22. $\left(archx\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
23. $\left(arthx\right)' = \frac{1}{1-x^2}$.
24. $\left(arcthx\right)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Примітка. Допоміжні властивості:

1) $\left(C_1 u + C_2 v\right)' = C_1 u' + C_2 v'$;

2) $\left(uv\right)' = vu' + uv'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$;

4) $\left(z(u(x))\right)' = z'_u u'_x$;

5) $x'_y = \frac{1}{y'_x}$;

6) $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Нагадування: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.

7.2. Приклади обчислення похідних

ПРИКЛАД. Знайти похідну функції $y = tg\, log_3^5\left(x^2+1\right)$.

Розв'язок.

Запишемо відповідь (похідну) відразу ж:

$$y' = \frac{1}{cos^2\left(log_3^5\left(x^2+1\right)\right)} 5 log_3^4\left(x^2+1\right) \frac{1}{\left(x^2+1\right) ln 3} 2x .$$

Це можна представити як складну функцію:

$$y = tg\ u, \quad u = v^5, \quad v = log_3 t, \quad t = x^2+1 .$$

В цьому випадку можна записати:

$$y'_x = \frac{1}{cos^2 u} u'_x = \frac{1}{cos^2 u} 5v^4 v'_x = \frac{1}{cos^2 u} 5v^4 \frac{1}{t\, ln 3} t'_x = \frac{1}{cos^2 u} 5v^4 \frac{1}{t\, ln 3} 2x .$$

Або це можна представити і в наступному вигляді:

$$y'_x = y'_u\ u'_v\ v'_t\ t'_x .$$

7.3. Похідна неявно заданої функції

Def. Явно задана функція - це функція, розв'язна відносно y, тобто функція, представлена у вигляді $y = f(x)$.

Def. Функція, нерозв'язна відносно y, називається неявно заданою. Позначається так: $F(x,\ y) = 0$.

ПРИКЛАДИ:

1) коло $x^2 + y^2 = 64$;

2) равлик Паскаля $\left(x^2+y^2-x\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) = 0$.

Похідну від неявно заданої функції беруть як похідну від виразу по x з врахуванням того, що y − це функція від x. Як результат, вираз буде записано відносно y'.

ПРИКЛАДИ:

1) для кола:

$$x^2+y^2 = 64 \Rightarrow \left(x^2\right)' + \left(y^2\right)' = (64)' \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y};$$

2) для равлика Паскаля:

$$\left(x^2+y^2-x\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) = 0 \Rightarrow 2\left(x^2+y^2-x\right)\left(2x+2yy'-1\right) - 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2-x\right)\left(2x+2yy'-1\right) - x - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2yy'\left(x^2+y^2-x\right) + \left(x^2+y^2-x\right)(2x-1) - x - yy' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2yy'\left(x^2+y^2-x\right) - yy' = x - \left(x^2+y^2-x\right)(2x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x - \left(x^2+y^2-x\right)(2x-1)}{2y\left(x^2+y^2-x\right) - y} = \frac{x - \left(x^2+y^2-x\right)(2x-1)}{y\left(2x^2+2y^2-2x-1\right)} .$$

7.4. Обчислення похідної через логарифмування функції

Для тих виразів, які містять множення, ділення, піднесення до степеня, зручним прийомом є обчислення похідної через логарифмування. У цьому випадку спочатку вираз логарифмують, а потім диференціюють.

ПРИКЛАД. Обчислити похідну функції $y=\dfrac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}\cdot 2^{x^2+1}}{\sin x\ \cos x}$.

Розв'язання

$$\ln y=\frac{3}{5}\ln\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\ln 2-\ln\sin x-\ln\cos x;$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{5}\frac{2x}{x^2+1}+2x\ln 2-\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{(-\sin x)}{\cos x};$$

$$y'=y\cdot 2\left(\frac{3x}{5\left(x^2+1\right)}+x\ln 2-\frac{\cos x}{2\sin x}+\frac{\sin x}{2\cos x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}\cdot 2^{x^2+1}\cdot 2}{2\sin x\ \cos x}\cdot 2\left(\frac{3x}{5\left(x^2+1\right)}+x\ln 2-\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}\cdot 2^{x^2+3}}{\sin 2x}\left(\frac{3x}{5\left(x^2+1\right)}+x\ln 2-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}\cdot 2^{x^2+3}}{\sin 2x}\left(\frac{3x}{5\left(x^2+1\right)}+x\ln 2-ctg 2x\right).$$

У деяких випадках спосіб логарифмування є єдиним зручним способом (що б не уникнути помилок) побудови похідних.

ПРИКЛАДИ:

1) $y=x^x$, $\ln y=x\ln x$, $\dfrac{y'}{y}=\ln x+1$, $y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$;

2) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$, $\ln y=\sin x\ln\left(x^2+1\right)$, $\dfrac{y'}{y}=\cos x\ \ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}$,

$$y'=y\left(\cos x\ \ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right)=\left(x^2+1\right)^{\sin x}\left(\cos x\ \ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right).$$

7.5. Похідна параметрично заданої функції

Def. Функція, змінні якої задані через допоміжну змінну, називається параметрично заданою:

$$\begin{cases} y=y(t); \\ x=x(t), \end{cases}\qquad \begin{cases} y=\psi(t); \\ x=\varphi(t), \end{cases}$$

де $t \in (t_1,\ t_2)$.

ПРИКЛАДИ:

1) для кола:

$$\begin{cases} y = R\cos t; \\ x = R\sin t, \end{cases}$$

де $t \in [0,\ 2\pi)$;

2) для равлика Паскаля:

$$\begin{cases} y = \cos t \sin t + \sin t; \\ x = \cos^2 t + \cos t, \end{cases}$$

де $t \in [0,\ 2\pi)$.

Побудувати похідну параметрично заданої функції:

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t). \end{cases}$$

Для функції $x = x(t)$ можна записати обернену функцію $t = t(x)$. Тоді функцію можна записати у вигляді

$$y = y(t) = y(t(x)).$$

Похідну цієї функції можна записати як похідну складеної функції:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Висновок:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

ПРИКЛАДИ:

1) для кола:

$$\begin{cases} y = R\cos t; \\ x = R\sin t, \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(R\cos t)'_t}{(R\sin t)'_t} = \frac{R(-\sin t)}{R\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -tg t;$$

2) для равлика Паскаля:

$$\begin{cases} y = \cos t \sin t + \sin t; \\ x = \cos^2 t + \cos t, \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(\cos t \sin t + \sin t)'_t}{(\cos^2 t + \cos t)'_t} = \frac{-\sin t \sin t + \cos t \cos t + \cos t}{2\cos t(-\sin t) - \sin t} = -\frac{\cos(2t) + \cos t}{\sin(2t) + \sin t}.$$

7.6. Похідні вищих порядків. Визначення похідної *n-го* порядку

Припустимо функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x. Сама похідна є також деякою функцією аргументу x на цьому інтервалі. Отже, можна говорити по відношенню до цієї функції про існування її похідної. Назвемо $f'(x)$ похідною першого порядку, $(f'(x))'$ − похідною другого порядку і т.д.

Позначимо це так: $f'(x), f''(x), f'''(x), f''''(x)$,…; $f^{I}(x), f^{II}(x), f^{III}(x), f^{IV}(x)$,…; $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$,… .

Def. Похідною *n*-го порядку $f^{(n)}(x)$ називається похідна від похідної (*n-1*)-го порядку $f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

7.7. Формули для похідних *n-го* порядку деяких функцій

1. $y = x^{\alpha}$**:**

$y' = \alpha x^{\alpha-1};$

$y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2};$

. . . . . .

$y^{(n)} = \alpha(\alpha -1)(\alpha - 2). . .(\alpha - n +1)x^{\alpha-n}.$

Слідство. Якщо $\alpha = m \in \mathbf{N}$, тобто $y = x^{m}$, то $y^{(m)} = m!$.

2. $y = a^{x}$**:**

$y' = a^{x} \ln a;$

$y'' = a^{x}(\ln a)^{2};$

. . . . . .

$y^{(n)} = a^{x}(\ln a)^{n}.$

Слідство. Для $y = e^{x}$ отримаємо $y^{(n)} = e^{x}$.

3. $y = \sin(x)$**:**

$$y' = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = -\sin(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);$$

. . . . .

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Слідство: Для $y = \cos(x)$ отримаємо $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

7.8. Формула Лейбніца для похідної *n-го* порядку добутку двох функцій

Розглянемо добуток двох функцій $y = UV$:

$y' = U'V + UV'$;

$y'' = (U'V + UV')' = U''V + 2U'V' + UV''$;

$y''' = U^{(3)}V + 3U^{(2)}V^{(1)} + 3U^{(1)}V^{(2)} + UV^{(3)}$.

Легко помітити, що отриманий вираз нагадує біном Ньютона, де замість показника ступеня стоїть похідна, а самі функції можна розглядати як похідну нульового порядку $f^{(0)}=f$.

Формула для обчислення похідної n-го порядку добутку двох функцій називається формулою Лейбніца:

$$(UV)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i U^{(n-i1)} V^{(i)},$$

де $C^i_n = \dfrac{n!}{i!(n-1)!}$,

тобто $(UV)^{(n)} = C_n^0 U^{(n-0)} V^{(0)} + C_n^1 U^{(n-1)} V^{(1)} + C_n^2 U^{(n-2)} V^{(2)} + \ldots + C_n^n U^{(n-n)} V^{(n)}$.

◄ Нехай $(UV)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} A_n^i U^{(n-i1)} V^{(i)}$. Припустимо, що $U = e^{\alpha x}$, $V = e^{\gamma x}$.

Зліва $(UV)^{(n)} = \left(e^{\alpha x} e^{\gamma x}\right)^{(n)} = \left(e^{(\alpha+\gamma)x}\right)^{(n)} = (\alpha+\gamma)^n e^{(\alpha+\gamma)x}$.

Справа

$$\sum_{i=0}^{n} A_n^i U^{(n-i1)} V^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} A_n^i \left(e^{\alpha x}\right)^{(n-i1)} \left(e^{\gamma x}\right)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} A_n^i (\alpha)^{n-i} e^{\alpha x} (\gamma)^i e^{\gamma x} = \sum_{i=0}^{n} A_n^i \alpha^{n-i} \gamma^i e^{(\alpha+\gamma)x}.$$

Отже,

$$(\alpha+\gamma)^n e^{(\alpha+\gamma)x} = \sum_{i=0}^{n} A_n^i \alpha^{n-i} \gamma^i e^{(\alpha+\gamma)x}$$

або

$$(\alpha+\gamma)^n = \sum_{i=0}^{n} A_n^i \alpha^{n-i} \gamma^i.$$

Але це біном Ньютона, який має вигляд

$$(\alpha+\gamma)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^{n-i} \gamma^i.$$

Отже, $A_n^i = C_n^i$, тому

$$(UV)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i U^{(n-i1)} V^{(i)}. \text{ ►}$$

7.9. Похідна n-го порядку неявно заданої функції

Похідна n-го порядку неявно заданої функції обчислюється за аналогією з першою похідною неявно заданої функції з урахуванням того, що y − залежна змінна, тобто $y = y(x)$.

ПРИКЛАД:

$$x^2 + y^2 = r^2\ ;$$

$$2x + 2yy' = 0; \quad x + yy' = 0; \quad y' = -\frac{x}{y};$$

$$x + yy' = 0; \quad 1+y'^2 + yy'' = 0;$$

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{1+\dfrac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{2^2}{y^3};$$

$$y''y^3 = -2^2;$$

$$y'''y^3 + 3y^2y''y' = 0;$$

$$y''' = -\frac{3y''y'}{y} = -\frac{3}{y}\left(-\frac{2^2}{y^3}\right)\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{32^2x}{y^5}.$$

7.10. Похідна параметрично заданої функції

Нехай задана функція у вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

Тоді

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d\psi}{dt}}{\dfrac{d\varphi}{dt}},$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{d\varphi}{dt}}.$$

Отже,

$$y'(x) = \frac{\dfrac{d}{dt}\big(y'(x)\big)}{\dfrac{d\varphi}{dt}}.$$

ПРИКЛАД:

$$\begin{cases} x = a\cos(t); \\ y = b\sin(t), \end{cases}$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)} = -\frac{b}{a}ctg(t);$$

$$\begin{cases} Y(t) = y'(x) = -\dfrac{b}{a} ctg(t); \\ x = a\cos(t), \end{cases}$$

$$y''(x) = Y'(x) = \frac{Y'(t)}{x'(t)} = \frac{b}{a}\frac{1}{a\sin^2(t)}\frac{1}{(-a\sin(t))} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

7.11. Висновки

Допоміжні властивості:

1) $(C_1u + C_2v)' = C_1u' + C_2v'$*;*

2) $(uv)' = vu' + uv'$*;*

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$*;*

4) $(z(u(x)))' = z'_u u'_x$*;*

5) $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$*;*

6) $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_t t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Нагадування: $arcsin\, x + arccos\, x = \dfrac{\pi}{2}$, $arctgx + arcctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

Def. Явно задана функція - це функція, розв'язна відносно y***, тобто функція, представлена у вигляді*** $y = f(x)$**.**

Def. Функція, нерозв'язна відносно y***, називається неявно заданою. Позначається так:*** $F(x,\ y) = 0$**.**

Похідну від неявно заданої функції беруть як похідну від виразу по x *з врахуванням того, що* y *− це функція від* x*. Як результат, вираз буде записано відносно* y'*.*

Для тих виразів, які містять множення, ділення, піднесення до степеню, зручним прийомом є обчислення похідної через логарифмування. У цьому випадку спочатку вираз логарифмують, а потім диференціюють.

Def. Функція, змінні якої задані через допоміжну змінну, називається параметрично заданою:

$$\begin{cases} y = y(t); \\ x = x(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \psi(t); \\ x = \varphi(t), \end{cases}$$

де $t \in (t_1,\ t_2)$.

Похідна функції, заданої параметрично, має вигляд

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Def. Похідною n-го порядку $f^{(n)}(x)$ ***називається похідна від похідної (n-1)-го порядку*** $f^{(n-1)}(x)$***:***

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

1. $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

Слідство. Якщо $\alpha = m \in N$, тобто $y = x^m$, то $\left(x^{m}\right)^{(m)}=m!$.

2. $\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}(ln\,a)^{n}$.

Слідство. Для $y = e^x$ отримаємо $\left(e^{x}\right)^{(n)}=e^{x}$.

3. $(sin\,x)^{(n)}=sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, $(cos\,x)^{(n)}=cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Формула для обчислення похідної n-го порядку добутку двох функцій називається формулою Лейбніца:

$$(UV)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^iU^{(n-i1)}V^{(i)},$$

де $C^i_n=\dfrac{n!}{i!(n-1)!}$.

Похідна n-го порядку неявно заданої функції обчислюється за аналогією з першою похідною неявно заданої функції з урахуванням того, що y - залежна змінна, тобто y = y (x).

Друга похідна параметрично заданої функції має вигляд

$$y''(x)=\frac{\frac{d}{dt}\left(y'(x)\right)}{\frac{d\varphi}{dt}}.$$

7.12. Питання для перевірки

1. Табличка похідних. Вибрати правильний запис:

а) $(ctg(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $(ctg(x))'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $(ctg(x))'=\frac{1}{1+x^2}$.

2. Табличка похідних. Вибрати правильний запис:

а) $(arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $(arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $(arcsin(x))'=\frac{1}{1+x^2}$.

3. Табличка похідних. Вибрати правильний запис:

а) $(arctg(x))'=\frac{1}{1-x^2}$; б) $(arctg(x))'=\frac{1}{1+x^2}$; в) $(arctg(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. . Табличка похідних. Вибрати правильний запис:

а) $(tg(x))'=-\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $(tg(x))'=\frac{1}{\cos^2 x}$; в) $(tg(x))'=\frac{1}{1+x^2}$.

5. Похідна параметрично заданої функції y'_x дорівнює:

а) $\frac{x'(t)}{y'(t)}$; б) $\frac{y'(t)}{x'(t)}$; в) $x'(t)y'(t)$.

6. Похідна неявно заданої функції:

а) похідну беруть від виразу зліва направо з урахуванням того, що y - залежна змінна; б) функцію приводять до явного виду і для неї знаходять похідну; в) для функції, заданої в неявному вигляді, знайти похідну можна.

8. Логарифмування при обчисленні похідної використовують в тому випадку, якщо вираз містить:

а) експоненту; б) добуток, ділення, піднесення до степені; в) логарифмічні вирази.

9. Формула Лейбніца:

а) $(u+v)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i1)} v^{(i)}$; б) $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i1)} v^{(i)}$; в) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

8. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

8.1. Визначення диференціалу

Нехай функція $f(x)$ визначена і має похідну в точці x_o і її околі:

$$y' = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З теореми про нескінченно малу величину слідує, що

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x),$$

де $\alpha(x) \to 0$. Приріст функції можна записати як суму двох складових:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x.$$

Ці складові є нескінченно малими величинами при $\Delta x \to 0$, але перший доданок одного порядку малості з Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x),$$

а другий доданок - нескінченно мала величина вищого порядку малості, ніж Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0.$$

Перший доданок називається головною частиною приросту функції Δy.

Def. Диференціалом функції в точці називають головну частину її збільшення, лінійну відносно Δx.

Це позначається таким чином:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Величину dy називають диференціалом 1-го порядку.

З визначення випливає, що диференціал - це функція. Розглянемо диференціал незалежної змінної, тобто коли $y = x$. В цьому випадку диференціал x має вигляд

$$dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Слідство. Приріст Δx незалежної змінної x називають її диференціалом dx:

$$\Delta x = dx,$$

тому можна записати

$$dy = f'(x)dx.$$

Def. Диференціал функції - це добуток її похідної і диференціалу незалежної змінної.

Із запису диференціала слідує, що

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

тобто похідну можна розглядати як відношення диференціалів.

Якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

то це означає, що при $\Delta x \to 0$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \dfrac{dy}{dx}$, а не при $\Delta x \to 0$: $\Delta y \to dy$ і $\Delta x \to dx$.

Із запису

$$dy = f'(x)dx$$

можна зробити висновок, що диференціал - це функція двох незалежних змінних: x і dx.

Зауваження. Знаючи похідну, можна обчислити диференціал і, навпаки, знаючи диференціал, можна знайти похідну.

8.2. Геометричний зміст диференціалу

Оскільки $f'(x) = tg\alpha$ (рисунок 8.1), приріст функції можна представити у вигляді

$$\Delta y = \Delta x \ tg\alpha + \alpha(x)\Delta x.$$

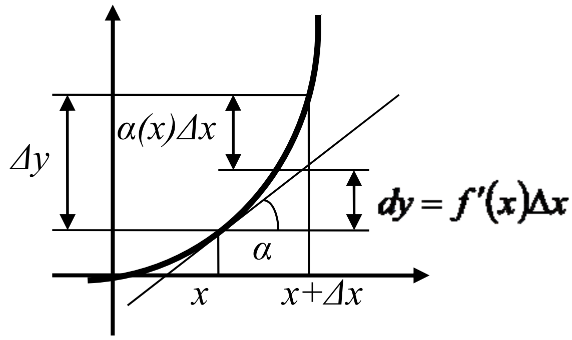


Рисунок 8.1

Геометричний зміст диференціалу – диференціал функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює збільшенню ординати дотичної до графіка функції в точці, де величина x отримала приріст Δx.

Зауваження. Чим менше приріст Δx, тим менша різниця між dy і Δy.

8.3. Приклади розрахунку диференціалу

1. Знайти диференціал функції $y = x^5 - cos(5x + 4)$.

Розв'язання

$$dy = f'(x)dx = \left(x^5 - cos(5x + 4)\right)' dx = \left(5x^4 + 5 sin(5x + 4)\right).$$

2. Визначити диференціал функції $y=\sqrt{x^3+4}+ln\,x$ при $x=1$ і $dx=0{,}1$.

Розв'язання

$$dy=f'(x)dx=\left(\sqrt{x^3+4}+ln\,x\right)'dx=\left(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}+\frac{1}{x}\right)'dx=$$

$$=\left(\frac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1^3+4}}+\frac{1}{1}\right)'\cdot 0{,}1=\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}+1\right)'\cdot 0{,}1\approx 1{,}671\cdot 0{,}1=0{,}1671.$$

3. Розрахувати диференціал і приріст функції $y=x^2-x$ в точці $x_0=10$, якщо приріст аргументу $\Delta x=0{,}1$. Обчислити різницю цих значень.

Розв'язання

$$dy=f'(x)dx=\left(x^2-x\right)'\Delta x=(2x-1)\Delta x=(2\cdot 10-1)\cdot 0{,}1=19\cdot 0{,}1=1{,}9;$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left((x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)\right)-\left(x^2-x\right)=$$

$$=\left((10+0{,}1)^2-(10+0{,}1)\right)-\left(10^2-10\right)=1{,}91;$$

$$\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}=\frac{|1{,}91-1{,}9|}{1{,}91}=\frac{0{,}01}{1{,}91}\approx 0{,}00524.$$

8.4. Властивості диференціалів

Основні властивості можна отримати, використовуючи зв'язок диференціала з похідною функції:

1) $d(C)=C'dx=0\cdot dx=0$;

2) $d(f+g)=df+dg$;

3) $d(Cf)=Cdf$;

4) $d(fg)=gdf+fdg$;

◄ $d(fg)=(fg)'dx=(gf'+fg')dx=\ gf'dx+fg'dx=gdf+fdg$ ►

5) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gdf-fdg}{g^2}$.

8.5. Диференціал складної функції

Th. Диференціал складної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу і диференціалу цього проміжного аргументу.

◄ Нехай $y=y(u)$ і $u=u(x)$. Тоді $y'_x=y'_u u'_x$. Знаходимо диференціал, якщо помножити вираз на dx: $y'_x dx=y'_u u'_x dx$, де $y'_x dx=dy$, а $u'_x dx=du$.

Отже, $dy=y'_u du$. ►

Def. Незмінність форми при виконанні операцій називається інваріантністю.

Висновок. Перший диференціал функції має властивість інваріантності, тобто диференціал функції зберігає один і той же вираз незалежно від того, є її аргумент незалежною змінною чи ні.

8.6. Таблиця диференціалів

1. $dC = 0$.
2. $d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx$.
3. $d\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{dx}{x^2}$.
4. $d\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.
5. $d\left(e^x\right) = e^x dx$.
6. $d\left(a^x\right) = a^x \ln a \; dx$.
7. $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$.
8. $d(\log_a x) = \dfrac{dx}{x \; \ln a}$.
9. $d(\sin x) = \cos x \; dx$.
10. $d(\cos x) = -\sin x \; dx$.
11. $d(tgx) = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \left(1 + tg^2 x\right)dx$.
12. $d(ctgx) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\left(1 + ctg^2 x\right)dx$.
13. $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.
14. $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.
15. $d(arctgx) = \dfrac{dx}{1 + x^2}$.
16. $d(arcctg) = -\dfrac{dx}{1 + x^2}$.
17. $d(shx) = chx \; dx$.
18. $d(chx) = shx \; dx$.
19. $d(thx) = \dfrac{dx}{ch^2 x}$.
20. $d(cthx) = -\dfrac{dx}{sh^2 x}$.
21. $d(arshx) = \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$.
22. $d(archx) = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
23. $d(arthx) = \dfrac{dx}{1 - x^2}$.
24. $d(arcthx) = \dfrac{dx}{1 - x^2}$.

8.7. Додаток диференціала до наближених обчислень

З визначення диференціалів можна записати

$$\Delta y \approx dy .$$

Ця форма і використовується для наближеного обчислення. В цьому випадку

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0),$$
$$dy = y'(x_0)\Delta x .$$

Тоді

$$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx y'(x_0)\Delta x$$

або

$$y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x .$$

ПРИКЛАДИ:

1. Обчислити наближене значення $\sqrt[m]{x_0+\Delta x}$.

Розв'язання

$$\sqrt[m]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[m]{x_0}+\frac{1}{m}\ \frac{\sqrt[m]{x_0}}{x_0}\Delta x .$$

2. Обчислити наближене значення $\sqrt[4]{1{,}2}$.

Розв'язання

$$\sqrt[4]{1{,}2}=\sqrt[4]{1+0{,}2}=\begin{vmatrix} x_0=1 \\ \Delta x=0{,}2\end{vmatrix}\approx\sqrt[4]{1}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt[4]{1}}{1}\cdot 0{,}2=1+\frac{0{,}2}{4}=1+0{,}05=1{,}05 .$$

8.8. Визначення диференціалу вищого порядку

Диференціал вищого порядку визначається за тією ж схемою, що і похідна вищого порядку.

Def. Диференціалом *n*-го порядку називається диференціал від диференціала *(n - 1)*-го порядку:

$$\boldsymbol{d^n=d\left(d^{n-1}y\right).}$$

При обчисленні диференціалів вищих порядків важливо пам'ятати, що dx − це довільне і незалежне від x число, яке при диференціюванні по x слід розглядати як постійний множник. Якщо існує диференціал, можна записати

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=y^{(2)}dxdx=y^{(2)}dx^2 ,$$
$$d^3y=d\left(d^2y\right)=d\left(y^{(2)}dx^2\right)=y^{(3)}dxdx^2=y^{(3)}dx^3 ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)=d\left(y^{(n-1)}dx^{n-1}\right)=y^{(n)}dxdx^{n-1}=y^{(n)}dx^n .$$

Тоді

$$d^ny=y^{(n)}dx^n .$$

Зауваження:

1. З отриманого виразу випливає, що

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n} .$$

2. Під dx^n мається на увазі порядок диференціалу, тобто

$$(dx)^n=dx^n .$$

Диференціал від степеню записується як

$$d\left(x^n\right)=nx^{n-1}dx .$$

3. Кожен диференціал є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж диференціали всіх нижчих порядків, так як

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{d^{n+1}(y)}{d^n(y)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y^{(n+1)}dx^{n+1}}{y^{(n)}dx^n}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}dx=0.$$

Використовуючи залежність $d^n y = y^{(n)}dx^n$, можна записати і формулу Лейбніца для диференціалів:

$$d^n(UV)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i d^{n-1}Ud^iV,$$

де $d^0U=U$, $d^0n = n$, $d^0V = V$.

Ця формула спочатку була отримана Лейбніцем для диференціала, а потім перетворена для похідної.

8.9. Диференціал вищого порядку для складної функції

Якщо є складна функція, тобто

$$f = f(g);\ g = g(z),$$

то для диференціала 1-го порядку виконується властивість інваріантності:

$$df = f'(g)dg,$$

де $dg=g'(z)dz$.

Для диференціала 2-го порядку по z

$$d^2=d(f'(g)dg)=d(f'(g))dg+f'(g)d(dg)=f''(g)dg^2+f'(g)d^2g,$$

тобто властивість інваріантності відноситься тільки до диференціалу 1-го порядку складної функції. У разі диференціалів вищих порядків складної функції властивість інваріантності порушується.

ПРИКЛАД: Побудувати диференціал 2-го порядку заданої функції $y=x^2$.

Розв'язання.

Якщо x – незалежна змінна, то

$$dy=2xdx;\ d^2y=2dx^2.$$

Розглянемо випадок, коли x – залежна змінна. Нехай $x=t^2$, тобто $y=t^4$, тоді

$$dy=4t^3dt;\ d^2y=12t^2dt^2.$$

Якщо розглядпти y як нескладну функцію, то $d^2y=2dx^2$ і при $x=t^2$ $dx=2tdt \Rightarrow d^2y=2(2tdt)^2=2t^2dt^2$, що відрізняється від $12t^2dt^2$.

У разі диференціювання y як складної функції $y=x^2$ і $x=t^2$ маємо:

- для диференціалу 1-го порядку

$$d^2y=d(dy)=d(2xdx);$$

- для диференціалу 2-го порядку

$$d^2y=d(dy)=d(2xdx)=d(2x)dx+2xd(dx)=2dx^2+2xd^2x,$$

де $x=t^2;\ dx=2tdt;\ d^2x=2dt^2$.

Таким чином,

$$d^2y=2dx^2+2xdx^2=2(2tdt)^2+2t^2 2dt^2=8t^2dt^2+4t^2dt^2=12t^2dt^2.$$

8.10. Висновки

Def. Диференціалом функції в точці називають головну частину її збільшення, лінійну відносно Δx:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Величину dy називають диференціалом 1-го порядку.

Диференціал – це функція.

Слідство. Приріст Δx незалежної змінної x називають її диференціалом dx, тобто

$$\Delta x = dx,$$

тому можна записати

$$dy = f'(x)dx.$$

Def. Диференціал функції − це добуток похідної функції і диференціалу незалежної змінної.

Із запису диференціалу слідує, що

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

тобто похідну можна розглядати як відношення диференціалів.

Диференціал – це функція двох незалежних змінних: x и dx.

Зауваження. Знаючи похідну, можна знайти диференціал і, навпаки, знаючи диференціал, можна визначити похідну.

Геометричний зміст диференціала – диференціал функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює збільшенню ординати дотичної до графіка функції в точці, де величина x отримала приріст Δx.

Зауваження. Чим менше приріст Δx, тим менше різниця між dy і Δy.

Основні властивості можна отримати, використовуючи зв'язок диференціала з похідною функції:

1) $d(C) = C'dx = 0 \cdot dx = 0$;
2) $d(f + g) = df + dg$;
3) $d(Cf) = Cdf$;
4) $d(fg) = gdf + fdg$.

Th. Диференціал складної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу і диференціала цього проміжного аргументу.

Для $y = y(u)$ і $u = u(x)$ маємо $dy = y'_u du$.

Def. Незмінність форми при виконанні операцій називається інваріантністю.

Висновок. Перший диференціал функції має властивість інваріантності, тобто диференціал функції зберігає один і той же вираз незалежно від того, є її аргумент незалежної змінної чи ні.

Додаток диференціалу до наближених обчислень:

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x.$$

***Def.* Диференціалом n-го порядку називається диференціал від диференціала (n - 1) -го порядку:**

$$\boldsymbol{d^n = d\left(d^{n-1}y\right).}$$

При обчисленні диференціалів вищих порядків важливо пам'ятати, що dx − це довільне і незалежне від x число, яке при диференціюванні по x слід розглядати як постійний множник. Якщо існує диференціал, можна записати

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = d(y^{(n-1)}dx^{(n-1)}) = y^{(n)}dx^n.$$

1. З отриманого виразу випливає, що $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

2. Під dx^n *мається на увазі порядок диференціала, тобто* $(dx)^n = dx^n$.

3. Кожен диференціал є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж диференціали всіх нижчих порядків.

Формула Лейбніца для диференціалів має вигляд

$$d^n\left(UV\right) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-1}Ud^iV,$$

де $d^0U = U$, $d^0n = n$, $d^0V = V$.

Якщо є складна функція, тобто

$$f = f(g);\ g = g(z),$$

то для диференціала 1-го порядку виконується властивість інваріантності:

$$df = f'(g)dg \text{ де } dg=g'(z)dz.$$

Для диференціала 2-го порядку по z

$$d^2z=d(f'(g)dg)=d(f'(g))dg+f'(g)d(dg)=f''(g)dg^2+f'(g)d^2g,$$

тобто властивість інваріантності відноситься тільки до диференціалу 1-го порядку складної функції. У разі диференціалів вищих порядків складної функції властивість інваріантності порушується.

8.11. Питання для перевірки

1. Диференціал функції - це:

а) приріст функції; б) головна лінійна частина приросту функції; в) похідна функції.

2. Диференціал функції - це:

а) її похідна; б) добуток похідної функції на функцію; в) добуток її похідної на диференціал незалежної змінної.

3. Диференціал функції записується в наступному вигляді:

а) $dy = f'(x)\Delta x$; б) $dy = f'(x)$; в) $dy = f'(x)f(x)$.

4. Диференціал x (незалежної змінної), коли $y = x$, має вид:

а) $dx = f'(x)$; б) $dx = \Delta x$; в) $dx = dy$.

5. Властивості диференціала функції:

а) $d(f + g) = dfdg$; б) $d(f + g) = df + dg$; в) $d(f + g) = gdf + fdg$.

6. Властивості диференціала функції:

а) $d(fg) = dfdg$; б) $d(fg) = fg$; в) $d(fg) = gdf + fdg$.

7. Властивості диференціала функції:

а) $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$; б) $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df}{dg}$; в) $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf+fdg}{g^2}$.

8. Похідна функції може бути записана через диференціали в вигляді:

а) $f'(x)=\frac{dx}{dy}$; б) $f'(x)=dydx$; в) $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

9. Із запису $dy=f'(x)dx$ можна зробити висновок, що диференціал - це функція:

а) незалежної змінної x; б) незалежної змінної dx; в) незалежних змінних x і dx.

10. Геометричний зміст диференціала - це:

а) приріст абсциси дотичної до графіка функції в точці, де величина y отримала приріст Δy; б) приріст ординати дотичної до графіка функції в точці, де величина x отримала приріст Δx; в) тангенс кута нахилу дотичної в заданій точці.

11. Диференціал складної функції дорівнює:

а) добутку функції і диференціала проміжного аргументу; б) добутку похідної цієї функції і її аргументу; в) добутку похідною цієї функції по проміжному аргументу і диференціалу цього проміжного аргументу.

12. Незмінність форми при виконанні операцій називається:

а) стабільністю; б) незмінністю функції; в) інваріантністю.

13. Чи володіє перший диференціал функції властивістю інваріантності:

а) так; б) ні; в) при певних умовах - так?

14. Для наближеного обчислення диференціалів можна використовувати запис:

а) $\Delta y \approx dy$; б) $\Delta y \approx dydx$; в) $y+\Delta y \approx dy$.

15. Диференціал n-го порядку - це:

а) похідна від диференціалу *n*-го порядку; б) диференціал від диференціала *n*-го порядку; в) диференціал від диференціала *(n - 1)* -го порядку.

16. Формула Лейбніца для диференціалів має вигляд:

а) $d^n(UV)=\sum_{i=1}^{n} C_n^i d^{n-1}U d^i V$; б) $d^n(UV)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i d^i U d^i V$;

в) $d^n(UV)=\sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}U d^i V$.

17. Для складної функції властивість інваріантності відноситься:

а) до диференціалу 2-го порядку; б) до диференціалу 1-го порядку;
в) до диференціалу будь-якого порядку.

9. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ

9.1. Теорема Ролля

Мішель Ролле (1652-1719) - французький математик.

Th. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ визначена і при цьому безперервна і диференційована, а на кордонах інтервалу $f(a)=f(b)$, То між a і b існує точка c, Така, що $f'(c)=0$.

Геометричний сенс теореми представлений на рисунку 9.1.

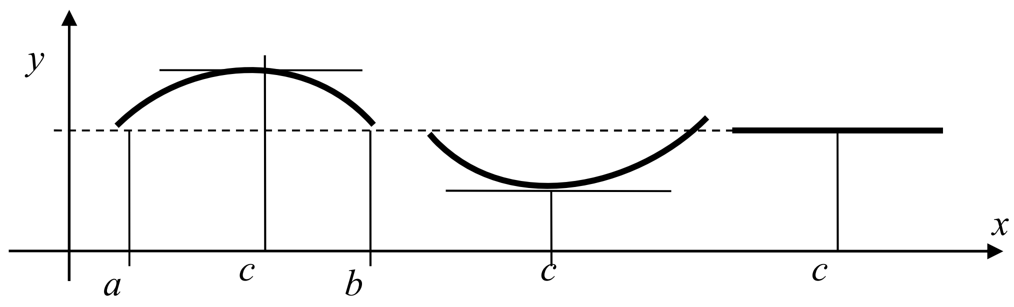


Рисунок 9.1

9.2. теорема Лагранжа

Жозеф Луї Лагранж (1736-1813) - французький математик і механік.

Th. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ визначена і при цьому безперервна і диференційована, тоді існує така точка c з відрізка $[a,\ b]$, Що справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

◄ Розглянемо функцію $F(x)=f(x)-kx$, Яка задовольняє умовам безперервності і диференційованої. підберемо коефіцієнт k так щоб $F(a)=F(b)$:

$$f(a)-ka=f(b)-kb.$$

З цього співвідношення випливає, що

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Оскільки на кордонах інтервалу функція $F(x)$ приймає рівні значення, то відповідно до теореми Ролля існує така точка c, похідна функції $F'(c)$в якій дорівнює нулю. При цьому

$$F'(x)=f'(x)-k,$$

де $F'(c)=f'(c)-k=0$. або $f'(c)=k$. отже,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ ►$$

Геометричний сенс теореми Лагранжа полягає в тому, що якщо для гладкої кривої провести хорду, то знайдеться на інтервалі хорди така точка c, В якій дотична паралельна хорді (рисунок 9.2).

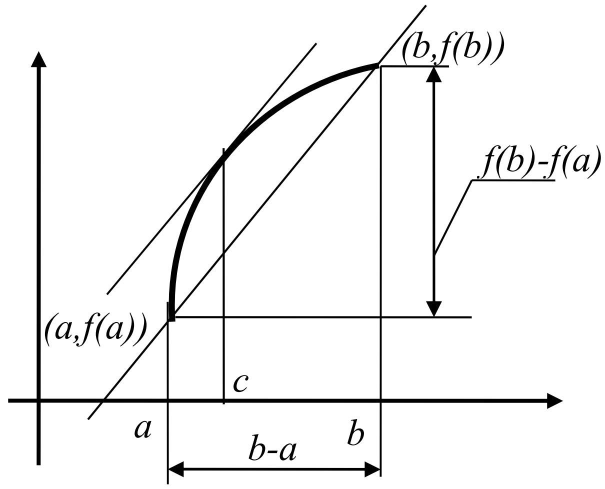


Рисунок 9.2

Зауваження:

1. Рівність

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

називається формулою Лагранжа.

2. Оскільки $a\le c\le b$, Можна записати $c=a+\theta(b-a)$, де $\theta\in[0,\ 1]$. Тоді

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

Це 2-а формула Лагранжа.

3. Якщо $a=x$ і $b=x+\Delta x$, То можна записати 3-ю формулу Лагранжа:

$$f(x+\Delta x)-fx=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

9.3. Теорема Коші

Огюстен Луї Коші (1789-1857) - французький математик.

Th. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ безперервні і мають похідні на відрізку $[a,\ b]$ і $g'(x)\neq 0$, То існує така точка c з відрізка $[a,\ b]$, Що справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

◄ Розглянемо функцію $F(x)=f(x)-kg(x)$. підберемо коефіцієнт k так щоб $F(a)=F(b)$:

$$f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b).$$

З цього співвідношення випливає, що

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Оскільки функція $F(x)$ на кордонах інтервалу приймає рівні значення, то відповідно до теореми Ролля існує така точка c, похідна функції $F'(c)$в якій дорівнює нулю. При цьому

$$F'(x) = f'(x) - kg'(x),$$

де $F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$. або $k = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. отже,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacktriangleright$$

Геометричний сенс теореми Коші такий же, що і теореми Лагранжа, тільки для параметрично заданої кривої (рисунок 9.3).

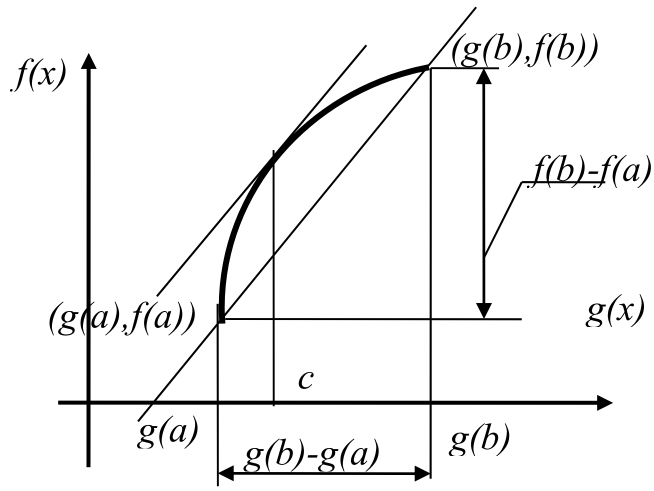


Рисунок 9.3

9.4. Правило Лопіталя

Гійом Франсуа Лопіталь (1661-1704) - французький математик.

Крім розглянутих способів визначення границі функції дуже зручним є правило Лопіталя.

Def. Будемо говорити, що відношення двох функцій

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

при $x \to a$ **є невизначеність виду** $\dfrac{0}{0}$**, якщо** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$**.**

Розкрити цю невизначеність - означає обчислити межа виду

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

якщо він існує, або встановити, що він не існує.

Th. (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і мають похідні в деякому окілку точки a за винятком, можливо, самої точки a. нехай далі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ і $g'(x)\neq 0$ у зазначеному окілку точки a. Тоді, якщо існує границя відносини похідних

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Кінцева або нескінченна), то існує і границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

◀По умові теореми

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(a)=0,\ \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} g(a)=0 \text{ і } \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Розглянемо інтервал $(x,\ a)$. На цьому інтервалі існує така точка c, тобто $\exists c\in(x,\ a)$, для якої

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ або } \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Оскільки при $x\to a$ $c\to a$, То вираз $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ можна записати у вигляді $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Отже, отримаємо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ▶

Зауваження:

1. Якщо похідні функцій $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють тим же вимогам, що і самі функції, то до них можна застосовувати і правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

2. Теорема залишається вірною і в разі, коли $x\to\infty$ і $x\to\pm\infty$.

◀ Нехай $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\begin{array}{c} x\to\frac{1}{t} \\ t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacktriangleright$$

3. Теорема справедлива і для невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty,\ +\infty,\ -\infty$ і $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ПРИКЛАДИ:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (n>0)}}\frac{\ln x}{x^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0$.

Висновок. З прикладу випливає, що $\ln x$ прагнути до ∞ повільніше, ніж x^n:

$$\ln x \ll x^n.$$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (n>0)}}\frac{x^n}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$.

Висновок. З прикладу випливає, що x^n прагне до ∞ повільніше, ніж e^x:

$$x^n \ll e^x.$$

З цих двох висновків можна записати

$$\ln x \ll x^n \ll e^x.$$

Зауваження.

Якщо відношення функцій має границю, а відношення їх похідних не прагне ні до якої границі, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Разом з цим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

Оскільки $-1 \le cos\,x \le 1$, то границя $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+cos\,x}{1}$ не визначена. Її значення коливається між 0 і 2.

Додаток. За допомогою правила Лопіталя часто вдається визначити границю функції і в таких випадках невизначеності:

1) $0\cdot\infty$ - вираз перетворюється до випадку $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$;

2) $\infty-\infty$ - вираз перетворюється до випадку $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$;

3) 1^{∞} - розглядається границя функції, записаної через експоненту;

4) ∞^{0} - розглядається границя функції, записаної через експоненту;

5) 0^{0} - розглядається границя функції, записаної через експоненту.

ПРИКЛАДИ:

1. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$. для випадку $f(x)g(x)$ можна записати $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$.

1.1. $\lim\limits_{x\to 0+} x\,ln\,x = \left| \; 0\cdot\infty \; \right| = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{ln\,x}{\dfrac{1}{x}} = \left| \; \dfrac{\infty}{\infty} \; \right| = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x)$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 2} (2-x)tg\,\dfrac{\pi x}{4} = \left| \; 0\cdot\infty \; \right| = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{\dfrac{1}{tg\,\dfrac{\pi x}{4}}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{ctg\,\dfrac{\pi x}{4}} = \left| \; \dfrac{0}{0} \; \right| =$

$= \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{cos^2\dfrac{\pi x}{4}}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{4}{\pi}$.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. для випадку $f(x)-g(x)$ можна записати $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{g(x)}}=\left| \; \dfrac{0-0}{0\cdot 0}=\dfrac{0}{0} \; \right|$.

Можуть бути і більш прості випадки.

2.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\left|\ \infty-\infty\ \right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left|\ \frac{0}{0}\ \right|=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\left|\ \frac{0}{0}\ \right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}.$

3. Нехай $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. для випадку $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ можна записати $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left|\ 1^{\infty}\ \right|=\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}$. Після перетворення розглядають $\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln f(x)=\left|\ \infty\cdot 0\ \right|$.

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\left|\ 1^{\infty}\ \right|=\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$, $\quad\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x=\left|\ \infty\cdot 0\ \right|=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left|\ \frac{0}{0}\ \right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x(-1)}=-1$. отже,

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

3.2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\left|\ 1^{\infty}\ \right|=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)=\left|\ \infty\cdot 0\ \right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left|\ \frac{0}{0}\ \right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x 2x}=-2.$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=\left|\ \infty^{0}\ \right|=\lim\limits_{x\to 0}e^{tgx\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$,

$\lim\limits_{x\to 0}tgx\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\left|\ 0\cdot\infty\ \right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{ctgx}=\left|\ \frac{\infty}{0}\ \right|=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim_{x\to 0} e^{tgx\, ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx\, ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1 .$$

9.5. Висновки

Th. Якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ визначена і при цьому безперервна і диференційована, а на кордонах інтервалу $f(a)=f(b)$, То між a і b існує точка c, така, що $f'(c)=0$.

Геометричний сенс теореми полягає в тому, що якщо на кордонах інтервалу значення неперервної функції рівні, то знайдеться така точка інтервалу, в якій дотична паралельна осі абсцис.

Th. (Лагранжа). Якщо на відрізку $[a,\ b]$ функція $f(x)$ визначена і при цьому безперервна і диференційована, тоді існує така точка c з відрізка $[a,\ b]$, Що справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Геометричний сенс теореми Лагранжа полягає в тому, що якщо для гладкої кривої провести хорду, то знайдеться на інтервалі хорди така точка c, В якій дотична паралельна хорді.

зауваження:

1. 1-я формула Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

2. 2-я формула Лагранжа:

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),$$

де $c=a+\theta(b-a)$ *і* $\theta\in[0,\ 1]$.

3. 3-тя формула Лагранжа:

$$f(x+\Delta x)-fx=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

де $x=a$ *і* $x+\Delta x=b$.

Th. (Коші). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ безперервні і мають похідні на відрізку $[a,\ b]$ і $g'(x)\neq 0$, То існує така точка c з відрізка $[a,\ b]$, Що справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Геометричний сенс теореми Коші такий же, що і теореми Лагранжа, тільки для параметрично заданої кривої.

Def. Будемо говорити, що відношення двох функцій

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

при $x \to a$ ***є невизначеність виду*** $\frac{0}{0}$***, якщо*** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$**.**

Розкрити цю невизначеність - означає обчислити межа виду

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

якщо він існує, або встановити, що він не існує.

Th. (Правило Лопіталя). нехай функції $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***визначені і мають похідні в деякому околі точки*** a ***за винятком, можливо, самої точки*** a***. Нехай далі*** $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ***і*** $g'(x) \neq 0$ ***у зазначеній границі точки*** a***. Тоді, якщо існує межа відносини похідних***

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Кінцевий або нескінченний), то існує і межа

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

причому

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження:

1. Якщо похідні функцій $f'(x)$ *і* $g'(x)$ *задовольняють тим же вимогам, що і самі функції, то до них можна застосовувати і правило Лопіталя:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

2. Теорема залишається вірною і в разі, коли $x \to \infty$ *і* $x \to \pm\infty$.

3. Теорема справедлива і для невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$*, тобто, якщо* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty,\ +\infty,\ -\infty$ *і* $\exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*, то* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Для функцій $\ln x$*,* x^n*,* e^x *при* $x \to \infty$ *можна записати*

$$\ln x \ll x^n \ll e^x.$$

За допомогою правила Лопіталя часто вдається визначити межі функції і в таких випадках:

1) $0 \cdot \infty$ *- вираз перетворюється до випадку* $\frac{0}{0}$ *або* $\frac{\infty}{\infty}$*;*

2) $\infty - \infty$ *- вираз перетворюється до випадку* $\frac{0}{0}$ *або* $\frac{\infty}{\infty}$*;*

3) 1^{∞} *- розглядається границя функції, записаної через експоненту;*

4) ∞^{0} *- розглядається границя функції, записаної через експоненту;*

5) 0^0 *- розглядається границя функції, записаної через експоненту.*

ПРИКЛАДИ:

1. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$. *Для випадку* $f(x)g(x)$ *можна записати* $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$.

2. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. *для випадку* $f(x)-g(x)$ *можна записати* $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{g(x)}}=\left|\ \dfrac{0-0}{0\cdot 0}=\dfrac{0}{0}\ \right|$.

3. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. *для випадку* $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)}$ *можна записати* $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)}=\left|\ 1^\infty\ \right|=\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}$. *Після перетворення розглядають* $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)=\left|\ \infty\cdot 0\ \right|$.

9.6. Питання для перевірки

1. Теорема Ролля. Якщо функція на інтервалі неперервна і диференційована:

а) і на границях інтервалу її значення рівні, то на цьому інтервалі знайдеться точка, похідна функції в якій дорівнює нулю; б) і на границях інтервалу її значення різних знаків, то на цьому інтервалі знайдеться точка, похідна функції в якій дорівнює нулю; в) то на цьому інтервалі знайдеться точка, похідна функції в якій дорівнює нулю.

2. Теорема Лагранжа. якщо функція $f(x)$ **на інтервалі** $[a,b]$ **неперервна і диференційована, то:**

а) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $f(b)-f(a)=f(c)(b-a)$;
б) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$; в) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $f(b)=f(c)(b-a)$.

3. Теорема Лагранжа. якщо функція $f(x)$ **на інтервалі** $[a,b]$ **неперервна і диференційована, то:**

а) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(c)$; б) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$; в) знайдеться точка $c\in[a,b]$, Така, що $\dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}=f'(c)$.

4. Геометричний сенс теореми Лагранжа: якщо функція на інтервалі неперервна, то на цьому інтервалі знайдеться точка, дотична в якій:

а) паралельна осі *Ox*; б) паралельна осі *Oy*; в) паралельна хорді цього інтервалу.

5. Якщо $a \le c \le b$ і $c = a + \theta(b-a)$, де $\theta \in [0,\ 1]$, то формулу Лагранжа можна записати у вигляді:

а) $f(b) - f(a) = f(a + \theta(b-a))(b-a)$;

б) $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$;

в) $f(a + \theta(b-a)) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$.

6. Якщо $\theta \in [0,\ 1]$, То формулу Лагранжа можна записати у вигляді:

а) $f(x + \Delta x) - fx = f(x + \theta\Delta x)\Delta x$; б) $f(x + \Delta x) - fx = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$; в) $f(x + \theta\Delta x) - fx = f'(x + \Delta x)\Delta x$.

7. Теорема Коші. якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ на інтервалі $[a,b]$ безперервні і мають похідні, то:

а) знайдеться точка $c \in [a,b]$, Така, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}$; б) знайдеться точка $c \in [a,b]$, Така, що $\dfrac{f(b) + f(a)}{g(b) + g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$; в) знайдеться точка $c \in [a,b]$, Така, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

8. Геометричний сенс теореми Коші:

а) такий же, що і теореми Ролля, тільки для параметрично заданої кривої; б) такий же, що і теореми Лагранжа, тільки для параметрично заданої кривої; в) такий же, що і теореми Лагранжа.

9. Ставлення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, називають:

а) визначеністю виду $\dfrac{0}{0}$; б) невизначеністю виду $\dfrac{0}{0}$; в) нульовим ставленням.

10. Правило Лопіталя. якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$:

а) і при цьому $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; б) то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; в) то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

11. Чи можна використовувати правило Лопіталя при розкритті невизначеності виду $\dfrac{0}{\infty}$:

а) так, після відповідних перетворень; б) так; в) немає?

12. Чи можна використовувати правило Лопіталя при розкритті невизначеності виду $\infty - \infty$:

а) так; б) немає; в) так, після відповідних перетворень?

13. Чи можна використовувати правило Лопіталя при розкритті невизначеності виду $\frac{\infty}{0}$:

а) так, після відповідних перетворень; б) немає; в) так?

14. Правило Лопіталя. якщо $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$:

а) і при цьому $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; б) то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; в) то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

15. Чи можна використовувати правило Лопіталя при розкритті невизначеності виду 1^{∞} :

а) ні; б) так; в) так, за певних перетвореннях?

10. Формула Тейлора

10.1. Формула Тейлора для многочлена

Нехай заданий многочлен ступеня n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n .$$

Про диференціюємо цей многочлен n раз:

$$P_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... + na_nx^{n-1} ,$$
$$P_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x^1 + 4 \cdot 3a_4x^2 + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} ,$$
$$P_n^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + ... + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} ,$$
$$...$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 1 \cdot a_n = n!\,a_n .$$

Нехай $x = 0$. Значення многочлена і його похідні в цій точці рівні:

$$P_n(x) = a_0 ,\ \ P_n^{(1)}(0) = a_1 ,\ \ P_n^{(2)}(0) = 2a_2 ,\ \ P_n^{(3)}(0) = 3 \cdot 2a_3 ,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(0) = n!\,a_n .$$

З цих залежностей випливає, що

$$a_0 = P_n(0),\ \ a_1 = P_n^{(1)}(0)\ \ , a_2 = \frac{P_n^{(2)}(0)}{2!},\ \ a_3 = \frac{P_n^{(3)}(0)}{3!},\ \ldots,\ \ a_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} .$$

Підставивши ці значення у вираз многочлена, одержимо

$$P_n(x) = P_n(0) + P_n^{(1)}(0)x + \frac{P_n^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{P_n^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{P_n^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ... + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Це можна записати через стилізований знак суми:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i ,$$

де $P_n^{(0)}(x) = P_n(0)$.

Це перша формула Тейлора для многочлена. Її ще називають формулою Маклорена для многочлена.

10.2. Друга формула Тейлора для многочлена

нехай $x - x_0 = \Delta x$, тоді можна записати

$$P(x) = P(x_0 + \Delta x) = Q(\Delta x),$$

де

$$Q(\Delta x) = A_0 + A_1\Delta x + A_2\Delta x^2 + ... + A_n\Delta x^n .$$

У цьому виразі

$$A_0 = Q(0) = P(x_0),$$
$$A_1 = \frac{Q'(0)}{1!} = \frac{P'(x_0)}{1!},$$
$$A_2 = \frac{Q''(0)}{2!} = \frac{P''(x_0)}{2!},$$

$$\dots$$

$$A_n = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Тому отримаємо

$$P(x) = P(x_0 + \Delta x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Це 2-а формула Тейлора.

10.3. Формула Тейлора для функції

Th. (Тейлора). нехай функція $f(x)$ в точці x_0 і її околиці має похідну порядку $n+1$ (Тобто функція $f(x)$ і її похідні до порядку n безперервні і мають похідні). Нехай x - будь-яке значення аргументу з вказаною околиці $(x \neq x_0)$. Тоді між точками x_0 і x знайдеться точка ξ, така, що можна записати

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Отже,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

◄ Для доведення введемо позначення:

$$P(x, x_0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

оскільки $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, можна записати

$$f(x) = P(x, x_0) + R_{n+1}(x).$$

Теорема буде доведена, якщо покажемо, що

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $\xi \in (x, x_0)$.

Введемо проміжну величину t на відрізку (x, x_0) і допоміжну функцію

$$F(t) = f(x) - P(x,t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Ця функція в точці $t = x_0$ дорівнює

$$F(x_0) = f(x) - P(x,x_0) - \frac{(x-x_0)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

при $t = x$

$$F(x) = f(x) - P(x,x) - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

Оскільки

$$P(x,t) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

то

$$f(x) = P(x,x) + R_{n+1}(x).$$

Отже, для функції $F(t)$ виконується умова теореми Ролля: функція неперервна і диференційована на відрізку (x,x_0) і $F(x_0) = F(x)$.

З теореми Ролля слід, що $F'(\xi) = 0$, де $\xi \in (x,x_0)$. При цьому

$$F'(t) = f'(x) - P'(x,t) - \left((x-t)^{n+1}\right)' \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$$F'(t) = 0 - \left(f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right)' +$$

$$+ \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$$F'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!} - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{2f^{(2)}(t)}{2!}(x-t) -$$

$$- \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \frac{3f^{(3)}(t)}{3!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} +$$

$$+ \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$$F'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + f^{(1)}(t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) -$$

$$- \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} +$$

$$+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Отже, знайдеться така точка $t=\xi$ на відрізку (x,x_0), для якої $F'(\xi)=0$, Тобто

$$0=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

звідки

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}\Rightarrow R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$ ▶

10.4. Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

Вираз

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

називається залишковим членом формули Тейлора у формі Лагранжа. Цей вираз можна записати і в іншому вигляді.

Оскільки $\xi\in(x,x_0)$, Можна записати $\xi\in x_0+\theta(x-x_0)$, де $\theta\in(0,\ 1)$, і тоді

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Отримана запис називається залишковим членом формули Тейлора у формі Коші. Існує також запис залишкового члена в формі Пеано.

10.5. Запис залишкового члена у формі Пеано

Нехай $x-x_0=\Delta x$. Тоді $x=x_0+\Delta x$, і формулу Тейлора можна записати у вигляді

$$f(x_0+\Delta x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x_0+\Delta x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_0+\Delta x-x_0)^{n+1}$$

або

$$f(x_0+\Delta x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\Delta x^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}.$$

Покажемо, що якщо функція $f^{(n+1)}(x)$ обмежена в окілку точки x_0, тобто

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M,$$

то залишковий член $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж Δx^n при $x \to x_0$. дійсно,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{R_{n+1}(x)}{\Delta x^n}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)\Delta x^{n+1}}{(n+1)!\,\Delta x^n}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x\right| \le \lim_{\Delta x \to 0} M\Delta x = 0.$$

Те, що $R_{n+1}(x)$ - нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx^n, можна записати так:

$$R_{n+1} = 0\left(\Delta x^n\right).$$

Тоді запис

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + 0\left(\Delta x^n\right)$$

називається формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.

Зауваження. За формулою Тейлора дуже зручно будувати розкладання при $x_0 = 0$. Тоді формула Тейлора набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + 0\left(x^n\right)$$

або

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + 0\left(x^n\right).$$

Це формула Маклорена. Отже, формула Тейлора щодо нуля називається формулою Маклорена.

10.6. Приклади використання формули Маклорена для елементарних функцій

1. $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$**.** Знаходимо похідні цієї функції для $x = 0$:

$f^{(1)}(x) = e^x$, $f^{(1)}(0) = 1$,

$f^{(2)}(x) = e^x$, $f^{(2)}(0) = 1$,

…

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$.

Тоді

$$f(x) = e^x = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + 0\left(x^n\right),$$

$$e^x = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + 0\left(x^n\right),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 0\left(x^n\right).$$

Похибка цієї формули можна оцінити за залишковим члену

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

При $\xi = \theta x$, де $\theta \in (0,\ 1)$, Можна записати $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$. Отже, $R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}$. При фіксації x має місце нерівність $1 < e^{\theta x} < e^x$.

Похибку можна оцінити величиною

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!},$$

де $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n+1}$.

Для x завжди можна вказати таке число N, що $|x| < N$. В цьому випадку можна ввести $q \in (0,\ 1)$ так що

$$\left|\frac{x}{N}\right| = q,\ q < 1.$$

Тоді N може приймати значення $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ N-1,\ N,\ N+1,\ N+2, \ldots$.
можна записати

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot \left|\frac{x}{N+1}\right| \cdot \ldots,$$

отже, має місце нерівність виду

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot q \cdot q \cdot \ldots,$$

де кількість множників $\left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right|$ є $N-1$, а наступних множників q – $n + 1 - (N-1) = n + 1 - N + 1 = n - N + 2$. Таким чином,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2}.$$

В цьому випадку при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \lim_{n\to\infty} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2} = \lim_{n\to\infty} A q^{n-N+2} = 0.$$

Висновок. З ростом n похибка розкладання e^x прямує до нуля. Отже, e^x можна записати у вигляді многочлена з будь-якою точністю.

2. $f(x)=\sin x, \quad f(0)=0$. Знаходимо похідні цієї функції для $x=0$:

$$f^{(1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(1)}(0)=1;$$

$$f^{(2)}(x)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(2)}(0)=0;$$

$$f^{(3)}(x)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(3)}(0)=-1;$$

$$f^{(4)}(x)=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(4)}(0)=0;$$

$$f^{(5)}(x)=\sin\left(x+5\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(5)}(0)=1;$$

$$f^{(6)}(x)=\sin\left(x+6\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(6)}(0)=0;$$

$\ldots$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Тоді

$$f(x)=\sin x=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0\left(x^n\right),$$

$$\sin x=0+1\cdot x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\ldots+\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n+0\left(x^n\right),$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+\ldots+\frac{\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n+0\left(x^n\right).$$

Це можна записати і в такому вигляді:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}(x);$$

$$\sin x=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}+R_{2k}(x).$$

Оцінку похибки ряду Тейлора можна представити в наступному вигляді:

$$R_{2k}(x)=\frac{\sin\left(2k\frac{\pi}{2}+\xi\right)}{(2k)!}x^{2k}, \text{ але } \left|\sin\left(2k\frac{\pi}{2}+\xi\right)\right|\le 1.$$

отже,

$$R_{2k}(x)\le\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Для $x \in \lfloor -m,\ m \rfloor$ $R_{2k}(x) \le \dfrac{m^{2k}}{(2k)!}$ $\to$ 0 при $n \to \infty$, тобто похибка цього розкладання $R_{2k}(x) \le \dfrac{m^{2k}}{(2k)!}$.

3. $f(x) = cos\,x$. Побудувати розкладання можна через похідну $sin\,x$:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + 0\left(x^{2k}\right).$$

тоді

$$cos\,x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} + ... + (-1)^{k-1}\frac{(2k-1)x^{2k-2}}{(2k-1)!} + 0\left(x^{2k}\right),$$

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + 0\left(x^{2k+1}\right),$$

$$cos\,x = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!} + R_{2k+1}(x).$$

10.7. Доповнення до формули Тейлора

Заміна функції многочлена за формулою Тейлора в околиці точки x_0 розпадається на два етапи.

Перший етап. Спочатку обчислюють значення функції $f(x)$ і її похідні в точці x_0 і за формулою Тейлора складають многочлен для функції $f(x)$. При цьому передбачається, що функція $f(x)$ нескінченне число разів диференційована.

Другий етап. Знаходять інтервал, в якому складений вираз за формулою Тейлора сходиться до функції $f(x)$, тобто встановлюють, для яких значень x залишковий член ряду $R_n(x)$ буде прагнути до нуля при $n \to \infty$.

Геометричний сенс формули Тейлора для функції полягає в тому, що з підвищенням ступеня формули Тейлора крива все ближче наближається до заданої кривої. На рисунку 10.1 представлена апроксимація функції $sin(x-1)+0{,}5$ розкладаннями Тейлора різного порядку.

Зауваження:

1. Заміна функції многочленом можлива, якщо в деякій околиці точки x_0 абсолютні величини всіх похідних функції обмежені одним і тим же числом:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M\ .$$

2. Розкладання функції за формулою Тейлора можна використовувати при визначенні границі функції.

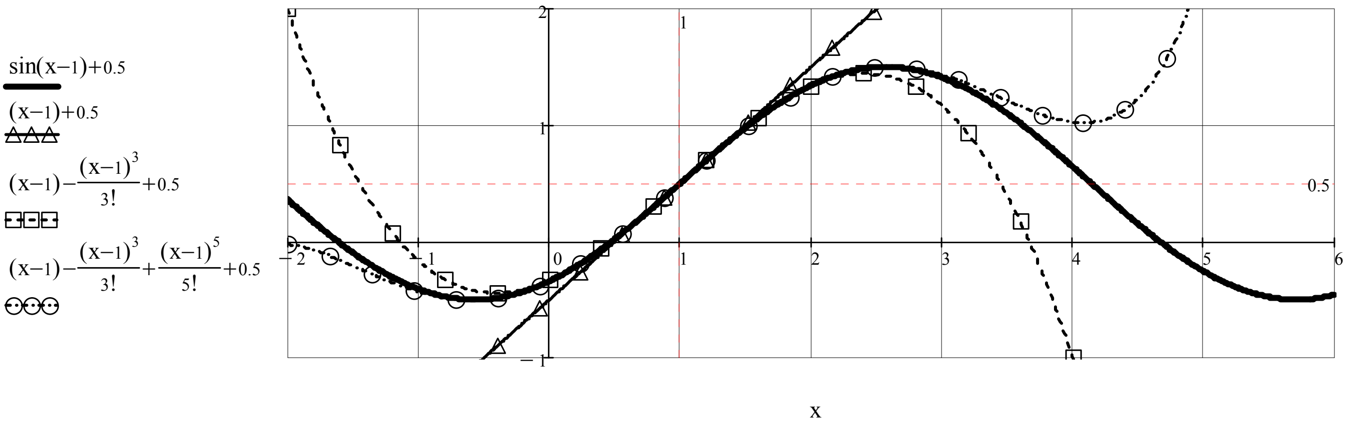


Рисунок. 10.1

10.8. Висновки

1-я формула Тейлора для многочлена, або формула Маклорена, для многочлена $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n$ *має вигляд*

$$P_n(x)=P_n(0)+P_n^{(1)}(0)x+\frac{P_n^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{P_n^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{P_n^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Це можна записати через стилізований знак суми:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i ,$$

де $P_n^{(0)}(x)=P_n(0)$.

2-я формула Тейлора для многочлена:

$$P(x)=P(x_0+\Delta x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n ,$$

де $x-x_0=\Delta x$;

$$P(x)=P(x_0+\Delta x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{P^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i .$$

Th. (Тейлора). нехай функція $f(x)$ ***в точці*** x_0 ***і її окілку має похідну порядку*** $n+1$ ***(тобто функція*** $f(x)$ ***і її похідні до порядку*** n ***безперервні і мають похідні). Нехай*** x ***- будь-яке значення аргументу з вказаною околиці*** $(x\neq x_0)$***. Тоді між точками*** x_0 ***і*** x ***знайдеться точка*** ξ***, Така, що можна записати***

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

де $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Це можна записати у вигляді такої рівності:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Залишковий член формули Тейлора у формі Коші

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де $\theta\in(0,\ 1)$.

Якщо функція $f^{(n+1)}(x)$ *обмежена в окілку точки* x_0, *тобто*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M,$$

то залишковий член $R_{n+1}(x)$ *є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж* Δx^n, *при* $x\to x_0$.

Якщо $R_{n+1}(x)$ *- нескінченно мала величина вищого порядку, ніж* Δx^n, *то* $R_{n+1}(x)$ *можна записати у формі Пеано:*

$$R_{n+1}=0(\Delta x^n).$$

Зауваження. Формула Тейлора при $x_0=0$ *має вигляд*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+0(x^n)$$

або

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0(x^n)$$

і називається формулою Маклорена.

Приклади формул розкладання:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+0(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+...+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+0(x^{2k});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+...+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+0(x^{2k+1}).$$

Заміна функції многочлена за формулою Тейлора в околиці точки x_0 *розпадається на два етапи.*

Перший етап. Обчислюють значення функції $f(x)$ і її похідні в точці x_0 і за формулою Тейлора складають многочлен для функції $f(x)$. Передбачається, що функція $f(x)$ нескінченне число разів диференційована.

Другий етап. Знаходять інтервал, в якому складений вираз за формулою Тейлора сходиться до функції $f(x)$, тобто встановлюють, для яких значень x залишковий член ряду $R_n(x)$ буде прагнути до нуля при $n\to\infty$.

Геометричний сенс формули Тейлора для функції полягає в тому, що з підвищенням ступеня формули Тейлора крива все ближче наближається до заданої кривої.

10.9. Питання для перевірки

1. Запис формули Тейлора для многочлена через стилізований знак суми для розкладання в околиці нуля:

а) $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$; б) $P_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i$; в) $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i$.

2. Формула Тейлора для розкладання многочлена за ступенями $x-x_0$:

а) $P_n(0)=P_n(0)+P_n{}'(0)(x-x_0)+\frac{P_n^{(2)}(0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n$;

б) $P_n(x)=P_n(x_0)+P_n{}'(x_0)(x-x_0)+\frac{P_n^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

в) $P_n(0)=P_n(0)+P_n{}'(0)x+\frac{P_n^{(2)}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

3. Запис формули Тейлора для многочлена через стилізований знак суми для розкладання в околиці точки x_0:

а) $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$; б) $P_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i$; в) $P_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{P_n^{(i)}(0)}{i!}x^i$.

4. Формула Маклорена:

а) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$; б) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$;

в) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

5. Формула Тейлора для функції:

а) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}x^i+\frac{f^{(i+1)}(x_0)}{(n+1)!}x^{n+1}$;

б) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$;

в) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

6. Залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа:

а) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, де $\theta\in(0,\ 1)$; б) $R_{n+1}=0(\Delta x^n)$;

в) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

7. Залишковий член формули Тейлора у формі Пеано:

а) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, де $\theta\in(0,\ 1)$; б) $R_{n+1}=0(\Delta x^n)$;

в) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

8. Залишковий член формули Тейлора у формі Коші:

а) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, де $\theta\in(0,\ 1)$; б) $R_{n+1}=0(\Delta x^n)$;

в) $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

9. Формула Тейлора для функції $cos\,x$:

а) $\cos x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots$; б) $\cos x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$; в) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots$.

10. Формула Тейлора для функції $sin\,x$:

а) $\sin x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots$; б) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots$; в) $\sin x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$.

11. Формула Тейлора для функції e^x:

а) $e^x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots$; б) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$; в) $e^x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots$.

12. З ростом n похибка розкладання e^x:

а) прагне до одиниці; б) прагне до нуля; в) прагне до нескінченності.

13. Припущення щодо функції при записі її за формулою Тейлора:

а) функція $f(x)$визначена в заданій околиці; б) функція $f(x)$нескінченне число разів диференційована; в) функція $f(x)$ необхідне число раз дифференцируемая.

14. Геометричний сенс формули Тейлора для функції:

а) з підвищенням ступеня формули Тейлора крива все далі віддаляється від заданої кривої; б) з підвищенням ступеня формули Тейлора крива все ближче наближається до заданої кривої; в) формула Тейлора не відображає задану криву.

15. Заміна функції многочленом можлива:

а) якщо в деякій околиці точки x_0 абсолютні величини всіх похідних функції обмежені одним і тим же числом; б) якщо в деякій околиці точки x_0 функція диференційована; в) якщо в деякій околиці точки x_0 абсолютна величина функції обмежена.

16. Розкладання функції за формулою Тейлора можна використовувати:

а) при визначенні границі функції; б) при визначенні екстремальних значень функції; в) при визначенні диференціала функції.

11. ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНКЦІЇ

11.1. Монотонність функції

Th. Якщо похідна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) не менш нуля:

$$f'(x) \geq 0,$$

то функція на цьому інтервалі не убуває.

Якщо похідна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) не більш нуля:

$$f'(x) \leq 0,$$

то функція на цьому інтервалі зростає.

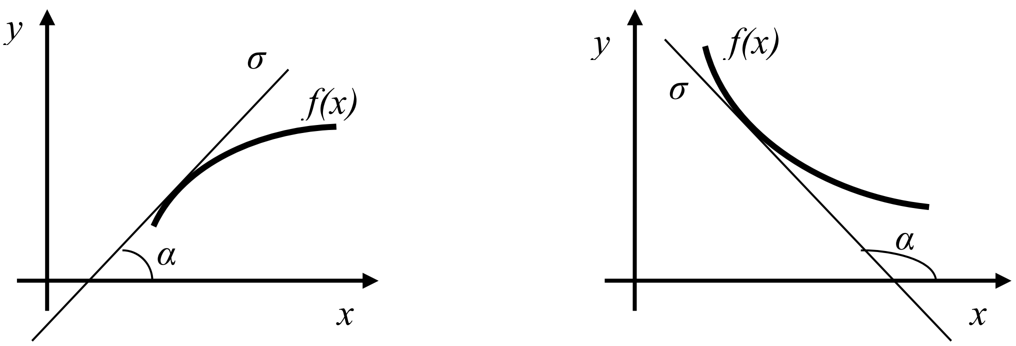
◀ Нехай $f'(x) \geq 0$ на інтервалі (a,b). Тоді для всіх $x_1, x_2 \in (a,b)$, Таких, що $x_1 < x_2$, Має місце нерівність $\dfrac{f(x_2) \quad f(x_1)}{x_2 \quad x_1} \geq 0$, А отже, при $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$. ▶

Зауваження:

1. Якщо функція на інтервалі тільки зростає або тільки убуває, то її називають монотонно зростаючої або монотонно спадною.

2. Проміжок, на якому функція або зростає, або зменшується, називається проміжком монотонності.

3. Дотична на проміжку зростання функції утворює гострий кут з віссю Ox (рисунок 11.1, а), на проміжку убування - тупий (рисунок 11.1, б).



а б

Рисунок 11.1

ПРИКЛАД. дослідити функцію $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на монотонність.

Рішення

Диференціюючи задану функцію:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 4x(x-1)(x+1).$$

Вирішуємо рівняння: $4x(x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

Використовуємо метод інтервалів (рисунок 11.2).

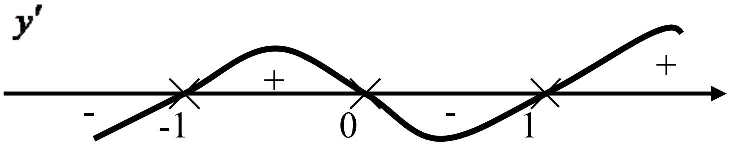


Рисунок 11.2

Результати можна представити у вигляді таблиця 11.1.

Таблица 11.1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ \infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘		↗		↘		↗

11.2. Необхідна і достатня умова екстремуму

11.2.1. локальний екстремум

Def. нехай функції $f(x)$ **визначена в безперервній околиці точки** x_0 **. число** $f(x_0)$ **називається локальним максимумом (мінімумом), якщо для будь-якої точки** x **околиці** $U_\delta(x_0)$ **виконується умова**

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0)),$$

т. е. в Квантор це можна записати так:

$$f(x_0) \quad loc.max \Leftrightarrow \forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x) \le f(x_0),$$

$$f(x_0) \quad loc.min \Leftrightarrow \forall x \in U_\delta(x_0):\ f(x) \ge f(x_0).$$

Def. ***loc.max*** (рисунок 11.3, а) **і** ***loc.min*** (рисунок 11.3, б) **називають ще локальними екстремумами.**

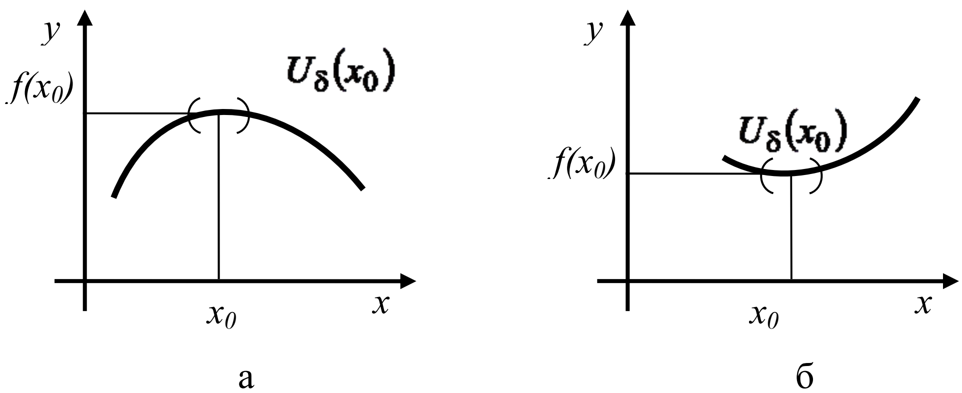


Рисунок 11.3

11.2.2. Необхідна умова екстремуму

Необхідна умова екстремуму засноване на теорема Ферма.

П'єр де Ферма (1601-1665) - французький математик.

Th. Якщо безперервна на інтервалі (a,b) функція $f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0 і існує похідна в цій точці, то ця похідна дорівнює нулю.

◄ Доказ виконується від протилежного.

Нехай в точці екстремуму похідна не дорівнює нулю, а, наприклад, більше нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

В цьому випадку при $x < x_0$ $f(x) < f(x_0)$, а при $x > x_0$ $f(x) > f(x_0)$.

Але для локального екстремуму повинна виконуватися умова, що при $x < x_0$ $f(x) < f(x_0)$ і при $x > x_0$ $f(x) < f(x_0)$, Тобто знак щодо функцій не змінюється. Отже, припущення, що в точці екстремуму похідна не дорівнює нулю, не вірно. Похідна в точці екстремуму дорівнює нулю. ►

11.2.3. Достатня умова екстремуму

Затвердження. Якщо знак похідної $f'(x)$ безперервної функції $f(x)$ в околиці точки x_0 при переході через неї змінюється з позитивного на негативний, то в цій точці функція $f(x)$ має локальний максимум, якщо з негативного на позитивний - локальний мінімум.

◄ Нехай знак $f'(x)$змінюється з «плюса» на «мінус» (рисунок 11.4). Це означає:

- $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0): f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\uparrow$;
- $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta): f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\downarrow$.

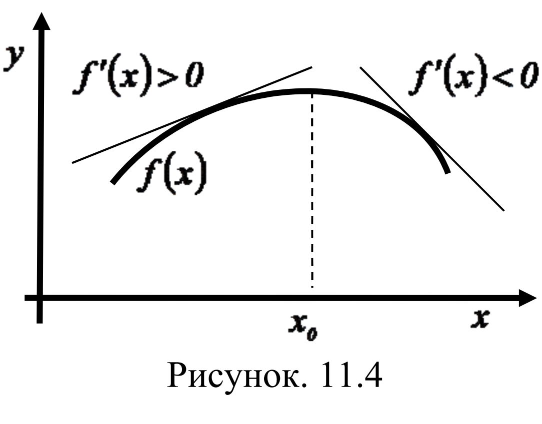


Рисунок. 11.4

В цьому випадку x_0 - локальний максимум.

Аналогічні міркування можна привести для випадку зміни знака похідної з «мінуса» на «плюс». ►

зауваження:

1. Затвердження справедливо і для випадку, коли в точці x_0 функція є недиференційованої, наприклад: $f(x)=|x|$ в точці $x=0$.

2. Для функції в заданій області можна виділити локальні екстремуми і найбільше та найменше значення функції. Не завжди вони збігаються.

11.3. Алгоритм знаходження локального екстремуму

Алгоритм знаходження локального екстремуму наступний:

1. Знаходять x_i, де $f'(x_i)=0$.

2. Вибирають $x_i \in D_f$ (З області допустимих значень).

3. Досліджують знак похідної на інтервалах точок x_i.

4. Виділяють ті точки x_i, Де знак похідної змінюється.

5. Обчислюють значення функції в точках x_i. Це і є значення локальних екстремумів.

ПРИКЛАД. Визначити точки локального екстремуму функції

$$y=\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+5.$$

Рішення

Визначаємо похідну функції:

$$y'=4x^4-4x^2=4x^2\left(x^2-1\right)=4x^2(x-1)(x+1).$$

Прирівнюємо похідну до нуля: $4x^2(x-1)(x+1)=0$. Коріння рівняння:

$$x_1=-1,\ \ x_2=0,\ \ x_3=1.$$

Використовуємо метод інтервалів (Рисунок 11.5).

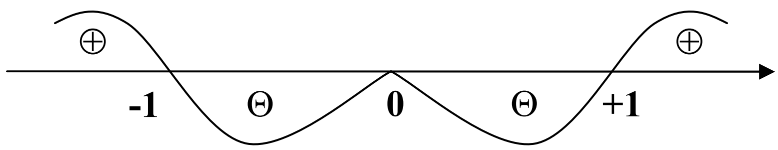


Рисунок 11.5

Ці ж результати можна оформити у вигляді таблиці 11.2.

Таблиця 11.2

x_0	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+1)$	$+1$	$(+1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↑	max	↓		↓	min	↑

Знаходимо значення локальних екстремумів:

$$y_{max} = y(-1) = \frac{4}{5}(-1)^5 - \frac{4}{3}(-1)^3 + 5 = -\frac{4}{5} + \frac{4}{3} + 5 = \frac{-12+20+75}{15} = \frac{83}{15},$$

$$y_{min} = y(1) = \frac{4}{5}(1)^5 - \frac{4}{3}(1)^3 + 5 = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} + 5 = \frac{12-20+75}{15} = \frac{67}{15}$$

11.4. Опуклість функції

Def. Будемо говорити, що функція $f(x)$ має на інтервалі (a,b)опуклість, спрямовану вниз, якщо всі крапки функції розташовані не нижче будь-якої дотичній функції на цьому інтервалі. Аналогічно функція має опуклість вгору, якщо її точки розташовані не вище будь дотичній (рисунок 11.6).

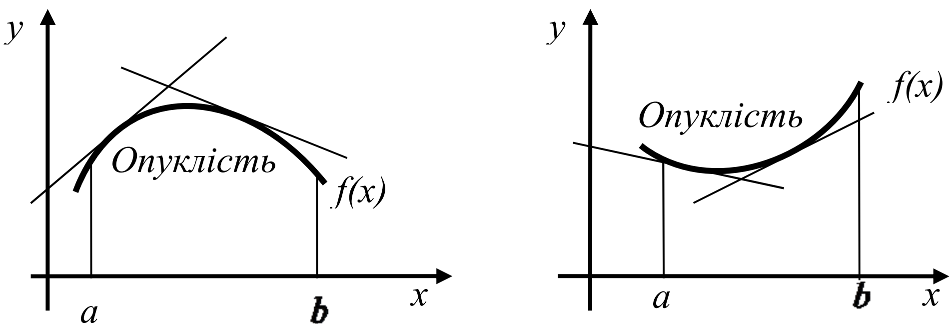


Рисунок 11.6

Th. Якщо функція на інтервалі(a,b) має невід'ємну другу похідну $f''(x) \geq 0$, То вона є опуклою вниз, якщо непозитивну $f''(x) \leq 0$ − опуклою вгору.

◄ Нехай на інтервалі (a,b)функція є опуклою вниз (рисунок 11.7). виберемо точку x_0 на цьому інтервалі і довільну точку x. Проведемо довільну дотичну σ до кривої через точку $(x_0, f(x_0))$ і запишемо її рівняння:

$$\sigma: \; y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Формула Тейлора для заданої функції щодо точки $(x_0, f(x_0))$ з точністю до другої похідної має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + 0(\Delta x^2).$$

Якщо розглядати різницю для x між кривою і дотичній, то знак цієї різниці залежить від знака другої похідної:

$$f(x) - y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + 0(\Delta x^2) -$$
$$- f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f(x) - y(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + 0\left(\Delta x^2\right).$$

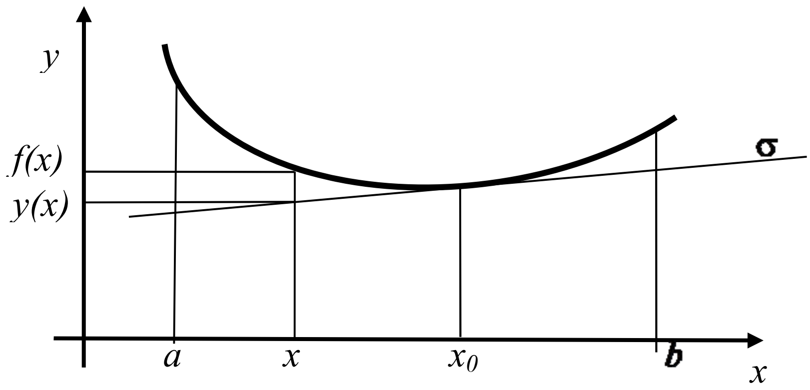


Рисунок 11.7

При $f''(x_0) \geq 0$ $f(x) - y(x) \geq 0$, Тобто точки кривої розташовані вище точок дотичної. Отже, на цьому інтервалі функція є опуклою вниз. ►

11.5. Точка перегину

Def. Точка функції, в якій змінюється опуклість функції, називається точкою перегину(рисунок 11.8).

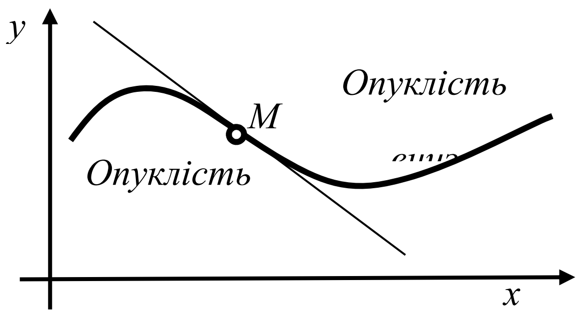


Рисунок. 11.8

Твердження (необхідна умова точки перегину). У точці перегину друга похідна функції дорівнює нулю: $f''(x) = 0$ **.**

Твердження (достатня умова точки перегину). Якщо друга похідна $f''(x)$ **при переході через точку** x_0 **, В якій вона дорівнює нулю (або не існує), змінює знак, то ця точка є точкою перегину.**

11.6. Друга достатня умова екстремуму

Th. Якщо в точці, підозрілої на екстремум $\left(f'(M)=0\right)$**, Друга похідна функції більше нуля, то це локальний мінімум, якщо менше нуля, то це локальний максимум:**

$$\exists M : f'(M)=0 \wedge f''(M)>0 \;\;\Rightarrow\;\; loc.min;$$

$$\exists M : f'(M)=0 \wedge f''(M)<0 \;\;\Rightarrow\;\; loc.max.$$

◀ Нехай функція $f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$ підозріла на екстремум, тобто $f'(x_0)=0$.

Формула Тейлора для заданої функції щодо точки $(x_0, f(x_0))$ з точністю до другої похідної має вигляд

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+0\left(\Delta x^2\right),\text{ де } 0\left(\Delta x^2\right)\to 0.$$

Але так як $f'(x_0)=0$, маємо

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

При $f''(x_0)>0$ маємо: для будь-якої точки x околиці x_0 $f(x)-f(x_0)>0$, Отже, x_0 - локальний мінімум.

При $f''(x_0)<0$ маємо: для будь-якої точки x околиці x_0 $f(x)-f(x_0)<0$, Отже, x_0 - локальний максимум. ▶

11.7. Асимптоти графіка функції

Def. Пряма лінія σ **називається асимптотою лінії** $f(x)$**, Якщо відстань від точки лінії** $f(x)$ **до прямої** σ **прямує до нуля при необмеженому видаленні цієї точки від початку координат** (рисунок 11.9).

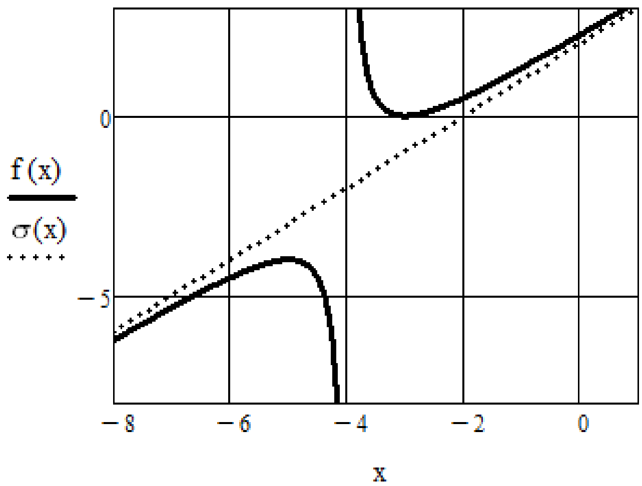


Рисунок 11.9

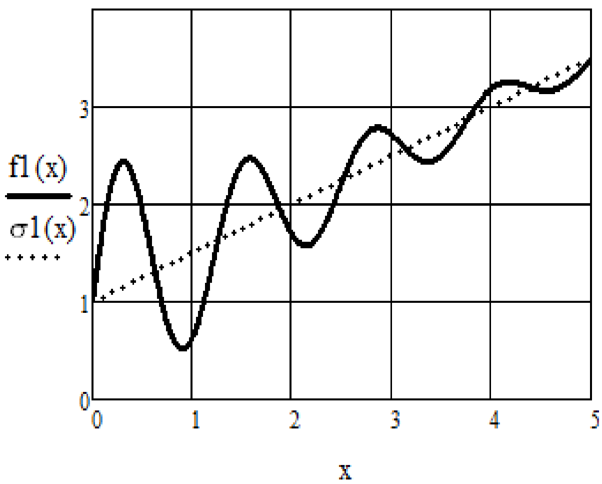


Рисунок 11.10

Зауваження. Крива може перетинати асимптоту (рисунок 11.10).

Розрізняють вертикальні і похилі асимптоти.

1. Вертикальні асимптоти.

Нехай $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту. Рівняння такої асимптоти:

$$x = x_0 .$$

згідно з визначенням $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Висновки. якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, То лінія $f(x)$ має асимптоту $x = x_0$. Отже, щоб знайти вертикальні асимптоти, потрібно знайти таку точку x_0, в якій $f(x) \to \pm\infty$.

2. Похилі асимптоти.

Def. пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою кривої $f(x)$, якщо

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k ,$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = b .$$

◀ За визначенням, якщо $y = kx + b$ - асимптота, то

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - y\right) = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (kx + b)\right) = 0 ;$$

$$f(x) - (kx + b) = 0 + \alpha(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x) = (kx + b) + \alpha(x) ;$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} ;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{kx + b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k ;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx - b\right) = 0 \;\Rightarrow\; b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right). \;\blacktriangleright$$

Слідство. Для горизонтальної асимптоти $k = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b .$$

ПРИКЛАД. Побудувати асимптоти функції $y = \dfrac{x^2}{|x-1|}$.

Рішення

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{|x-1|} = \infty$, тобто $x = 1$ − вертикальна асимптота.

2. При $x \to +\infty$

$$y(x) = \frac{x^2}{x-1} \;\Rightarrow\; k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 ,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Похила асимптота має вигляд $y=x+1$.

3. При $x\to-\infty$

$$y(x)=-\frac{x^2}{x-1}\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2-x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{x-1}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=-1.$$

Похила асимптота має вигляд $y=-x-1$.

Визначені асимптоти зображені на рисунку 11.11, асимптоти і сам графік функції - на рисунку 11.12.

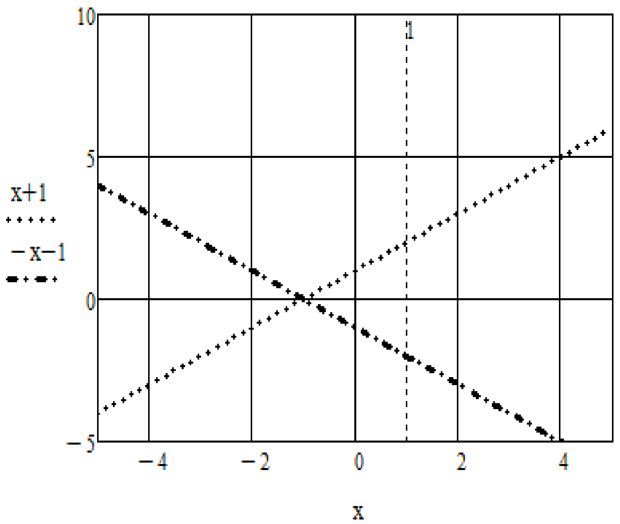


Рисунок 11.11

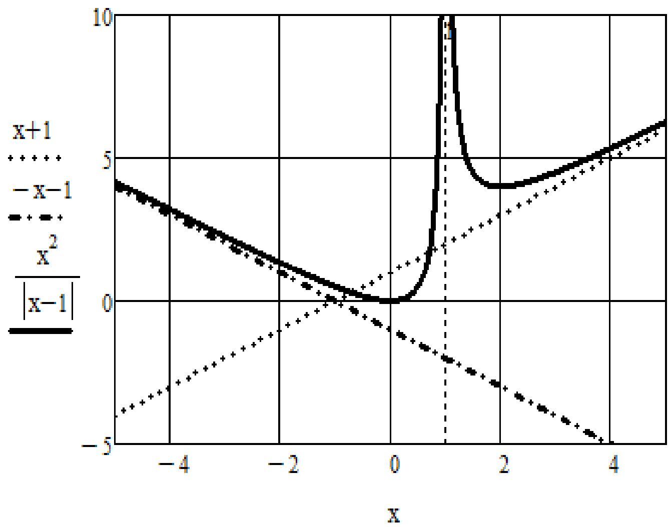


Рисунок 11.12

11.8. Висновки

Th. Якщо похідна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) не менш нуля:

$$f'(x)\geq 0,$$

то функція на цьому інтервалі не убуває.

Якщо похідна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) не більш нуля:

$$f'(x)\leq 0,$$

то функція на цьому інтервалі зростає.

Зауваження:

1. Якщо функція на інтервалі тільки зростає або тільки убуває, то її називають монотонно зростаючої або монотонно спадною.

2. Проміжок, на якому функція або зростає, або зменшується, називається проміжком монотонності.

3. Дотична на проміжку зростання функції утворює гострий кут з віссю Ox *, На проміжку убування - тупий.*

Def. нехай функції $f(x)$ ***визначена в безперервній околиці точки*** x_0 ***. число*** $f(x_0)$ ***називається локальним максимумом (мінімумом), якщо для будь-якої точки*** x ***околиці*** $U_\delta(x_0)$ ***виконується умова***

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

т. е. в Квантор це можна записати так:

$$f(x_0) - loc.max \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) \le f(x_0),$$

$$f(x_0) - loc.min \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) \ge f(x_0).$$

Def. $loc.max$ ***і*** $loc.min$ ***називають ще локальними екстремумами.***

Th. (Ферма). Якщо безперервна на інтервалі $(a,\ b)$ ***функція*** $f(x)$ ***має локальний екстремум в точці*** x_0 ***і існує похідна в цій точці, то ця похідна дорівнює нулю.*** *Це необхідна умова екстремуму.*

Твердження. *Якщо знак похідної* $f'(x)$ *безперервної функції* $f(x)$ *в околиці точки* x_0 *при переході через неї змінюється з позитивного на негативний, то в цій точці функція* $f(x)$ *має локальний максимум, якщо з негативного на позитивний - локальний мінімум.*

Зауваження:

1. Затвердження справедливо і для випадку, коли в точці x_0 *функція є недиференційованої, наприклад:* $f(x) = |x|$ *в точці* $x = 0$.

2. Для функції в заданій області можна виділити локальні екстремуми і найбільше та найменше значення функції. Не завжди вони збігаються.

Алгоритм знаходження локального екстремуму:

1. Знаходять x_i*, де* $f'(x_i) = 0$.

2. Вибирають $x_i \in D_f$ *(З області допустимих значень).*

3. Досліджують знак похідної на інтервалах точок x_i.

4. Виділяють ті точки x_i*, де знак похідної змінюється.*

5. Обчислюють значення функції в точках x_i*. Це і є значення локальних екстремумів.*

Def. Будемо говорити, що функція $f(x)$ ***має на інтервалі*** (a,b) ***опуклість, спрямовану вниз, якщо всі крапки функції розташовані не нижче будь-якої дотичній функції на цьому інтервалі. Аналогічно функція має опуклість вгору, якщо її точки розташовані не вище будь дотичній.***

Th. Якщо функція на інтервалі (a,b) ***має невід'ємну другу похідну*** $f''(x) \geq 0$***, то вона є опуклою вниз, якщо непозитивну*** $f''(x) \leq 0$ ***− опуклою вгору.***

Def. Точка функції, в якій змінюється опуклість функції, називається точкою перегину.

Твердження (необхідна умова точки перегину). У точці перегину друга похідна функції дорівнює нулю: $f''(x) = 0$.

Твердження (достатня умова точки перегину). Якщо в деякій точці знак другої похідної функції змінюється, то ця точка є точкою перегину.

Друге достатня умова екстремуму.

Th. Якщо в точці, підозрілої на екстремум $(f'(M) = 0)$***, Друга похідна функції більше нуля, то це локальний мінімум, якщо менше нуля, то це локальний максимум:***

$$\exists M : f'(M) = 0 \wedge f''(M) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; loc.min;$$

$$\exists M : f'(M) = 0 \wedge f''(M) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; loc.max.$$

Def. Пряма лінія σ ***називається асимптотой лінії*** $f(x)$***, Якщо відстань від точки лінії*** $f(x)$ ***до прямої*** σ ***прямує до нуля при необмеженому видаленні цієї точки від початку координат***.

Зауваження. Крива може перетинати асимптоту.

Розрізняють вертикальні і похилі асимптоти.

1. Вертикальні асимптоти.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$*, То лінія* $f(x)$ *має асимптоту* $x = x_0$.

2. Похилі асимптоти.

Def. Пряма $y = kx + b$ ***називається похилою асимптотою кривої*** $f(x)$***, якщо***

$$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\exists \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b.$$

11.9. Питання для перевірки

1. Якщо похідна функції на заданому інтервалі позитивна, то функція на цьому інтервалі:

а) монотонно не збільшується; б) монотонно не зменшується; в) постійна.

2. Якщо похідна функції на заданому інтервалі негативна, то функція на цьому інтервалі:

а) монотонно не збільшується; б) монотонно не зменшується; в) постійна.

3. Якщо функція на інтервалі тільки зростає, то її називають:

а) монотонно зростаючою; б) зростаючої; в) функція, яка збільшується.

4. Якщо функція на інтервалі тільки убуває, то її називають:

а) монотонно спадаючою; б) спадаючою; в) функція, яка зменшується.

5. Проміжок монотонності - це проміжок, на якому функція:

а) зростає або спадає; б) зростає; в) спадає.

6. Дотична на проміжку зростання функції:

а) утворює гострий кут з віссю Ox; б) утворює тупий кут з віссю Ox; в) паралельна осі Ox.

7. Дотична на проміжку спадання функції:

а) утворює гострий кут з віссю Ox; б) утворює тупий кут з віссю Ox; в) паралельна осі Ox.

8. Необхідна умова локального екстремуму:

а) похідна в точці локального екстремуму дорівнює нулю; б) похідна в точці локального екстремуму не дорівнює нулю; в) похідна в точці локального екстремуму не визначена.

9. Достатня умова локального екстремуму:

а) знак похідної в околі точки, підозрілої на екстремум, змінюється; б) похідна в околиці точки, підозрілої на екстремум, дорівнює нулю; в) похідна в околиці точки, підозрілої на екстремум, позитивна.

10. Якщо знак похідної $f'(x)$ безперервної функції $f(x)$ в околиці точки x_0 при переході через неї змінюється з позитивного на негативний, то в цій точці функція $f(x)$:

а) має локальний максимум; б) має локальний мінімум; в) дорівнює нулю.

11. Якщо знак похідної $f'(x)$ безперервної функції $f(x)$ в околиці точки x_0 при переході через неї змінюється з негативного на позитивний, то в цій точці функція $f(x)$:

а) має локальний максимум; б) має локальний мінімум; в) дорівнює нулю.

12. Чи збігаються в заданій області виділені локальні екстремуми і найбільше та найменше значення функції:

а) не завжди; б) збігаються; в) не збігаються?

13. Функція на інтервалі $[a,b]$ називається опуклою вгору:

а) якщо всі її точки на інтервалі $[a,b]$розташовані вище довільної дотичній точок цього інтервалу; б) якщо всі її точки на інтервалі$[a,b]$розташовані нижче довільної дотичній точок цього інтервалу; в) якщо всі її точки на інтервалі$[a,b]$ розташовані вище і нижче довільної дотичній точок цього інтервалу.

14. Функція на інтервалі $[a,b]$ називається опуклою вниз:

а) якщо всі її точки на інтервалі $[a,b]$розташовані вище довільної дотичній точок цього інтервалу; б) якщо всі її точки на інтервалі$[a,b]$розташовані нижче довільної дотичній точок цього інтервалу; в) якщо всі її точки на інтервалі$[a,b]$ розташовані нижче і вище довільної дотичній точок цього інтервалу.

15. Якщо функція на інтервалі (a,b) має не від'ємну другу похідну $f''(x) \geq 0$, То ця функція:

а) є опуклою вниз; б) є опуклою вгору; в) не має опуклості.

16. Якщо функція на інтервалі (a,b) має непозитивним другу похідну $f''(x) \le 0$, То ця функція:

а) є опуклою вниз; б) є опуклою вгору; в) не має опуклості.

17. Точка перегину - це точка, в якій:

а) змінюється опуклість функції; б) змінюється напрямок функції; в) змінюється монотонність функції.

18. У точці перегину друга похідна:

а) дорівнює нулю; б) позитивна; в) негативна.

19. Якщо в точці, підозрілої на екстремум $\left(f'(M)=0\right)$, Друга похідна більше нуля, то:

а) це локальний мінімум; б) це локальний максимум; в) функція дорівнює нулю.

20. Якщо в точці, підозрілої на екстремум $\left(f'(M)=0\right)$, Друга похідна менше нуля, то:

а) це локальний мінімум; б) це локальний максимум; в) функція дорівнює нулю.

21. Пряма лінія σ називається асимптотою лінії $f(x)$, Якщо відстань від точки лінії $f(x)$ до прямої σ при необмеженій видаленні цієї точки від початку координат:

а) прагне до нуля; б) прагне до нескінченності; в) постійно.

22. Чи може крива перетинати асимптоту:

а) може; б) не може; в) може перетинати тільки на нескінченності?

23. Чи бувають похилі асимптоти:

а) бувають; б) не бувають; в) тільки для алгебраїчних функцій?

24. Чи бувають вертикальні асимптоти:

а) бувають; б) не бувають; в) бувають тільки для раціональних функцій?

25. Асимптота графіка функції - це:

а) пряма, до якої прагне $f(x)$ при прагненні змінної x до нуля; б) пряма, яку перетинає $f(x)$ при видаленні змінної x на нескінченність; в) пряма, до якої прагне $f(x)$ при видаленні змінної x на нескінченність.

26. Запис виду $y = kx + b$ - це:

а) горизонтальна асимптота; б) похила асимптота; в) вертикальна асимптота.

27. Чи бувають горизонтальні асимптоти:

а) не бувають; б) бувають тільки для трансцендентних функцій; в) бувають?

28. Запис виду $y = b$ - це:

а) вертикальна асимптота; б) похила асимптота; в) горизонтальна асимптота.

29. Запис виду $x = x_0$ - це:

а) точка екстремуму; б) вертикальна асимптота; в) горизонтальна вісь симетрії.

30. параметричних задана функція - це:

а) функція, яка характеризується параметром; б) функція, залежна і незалежна змінні якої задані через допоміжний параметр;
в) функція, в якій замість x використовується параметр.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

Берман, Г. Н. Збірник завдань по курсу математичного аналізу: навч. посібник/ Г. Н. Берман. - СПб. : Професія, 2001. - 432 с.

Каплан, І. А. Практичні заняття з вищої математики. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох незалежних змінних: навч. посібник /І. А. Каплан. - Х.: Вид-во ХДУ, 1972. - 368 с.

Письмовий, Д. Т. Конспект лекцій з вищої математики: повний курс / Д. Т. Письменний. - М.: Айріс-прес, 2010. - 608 с.

Робочий зошит. Лінійна алгебра и аналітична геометрія / уклад. : І. В. Брісіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Х.: Харк. авіац. ін-т, 2007. - 140 с.

Робочий зошит. Диференційне числення Функції однієї та декількох змінніх / уклад. : І. В. Брісіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Х.: Харк. авіац. ін-т, 1998. - 184 с.

Збірник завдань з математики для втузів: навч. посібник / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, А. В. Єфімов та ін.; під ред. А. В. Єфімова та Б. П. Демидовича. - М.: Наука, 1993. - Ч. 1: Лінійна алгебра і основи математичного аналізу. - 464 с.

Фихтенгольц, Г. М. Курс диференціального й інтегрального числення: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. - М.: Наука, 2001. - Т. 1. - 616 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Бахмет Геннадій Костянтинович,
Головченко Олександр Васильович,
Ніколаєв Олексій Георгійович та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2
Математичний аналіз

(Українською мовою)

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2015
Підписано до видання 10.12.2015
Ум. друк. арк. 8,3. Обл.-вид. арк. 9,31. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001