МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

Конспект лекцій з курсу
«Елементарна математика»

Рівень вищої освіти: перший (молодший бакалавр)

Перший семестр: частина 2(після зміни розкладу)

Розробник: старший викладач каф. 405
Кальчук Н. Л

Харків «ХАІ» 2020

Лекція 7

Відношення та пропорції. Відсотки. Основні задачі на відсотки. Текстові задачі.

Відношення – частка від ділення двох дійсних чисел. Це число показує, у скільки разів одна величина більше другої, або яку частину одна величина складає від другої. Числа, що складають це відношення є його членами. Перший член – попередній, другий – наступний.

Приклади відношень: $2:7; \quad 0{,}3:\frac{1}{5}$.

Властивості відношення:

1) $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot n}{b\cdot n}$.

2) Відношення величин можна замінити відношенням чисел: 24 см$:4$ см $=24:4=6:1$.

3) Відношення великих чисел можна замінити відношенням менших чисел: $610:10=61:1$.

4) Відношення дробових чисел можна замінити відношенням цілих чисел: $\frac{7}{2}:\frac{6}{3}=\frac{21}{6}:\frac{12}{6}=21:12$.

5) Відношення можна замінити відсотками або відсотковим відношенням: $7:8=0{,}875=87{,}5\%$.

Рівність двох відношень називається **пропорцією** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Наприклад: 8 : 2 = 10 : 2,5 - пропорція.

Якщо значення лівого відношення у пропорції дорівнює правому, то пропорція правильна. При цьому члени: a і d - крайні члени пропорції, а b і c - середні члени пропорції.

$$a : b = c : d$$

Якщо пропорцію $a:b=c:d$ записати у вигляді $b:a=d:c$, то крайні члени будуть середніми, і навпаки.

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів пропорції, тобто якщо

$$a : b = c : d \quad \left(\text{або } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right), \text{ то } ad = bc.$$

Використовуючи основну властивість пропорції, можна знайти її невідомий член, якщо всі інші члени відомі.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $1)\ 4 : x = 5 : 12; \quad 2)\ \frac{2x}{3{,}5}=\frac{6}{7}$.

Розв'язання. 1) Маємо

$5x = 4\cdot 12;$

$5x = 48;$

$x = 48 : 5;$

$x = 9{,}6.$

2) Отримаємо

$2x\cdot 7 = 3{,}5\cdot 6;$

$14x = 21;$

$x = 21 : 14;$

$x = 1{,}5.$

Пряма і обернена пропорційність

Якщо дві змінні величини пов'язані між собою так, що при зменшенні (збільшенні) однієї з них, друга теж зменшується (збільшується) у стільки ж разів, то такі величини називають **прямою пропорційністю.**

Якщо ж дві при зменшенні (збільшенні) однієї величини друга збільшується (зменшується) у стільки ж разів, то вони називаються **обернено пропорційними**, а залежність між ними – **оберненою пропорційністю**.

Прямо пропорційними величинами є, наприклад: вартість товару і його кількість; шлях, пройдений тілом із сталою швидкістю і час; периметр квадрата і довжина його сторони тощо.

Середнє арифметичне n чисел – це сума цих чисел поділена на n, тобто на їх кількість. Наприклад, для двох чисел a і b середнім арифметичним є число $(a+b):2$.

Середнє геометричне n чисел – це корінь n степеня з добутку цих чисел. Наприклад, для двох чисел a і b середнім геометричним є число $\sqrt{ab}$.

При розв'язуванні задач на пропорційний поділ застосуйте такі правила:

1) Щоб поділити деяке число на частини, пропорційні даним числам, потрібно поділити його на суму цих чисел і знайдену частку послідовно помножити на кожне з них.

2) Щоб поділити деяке число на частини, обернено пропорційні даним числам, потрібно поділити його на прямо пропорційні оберненим числам.

Задачі на прямо пропорційні величини можна розв'язувати за допомогою пропорції.

Приклад. За 2,5 год. автомобіль проїхав 170 км. Яку відстань проїде автомобіль за 4,5 год., якщо швидкість його є сталою?

Розв'язання. Запишемо умову задачі схематично:

2.5 год. - 170 км;

4.5 год. - х км.

За умовою задачі запишемо пропорцію: $\frac{2,5}{4,5}=\frac{170}{x}$, та розв'яжемо утворене рівняння.

2,5х = 170 · 4,5;

2,5х = 765;

х = 306 км

Відповідь: 306 км проїде автомобіль за 4,5 год.

Задача. У 800 грамах розчину міститься 50 грамів солі. Скільки солі міститься у 240 грамах розчину?

Розв'язання

Нехай 800 г розчину – це 50 г солі, а 240 г розчину – це *х* г солі. Складемо і розв'яжемо таку пропорцію: $\frac{800}{240}=\frac{50}{x} \Leftrightarrow x=\frac{240\cdot 50}{800}=15$. Отже, 15 грамів солі міститься у 240 грамах розчину.

Відповідь: 15 г.

Відсотком називається сота частина якого-небудь числа. Відсоток позначається знаком «%». Якщо дане число взяти за одиницю, то 1% складає 0,01 цього числа, 10% складають 0,1 числа, 25% відсотків складають 0,25 числа, 50% складають 0,5 числа, 75% складають 0,75 числа і т.д. Щоб число відсотків виразити у вигляді дробу, треба число відсотків поділити на 100 ($n\%=\frac{n}{100}$). Наприклад, $6\%=\frac{6}{100}=0,06;\ 150\%=\frac{150}{100}=1,5;\ 0,4\%=\frac{0,4}{100}=0,004.$

Правило 1. Щоб знайти *р*% від числа *а,* потрібно *а* помножити на *р*/100.

Правило 2. Якщо *р*% від числа *с* дорівнює *а*, то число $c=\frac{a\cdot 100}{p}$.

Правило 3. Відсоткове відношення чисел a і c дорівнює $\frac{a}{c}\cdot 100\%$.

Задача 1. Знайти 40% від числа 80.(правило 1)

Розв'язання

40% від 80 знайдемо за правилом 1: $80\cdot 40/100=32$.

Задача 2. Хлопці у класі складають 75% від усієї кількості учнів. Дівчат у класі 8. Скільки всього учнів у класі?

Розв'язання

За умовою задачі хлопців у класі – 75%, тоді дівчат – 25%.(100% - 75%=25%) Скористаємось правилом 2 для обчислення кількості учнів у класі: $c=\frac{8\cdot 100}{25}=32$.

Відповідь: 32 учні.

Задача 3. Який відсоток становить число 28 від числа 35?

Розв'язання

За правилом 3 відсоткове відношення чисел 28 і 35 дорівнює $\frac{28}{60}\cdot 100\%=80\%$.

Всі 3 типи вище вказаних задач можна розв'язувати за допомогою пропорцій. Так, наприклад, задачу 2 можна було б розв'язати таким чином.

Якщо дівчат у класі 8 і це складає 25% всієї кількості, то нехай хлопців – x, що становить 75%. Складемо і розв'яжемо пропорцію: $\frac{8}{x}=\frac{25}{75}\Leftrightarrow x=\frac{8\cdot 75}{25}=24$. Отже, у класі 24 хлопці, тоді усіх учнів 24+8=32.

Відповідь: 32 учні.

Задача 4. Скільки кілограмів води варто додати до 7,5 кг 12%-го розчину солі, щоб одержати 10% розчин?

Розв'язання

Дізнаємось спочатку, скільки кілограмів солі міститься у 12% розчині. Для цього візьмемо масу 12%-го розчину 7,5 кг за 100%, масу солі в 12% – за x, тобто

7,5 кг – 100% або $\frac{7,5}{x}=\frac{100}{12}\Leftrightarrow x=\frac{7,5\cdot 12}{100}=0,9$.

x кг – 12%

Отже, 0,9 кг солі міститься у 12% розчині солі.

Маса солі у новому розчині не змінилась, а змінилась лише її відсоткова частка. Тобто 0,9 кг становить 10%. Натомість невідому масу нового розчину візьмемо за 100% і позначимо через y. Тобто y кг – 100%. Складемо і розв'яжемо пропорцію: $\frac{y}{0,9}=\frac{100}{10}\Leftrightarrow y=\frac{0,9\cdot 100}{10}=9$. Тобто 9 кг – маса нового розчину. Звідси, долили води 1,5 кг (9 кг-7,5 кг).

Відповідь: 1,5 кілограма.

Якщо відомо, що p% числа x дорівнює a, то число x можна знайти за формулою $x=a\cdot 100/p$. Наприклад, якщо 10% внеску в ощадбанк складають 250 доларів, то цей внесок дорівнює $250\cdot 100/10=2500$(доларів).

Якщо ставиться задача, що первісний внесок в ощадбанк дорівнює *a* доларів, за рік нараховується *p* відсотків, а потрібно обчислити суму внеску через *n* років, то використовуємо **формулу складних відсотків:** $s = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, де s – величина внеску через *n* років.

Приклад: Первісний внесок в ощадбанк дорівнює 500 доларів, за рік нараховується 4%. Знайти суму внеску через 5 років.

Розв'язання

$$s = 500\left(1+\frac{4}{100}\right)^5 = 500(1{,}04)^5 \approx 500 \cdot 1{,}217 \approx 608$$ (доларів).

Відповідь: $\approx$608 доларів.

Лекція 8
Числові послідовності (арифметична та геометрична прогресії).

Випишемо у порядку зростання додатні числа, кратні 3: 3; 9; 27; 81; 243;… Як бачимо, кожному натуральному числу n ставиться у відповідність певне число $x_n = 3n$; таким чином, маємо функцію, визначену на множині натуральних чисел (N).

Числова послідовність — це послідовність, членами якої є числа. Числа, які утворюють послідовність називають відповідно першим, другим, третім і т.д. членами послідовності. Члени послідовності прийнято позначати буквами з індексам, що відповідають порядковому номеру кожного члена.

Функцію, визначену на множині натуральних чисел (N), називають **числовою послідовністю.** Можна сказати інакше: **числовою послідовністю** називається впорядкована множина значень x_n зі зростаючими номерами на зразок натурального ряду чисел 1, 2, 3, …n.

Розглянемо два сусідніх члени послідовності з номерами k і $k + 1$, а саме a_k і a_{k+1}. Член a_{k+1} називають наступним за a_k, а член a_k називають попереднім по відношенню до a_{k+1}.

Числа, які утворюють послідовність, називаються **членами послідовності.** Позначається послідовність так: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ або (a_n). Послідовність, яка має скінченне число членів, називається **скінченною,** а послідовність, яка нескінченне число членів – **нескінченною.**

Послідовність двоцифрових натуральних чисел — скінченна, а послідовність квадрантів натуральних чисел — нескінченна.

Послідовність задають **алгебраїчним** способом (формулою n-го члена), **рекурентним** (указаним першим членом або кількома членами і формулою, що дозволяє визначити будь-який член послідовності), **словесним** (описом), **графічним** (сукупністю точок х натуральними абсцисами). Наведемо приклади послідовностей, заданих алгебраїчним способом: $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ $\quad a_n = (-1)^n$: $1, -1, 1, ..., -1, ...$

Послідовність двоцифрових натуральних чисел 10; 11; 12 ..., 98, 99 можна задати формулою

$$a_n = n + 9,$$

де $1 \le n \le 90$, n - натуральне число. Послідовність квадрантів натуральних чисел задаємо формулою n-го члена: $a_n = n^2$, де n - натуральне число.

Приклад. Послідовність задана формулою $c_n = n^2 + n$. Знайдіть перший, сьомий, і сотий члени цієї послідовності.

Розв’язання. Маємо $c_1 = 1^2 + 1 = 2$; $c_7 = 7^2 + 7 = 56$; $c_{100} = 100^2 + 100 = 10100$.

Скінченну числову послідовність можна задавати переліком її членів. Наприклад, (c_n): 1; 9; 5; 14. У цій послідовності: $c_1 = 1$; $c_2 = 9$; $c_3 = 5$; $c_4 = 14$.

Послідовність можна задавати описом її членів. Наприклад, послідовність чисел, що є натуральними дільниками числа 20, які взяті у порядку зростання: 1; 2; 4; 5; 10; 20.

Скінченну числову послідовність можна задати у вигляді таблиці. Наприклад

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c_n	-3	8	4	-2	11	3	-1	7	10

За цією таблицею можна, наприклад, визначити, що $c_1 = -3$; $c_4 = -2$; $c_9 = 10$.

Послідовність можна задавати, визначивши перший або кілька перших членів послідовності, а потім - формулу, за якою можна визначити інші члени послідовності через попередні. Тому формулу називають рекурентною, а спосіб задання послідовності - рекурентним.

Приклад 1. Знайдіть другий, третій та четвертий члени послідовності (x_n), заданої рекурентно: $x_1 = 2$; $x_{n+1} = x_n^2 - 1$.

Розв'язання. Маємо $x_2 = x_1^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$; $x_3 = x_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$; $x_4 = x_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$;

Приклад 2. Знайдіть третій, четвертий і п'ятий члени послідовності (y_n), заданої рекурентно: $y_1 = 1$; $y_2 = -4$; $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

Розв'язання. Маємо

$$y_3 = 2y_2 + y_1 = 2\cdot(-4) + 1 = -7;$$
$$y_4 = 2y_3 + y_2 = 2\cdot(-7) + (-4) = -18;$$
$$y_5 = 2y_4 + y_3 = 2\cdot(-18) + (-7) = -43.$$

Послідовність, кожний наступний член якої більший від попереднього, називається **зростаючою послідовністю**. Наприклад, 1, 2, 3, ….

Послідовність, кожний наступний член якої менший від попереднього, називається **спадною послідовністю**. Наприклад, -1, -2, -3, ….

Послідовність не зростаюча – це така послідовність, кожний наступний член якої не більший від попереднього. Наприклад, 12, 12, 10, 10, 8, 8, ….

Послідовність неспадна – це така послідовність, кожний наступний член якої не менший від попереднього. Наприклад, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6….

Зростаючі, спадні, не зростаючі, неспадні послідовності називаються **монотонними послідовностями.**

Послідовність називається **обмеженою,** якщо існує таке додатне число *M*, що для всіх членів послідовності виконується нерівність $|a_n| \le M$.

Стислий запис (a_n обмежена) $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall n \in N\ |a_n| \le M$.

Послідовність $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ обмежена, оскільки $\forall n \in N \left|\dfrac{n-1}{n+1}\right| \le 1$.

Послідовність $a_n = (-1)^n$ обмежена, оскільки $\forall n \in N \left|(-1)^n\right| \le 1$.

Не кожна послідовність є обмеженою. Наприклад, доведемо, що послідовність $a_n = n$ не є обмеженою. Припустимо, що послідовність $a_n = n$ обмежена, це означає, що $\exists M > 0\ \forall n \in N\ |n| \le M$. Однак, скажемо, для $n = [M] + 1$ ця нерівність не виконується. Отже, наше припущення невірне і $a_n = n$ не є обмеженою.

Послідовність, що не є обмеженою, називається необмеженою. Сформулюємо рівносильне цьому позитивне означення необмеженої послідовності.

Послідовність a_n називається необмеженою якщо для будь-якого числа *M* знайдеться такий номер *n*, що $|a_n| > M$. (a_n обмежена) $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall n \in N\ |a_n| > M$.

Якщо зобразити члени послідовності точками на координатній прямій, то всі члени обмеженої послідовності будуть лежати на деякому відрізку.

Для необмеженої послідовності поза будь-яким відрізком знайдуться члени цієї послідовності.

Арифметична прогресія – це числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого ще додали одне й те саме число.

Приклад арифметичної прогресії: 2; 5; 8; 11; 14 ... У розглянутій прогресії: $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 8$.

З означення арифметичної прогресії випливає, що різниця між будь-яким її наступним і попереднім членами дорівнює одному й тому самому числу, тобто $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} = ...$. Це число називається **різницею прогресії** і позначається буквою d.

Для того, щоб задати арифметичну прогресію (a_n) достатньо знати її перший член a_1 та різницю d.

Можна записати $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$... Отже, для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Звідси випливає, що $d = a_{n+1} - a_n$.

У розглянутому прикладі: $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Арифметична прогресія може бути **зростаючою**, **спадною** або **сталою**.

Якщо $d > 0$ арифметична прогресія зростає. Наприклад, у зростаючій прогресії 12, 15, 18, 21,… різниця дорівнює 3.

Якщо $d < 0$ арифметична прогресія спадає. Наприклад, у спадній прогресії 7, 5, 3, 1,… різниця дорівнює -2.

Якщо $d = 0$ арифметична прогресія стала. Наприклад, послідовність 4, 4, 4, 4,… є сталою арифметичною прогресією з різницею 0.

Послідовність (a_n) є арифметичною прогресією тоді і лише тоді, коли будь-який її член, починаючи з другого, є середнім арифметичним попереднього та наступного членів, тобто $a_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) : 2$, де $n \in N$. Ця властивість називається **характеристичною властивістю** арифметичної прогресії.

Арифметична прогресія визначається **рекурентною** формулою $a_n = a_{n-1} + d$.

Будь-який член арифметичної прогресії (a_n) можна знайти за формулою

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Маємо формулу n-го члена арифметичної прогресії.

Приклад 1. Послідовність (a_n) - арифметична прогресія, $a_1 = 18$; $d = -1,5$. Знайдіть п'ятнадцятий член цієї послідовності.

Розв'язання. $a_{15} = a_1 + d(15 - 1) = a_1 + 14d = 18 + 14 \cdot (-1,5) = -3$

Приклад 2. Чи містить арифметична прогресія 5; 8; 11 ... число: 1) 80; 2) 100?

Розв'язання. У прогресії $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$. Запишемо формулу n-го члена цієї прогресії: $a_n = 5 + 3(n - 1)$, тобто $a_n = 3n + 2$.

1) Число 80 є членом прогресії (a_n), якщо існує натуральне число n, при якому значення виразу $3n + 2$ дорівнює 80. Маємо рівняння $3n + 2 = 80$; $3n = 78$; $n = 26$. Отже, число 80 є двадцять шостим членом арифметичної прогресії: $a_{26} = 80$.

2) Міркуючи аналогічно, маємо $3n + 2 = 100$; $3n = 98$; $n = 32\frac{2}{3}$. Число $32\frac{2}{3}$ не є натуральним. Тому арифметична прогресія не містить число 100.

Приклад 3. Кубики покладено у ряди так, що у верхньому ряду 3 кубика, в кожному нижньому - на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому. У шостому ряду 13 кубиків. Скільки кубиків у третьому ряді?

Розв'язання. Оскільки в кожному нижньому ряду на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому, то числі, що виражають кількість кубиків по рядах, складають арифметичну прогресію.

Маємо $a_1 = 3$; $a_6 = 13$. Знайдемо спочатку d цієї прогресії, а потім третій член прогресії a_3. Отже, $a_6 = a_1 + d(6 - 1)$; $a_6 = a_1 + 5d$. Тоді

$13 = 3 + 5d$,

$5d = 10$;

$d = 2$.

Маємо $a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2 \cdot 2 = 7$. У третьому ряду 7 кубиків.

Розглянемо властивості арифметичної прогресії.

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5 \ldots$$

2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad \text{де } k < n,\ n = 2, 3, 4, 5 \ldots$$

3. Якщо k, l, p і s - натуральні числа, такі, що $k + l = p + s$, то

$$a_k + a_r = a_p + a_s.$$

4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де d і b - деякі числа.

5. Послідовність a_n, задана формулою n-го члена $a_n = dn + b$, де d і b - деякі числа, є арифметичною прогресією.

Позначимо через S_n суму перших n членів арифметичної прогресії:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Цю суму можна знайти за формулою

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Якщо у дану формулу замість a_n підставити вираз $a_1 + d(n - 1)$, то дістанемо ще одну формулу для обчислення

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Цією формулою зручно користуватись, якщо відомий перший член і різниця прогресії.

Приклад 1. Знайдіть суму перших дванадцяти членів послідовності (a_n), заданої формулою $a_n = -3n + 5$.

Розв'язання. Дана послідовність є арифметичною прогресією, бо її задано формулою $a_n = dn + b$, де $d = -3$, $b = 5$ (див. властивість 5). Маємо $a_1 = -3 \cdot 1 + 5 = 2$, $a_{12} = -3 \cdot 12 + 5 = -31$. Знайдемо S_{12} за формулою

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{2 + (-31)}{2} \cdot 12 = -174.$$

Приклад 2. Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3 = 5$; $a_7 = -3$.

Розв'язання. Оскільки $a_3 = a_1 + 2d$, то маємо $5 = a_1 + 2d$.

Аналогічно $a_7 = a_1 + 6d$; $-3 = a_1 + 6d$. Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 6d = -3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -a_1 - 2d = -5 \\ a_1 + 6d = -3 \end{cases}$$

$$4d = -8;$$

$$d = -2.$$

Тоді $a_1 = 5 + 4$; $a_1 = 9$. Знайдемо суму S_{30} за формулою

$$S_{30} = \frac{2a_1 + d(30-1)}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 9 - 2 \cdot 29}{2} \cdot 30 = -600.$$

Приклад 3. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, кратних 8, які не більше за 300.

Розв’язання. Натуральні числа, кратні 8, утворюють арифметичну прогресію: 8; 16; 24; 32; 40 ... Цю прогресію можна задати формулою $a_n = 8n$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії, виходячи з умови $a_n \le 300$. Маємо

$$S_n \le 300,$$
$$n = 37{,}5.$$

Отже, кількість членів прогресії, суму яких треба знайти, дорівнює 37. Маємо $a_1 = 8$; $a_{37} = 8 \cdot 37 = 296$. Тоді:

$$S_{37} = \frac{a_1 + a_{37}}{2} \cdot 37 = \frac{8 + 296}{2} \cdot 37 = 5624$$

З означення різниці арифметичної прогресії випливає, що $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$, тобто сума членів, рівновіддалених від кінців прогресії є величиною сталою.

Геометрична прогресія – це послідовність чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на деяке постійне для даної прогресії число, яке не дорівнює нулю.

Приклад геометричної прогресії: 3; 6; 12; 24; 48 ...

Члени геометричної прогресії прийнято позначати буквою b з індексом, що відповідає порядковому номеру кожного члена: b_1, b_2, b_3 ... , а знаменник буквою q.

У розглянутому прикладі $b_1 = 3$; $b_2 = 6$; $b_3 = 12$ ...

З означення геометричної прогресії випливає, що відношення будь-якого члена до попереднього членами дорівнює одному й тому самому числу, тобто $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = b_k : b_{k-1} = \dots$. Це число називається **знаменником прогресії** і позначається буквою q, причому $q \ne 0$.

Можна записати: $b_2 = b_1q$; $b_3 = b_2q$; $b_4 = b_3q$ ... Отже, для будь-якого натурального n виконується рівність $b_{n+1} = b_nq$. Звідси випливає, що $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, тобто знаменник геометричної прогресії можна знайти якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

У розглянутому прикладі $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{3} = 2$.

Для того, щоб задати геометричну прогресію (b_n) достатньо знати її перший член b_1 та різницю q.

Геометрична прогресія може бути **зростаючою**, **спадною**, **сталою** або **коливною** (**ні зростаюча, ні спадна**). Наприклад, числа 5, 10, 20, 40,… утворять зростаючу геометричну прогресію зі знаменником $q = 2$; числа 1; 0,1; 0,01,… утворять спадну геометричну прогресію зі знаменником $q = 0{,}1$. Послідовність 4, 4, 4, 4,… є сталою геометричною прогресією зі знаменником 1. Числа 2, -2, 2, -2,… утворять коливну геометричну прогресію зі знаменником $q = -1$.

Нехай для визначеності $b_1 > 0$, тоді маємо наступну класифікацію:

а) при $q > 0$ - монотонна геометрична прогресія: при $0 < q < 1$ - спадна, при $q > 1$ - зростаюча, при $q = 1$ - стала;

б) при $q < 0$ прогресія коливна.

Послідовність (a_n) є геометричною прогресією тоді і лише тоді, коли будь-який її член, починаючи з другого, є середнім геометричним попереднього та наступного членів, тобто $b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_n}$, де $n \in N$. Ця властивість називається **характеристичною властивістю** геометричної прогресії.

Геометрична прогресія визначається **рекурентною** формулою $b_n = b_{n-1} \cdot q$.

Будь-який член геометричної прогресії (b_n) можна знайти за формулою

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Це формула *n*-ого члена геометричної прогресії.

Приклад 1. Послідовність (b_n) - геометрична прогресія, b_1 = -81; q = 1/3. Знайдіть b_6.

Розв'язання. $b_6 = b_1q^{6-1} = b_1q^5 = -81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії (b_n), якщо b_7 = 3, b_9 = 12.

Розв'язання. I спосіб. Маємо $b_7 = b_1q^6 = 3$; $b_9 = b_1q^8 = 12$.

Тоді $\frac{b_1q^8}{b_1q^6} = \frac{12}{3}$; $q^2 = 4$; $q = 2$ або $q = -2$.

II спосіб. $\dots b_7, \xrightarrow{\times q} b_8, \xrightarrow{\times q} b_9 \dots$ Маємо $b_9 = b_7q^2$; $12 = 3q^2$; $q^2 = 4$; $q = 2$ або $q = -2$.

Розглянемо властивості геометричної прогресії.

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5 \dots$$

2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } k < n, n = 2, 3, 4 \dots$$

3. Якщо *k*, *l*, *p* і *s* - натуральні числа, такі, що $k + l = p + s$, то

$$b_k \cdot b_\ell = b_p \cdot b_s$$

Позначимо через S_n суму перших *n* членів геометричної прогресії:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n+1} + b_n.$$

Цю суму можна знайти за формулою

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Якщо відомий перший, *n*-й члени прогресії та її знаменник, то зручною є формула:

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}$$

З означення знаменника геометричної прогресії випливає, що $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots$, тобто добуток членів, рівновіддалених від кінців прогресії є величиною сталою.

Приклад 1. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії 3; -6; 12 ...

Розв'язання. I спосіб.

$b_1 = 3$, $b_2 = -6$; $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{3} = -2$.

Маємо $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot ((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = -63$

II спосіб. Відомо, що $b_1 = 3$, $q = -2$. Тоді $b_6 = b_1q^{6-1} = b_1q^5 = 3 \cdot (-2)^5 = -96$.

Маємо $S_6 = \frac{b_6q - b_1}{q - 1} = \frac{-96 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = -63$.

Приклад 2. Знайдіть суму перших семи членів геометричної прогресії (b_n), якщо b_2 = 3; b_5 = 81.

Розв'язання. Оскільки $b_2 = b_1q = 3$; $b_5 = b_1q^4 = 81$, то

$$\frac{b_1q^4}{b_1q} = \frac{81}{3}; \quad q^3 = 27; \quad q = \sqrt[3]{27}; \quad q = 3.$$

Тоді $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{3}{3} = 1$ і $S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = 1093$.

Якщо в геометричній прогресії |q| < 1, то її називають нескінченно спадною.

Границю суми її членів $S = \lim_{n \to \alpha} S_n$ називають сумою нескінченної геометричної прогресії. Цю суму обчислюють за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Приклад 1. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії 4; -1; $\frac{1}{4}$ …

Розв'язання. $b_1 = 4;\ b_2 = -1;\ q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$. Умова |q| < 1 виконується.

Отже,

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

Приклад 2. Другий член нескінченної прогресії зі знаменником |q| < 1 дорівнює 2, а сума прогресії дорівнює 8. Знайдіть перший член та знаменник прогресії.

Розв'язання. За умовою $b_2 = 2$; $S = 8$. Звідси, виразивши b_2 і S через b_1 і q дістанемо систему:

$$\begin{cases} b_1 q = 2 \\ \frac{b_1}{1 - q} = 8 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 = \frac{2}{q} \\ \frac{2}{q(1 - q)} = 8 \end{cases}$$

Маємо $2 = 8q(1 - q)$; $4q^2 - 4q + 1 = 0$; $q = \frac{1}{2}$. Тоді $b_1 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

За допомогою суми нескінченної геометричної прогресії можна записувати нескінченні десяткові періодичні дроби у вигляді звичайних.

Приклад 1. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб 0,(2) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Оскільки 0,(2) = 0,222..., то нескінченний періодичний дріб можна записати у вигляді суми:

0,(2) = 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + ...

Доданки 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002 ... — члени нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 0,2, а знаменник $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$ (умова |q| < 1 виконується). Сума цієї прогресії

$$S = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}2}{0{,}9} = \frac{2}{9}.$$

Отже, 0,(2) = $\frac{2}{9}$.

Приклад 2. Знайти нескінченний десятковий періодичний дріб 3,2(18) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання.

3,2(18) = 3,2181818... = 3,2 + 0,018 + 0,00018 + 0,0000018 + ...

Доданки 0,018; 0,00018; 0,0000018 ... — члени нескінченної арифметичної прогресії, перший член дорівнює 0,018, а знаменник $q = \frac{0,00018}{0,018} = 0,01$ (умова |q| < 1 виконується). Сума цієї прогресії

$$S = \frac{0,018}{1-0,01} = \frac{0,018}{0,99} = \frac{18}{990} = \frac{1}{55}.$$

Тому $3,2(18) = 3,2 + \frac{1}{55} = 3\frac{1}{5} + \frac{1}{55} = 3\frac{12}{55}$. Отже, $3,2(18) = 3\frac{12}{55}$.

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
1. (a_n) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3$	1. (b_n) $b_1 = 5$, $b_n = b_1 \cdot 3$
2. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = d$ d — різниця прогресії	2. $b_2/b_1 = b_3/b_2 = b_4/b_3 = \ldots = b_{n+1}/b_n = q$, *де* q — знаменник прогресії
3. a, d, $a_{n+1} = a_n + d$	3. $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$
4. $d > 0$, $d < 0$, $d = 0$	4. $q > 0$, а) $0 < q < 1$, б) $q > 1$, $q < 0$
5. Характеристична властивість $a_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) : 2$	5. Характеристична властивість $b_n = \sqrt{b_{n+1} \cdot b_n}$
6. $a_n = a_1 + d(n-1)$	6. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
7. $S_n = n(a_1 + a_n) : 2$	7. $S_n = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$

Лекція 9

Функції. Лінійні, квадратичні, степеневі, показникові та логарифмічні функції, їхні основні властивості. Складена функція. Графіки елементарних функцій.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної y, то таку залежність називають **функціональною залежністю**, або **функцією**. При цьому змінну x називають **незалежною змінною** або **аргументом**, змінну y - **залежною змінною** або **функцією від аргументу**.

Значення змінної y, якого вона набуває за деякого певного значення x, називають **значенням функції** і записують: $y = f(x)$. Буквою f позначаємо дану функцію, тобто функціональну залежність між змінними x та y.

Найчастіше функції задають формулами, наприклад,

$$y = \frac{2x-3}{7}; \qquad y = 4x^2 - 5x + 1; \qquad y = \sin x; \qquad y = \log_3 x - 9$$

тощо.

Приклад. Функцію задано формулою $y = 10/(x + 2)$. Знайти:

1) значення функції, що відповідає аргументу, що дорівнює -4;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 2.

Розв'язання. 1) За умовою $x = -4$, тоді маємо $y = 10/(-4 + 2)$; $y = -5$.

2) Щоб знайти x, при якому $y = 2$, розв'яжемо рівняння $2 = 10/(x + 2)$; $x + 2 = 5$; $x = 3$. Отже, значення $y = 2$ функція набуває при $x = 3$.

Усі значення, які може набувати незалежна змінна (аргумент) утворюють **область визначення функції**. Область визначення функції ще називають **областю допустимих значень функції**. Область визначення функції позначають $D(y)$.

Приклад. Знайдіть область визначення функції:

$$1)\ y = \frac{4}{x-3}; \qquad 2)\ y = \sqrt{x+2}.$$

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі значення х, при яких має зміст дріб $4/(x - 3)$.

Знайдемо ті значення x, при яких знаменник дробу дорівнює нулю: $x - 3 = 0$, $x = 3$. Отже, областю визначення функції є всі числі крім 3. Коротко це можна записати так: $x \neq 3$.

2) Область визначення функції - всі значення x, при яких має зміст вираз $\sqrt{x+2}$. Тому область визначення знаходимо з умови $x + 2 \geq 0$, тобто $x \geq -2$. Можна записати: $D(y) = [-2;+\infty]$.

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**.

Область значення функції позначають $E(y)$.

Приклад. Знайдіть область значення функції: $1)\ y = 2 - |x|$; $\quad 2)\ y = \sqrt{x^2+9} + 1$.

Розв'язання. 1) Оскільки $|x| \geq 0$, то $-|x| \leq 0$, а тому $2 - |x| \leq 2$, тобто $y \leq 2$. Отже, проміжок $(-\infty;2]$. Область значень функції, тобто $E(y) = (-\infty;2]$.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x, то $x^2 + 9 \geq 9$ і $\sqrt{x^2+9} \geq 3$. Тому $\sqrt{x^2+9} + 1 \geq 4$, а, отже, $y \geq 4$. Маємо $E(y) = [4;+\infty)$.

Числова функція – це залежність, при якій кожному числовому значенню x з множини X області визначення функції ставиться у відповідність певне єдине число y.

Щоб задати функцію, треба вказати спосіб, за допомогою якого для кожного значення аргументу можна знайти відповідне значення функції.

На практиці зручно використовувати **табличний спосіб** задання функції. Для цього складається таблиця, у якій наводяться певні значення аргумента $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ і відповідні їм значення функції $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$. Прикладами табличного задання функції є таблиця квадратів, таблиця кубів, таблиця квадратних коренів, таблиці тригонометричних функцій тощо.

Табличний спосіб задання функції часто застосовується у природознавстві та техніці, де результати експерименту записують зазвичай до таблиці. Наприклад, при дослідженні залежності величини сталого току *I* від величини напруги *U* за умови, що спільний опір *R* є величина стала, одержано таблицю:

U (вольт)	3	6	9	12	15	18	21
I (ампер)	1	2	3	4	5	6	7

Ця таблиця встановлює функціональну залежність *I* = *f*(*U*) і може бути записана формулою $I = \frac{U}{R}$ (закон Ома).

Приклад. Починаючи з восьмої години до тринадцятої години, через одну годину вимірювали атмосферний тиск і дані записували в таблицю:

Час *t*, год.	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск *p*, мм рт.ст.	752	753	755	753	752	751

Таблиця задає відповідність між годинами *t* доби і атмосферним тиском *p*. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної і відповідає одне значення змінної *p*. У цьому прикладі *t* є незалежною змінною, а *p* — залежною змінною. Область визначення функції утворюють числа: 8, 9, 10, 11, 12, 13 (числа першого ряду таблиці), а область значень 751, 752, 753, 755 (числа другого ряду таблиці).

Перевага табличного способу полягає в простоті знаходжень значень функції за значеннями аргументу. Однак таблиця не дає повного уявлення про зміни значень функції при зміні значень аргументу. Окрім того, при визначенні значення функції за значеннями аргументу, не вказаними у таблиці, без розрахунків не обійтись. До недоліків цього способу слід віднести також відсутність достатньої наочності.

Тому найбільш уживаним є спосіб задання функції за допомогою формули $y = f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз зі змінною *x*. у такому випадку кажуть, що функція задана **формулою**, або **аналітично**.

Для аналітично заданої функції не завжди явно вказують область визначення, у такому випадку вважають, що область визначення функції $y = f(x)$ збігається з областю визначення виразу $f(x)$, тобто з множиною тих значень *x*, при яких вираз $f(x)$ має зміст.

Аналітичний спосіб задання функції має такі переваги: компактність задання, можливість обчислення *y* для будь-якого *x*, можливість застосування апарату математичного аналізу для дослідження. До недоліків цього способу можна віднести: недостатню наочність, можливу складність обчислення.

Функція може бути задана й своїм графіком. Такий спосіб називається **графічним**.

Графіком функції $y = f(x)$ називається геометричне місце точок площини, декартові координати яких задовольняють співвідношенню $y = f(x)$.

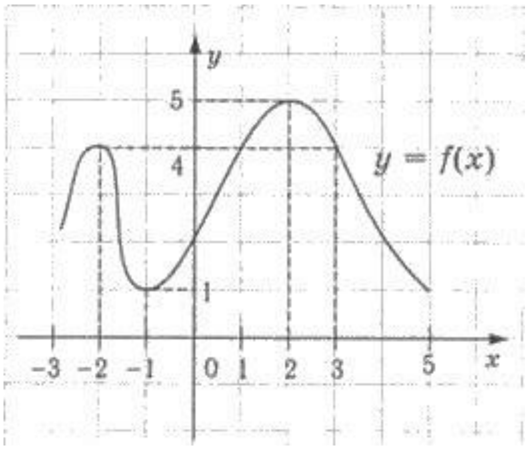
Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Надалі будемо розглядати графіки різних функцій: лінійних, квадратних, степеневих тощо.

Приклад. На малюнку 1 функція $y = f(x)$ задана графіком на проміжку [-3;5]. За допомогою графіка знайти:

1) значення функції, якщо *x* = -1; *x* = 2;

2) значення аргументу, якому відповідає значення функції *y* = 4.



мал. 1

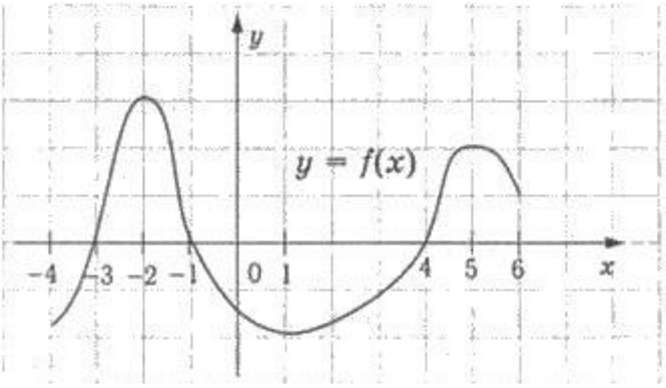
Розв’язання.

1) якщо x =-1, то y = 1; якщо x = 2, то y = 5.

2) якщо y = 4, то x = -2 або x = 3.

Нуль функції - значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.

Якщо відомий графік функції (або функція задана графічно), то нуль функції — це абсциси того ж перетину графіка функції з віссю x. Для функції $y = f\left(x\right)$, що задана графічно на малюнку 2 нулями є x = -3; x = -1 і x = 4.



мал. 2

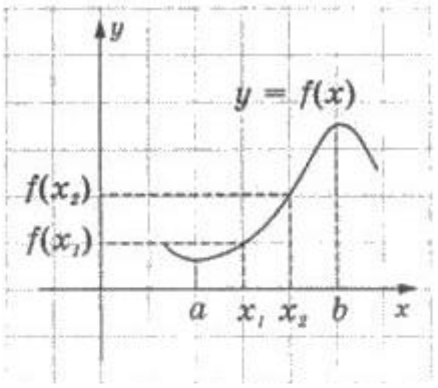
Якщо функція задана формулою $y = f\left(x\right)$, то її нулями є розв’язки рівняння $f(x) = 0$.

Приклад. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 5x + 6$.

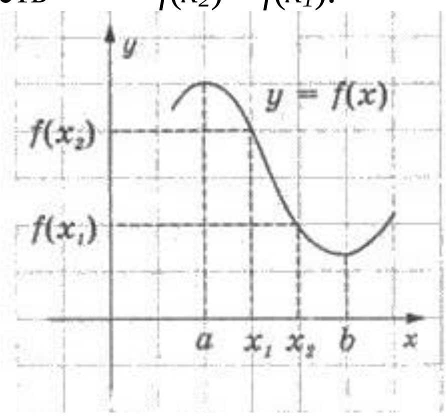
Розв’язання. Маємо $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ - нулі функції.

Функцію $y = f\left(x\right)$ називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

На малюнку 3 зображено графік функції $y = f\left(x\right)$, що зростає на проміжку [a; b] (проміжок [a; b] при цьому називають проміжком зростання функції). Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких , що $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.



мал. 3



мал. 4

Функцію $y = f\left(x\right)$ називають **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

На малюнку 4 зображено графік функції $y = f(x)$, що спадає на проміжку [a; b] (проміжок [a; b] при цьому називають проміжком спадання функції).

Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Інтервали зростання і спадання функції називаються **інтервалами монотонності**, а функція в такому інтервалі – **монотонною**.

Приклад 1. Для функції $y = f(x)$, що задана графічно на малюнку 3 проміжки зростання: [-4; -2] і [1; 5], проміжки спадання: [-2; 1] і [5; 6].

Точку x_0 називають **точкою максимуму** функції $y = f(x)$, якщо для осі x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Значення функції в точці максимуму називають **максимумом функції**. На малюнку 3 $x = b$ - точка максимуму функції, а на малюнку 4 $x = a$ - точка мінімуму функції.

Точку x_0 називають **точкою мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Значення функції в точці мінімуму називають **мінімумом функції**. На малюнку 3 $x = a$ - точка мінімуму функції, а на малюнку 4 $x = b$ - точка максимуму функції.

Приклад 2. Для функції $y = f(x)$ (мал. 2), що задана графічно на проміжку [-4; 6]: $x = 1$ - точка мінімуму, це записують так $x_{min} = 1$; $y_{min} = x(1) = -2$ - мінімум функції. У функції дві точки максимуму $x = -2$ і $x = 5$. Це записують $x_{max} = -2$, $x_{max} = 5$, $y_{max} = (-2) = 3$, $y_{max} = y(5) = 2$ — максимум функції.

Функцію, що приймає кожне своє значення в єдиній точці області визначення називають оборотною.

Наприклад, функція $y = 2x + 5$ є оборотною. Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною на множині R, оскільки, наприклад, значення 9 функція приймає в двох точках 3 і -3.

Нехай $y = f(x)$, де $f(x)$ - оборотна функція. Із рівності $y = f(x)$ як із рівняння знайдемо (якщо це можливо) x: $x = g(y)$. Цю функцію $x = g(y)$ називають **оберненою** до функції $f(x)$. Оскільки у шкільній математиці прийнято позначати аргумент через x, а функцію через y, то остаточно маємо $y = g(x)$.

Приклад. Для функції $f(x) = 2x + 5$ знайти обернену.

Розв’язання. Маємо $y = 2x + 5$, виразимо x через y: $2x = y – 5$, $x = (y - 5)/2$.Позначимо аргумент через x, а функцію - через y і остаточно отримаємо $y= (x - 5)/2$ або $g(x)=(x - 5)/2$.

Область визначення функції $y = f(x)$ будемо називати **симетричною** відносно нуля, якщо разом із кожним числом x область визначення містить також і число $(-x)$. Серед функцій із областю визначення, симетричною відносно нуля, розрізняють **парні** і **непарні**.

Функцію $y = f(x)$ називають **парною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Приклад 1. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^4$.

Розв’язання. $D(f) = (-\infty;+\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, то функція парна.

Корисною може бути **властивість парної функції**: графік будь-якої парної функції симетричний відносно осі y.

Функцію $y = f(x)$ називають **непарною**, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного x з області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Приклад 2. Дослідити на парність функцію $f(x) = 10/-x$.

Розв’язання. $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Оскільки $f(-x) = 10/-x = -f(x)$, то функція непарна.

Корисною є **властивість непарної функції**: графік будь-якої непарної функції симетричний відносно початку координат.

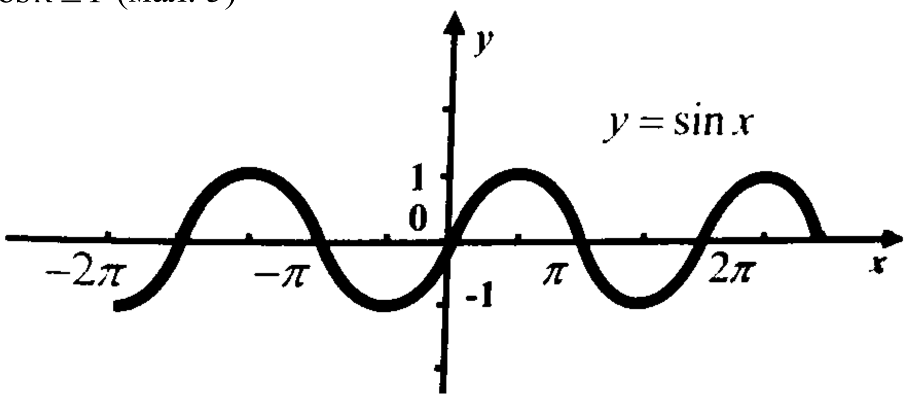
Приклад 3. Дослідити на парність функцію $f(x) = 1/(x - 2)$.

Розв’язання. $D(f) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$. Область визначення не симетрична відносно нуля, оскільки значення $x = -2$ належить області визначення, а значення $x = 2$ - не належить. Тому функція ні парна, ні не парна.

Приклад 4. Дослідити на парність функцію $f(x) = x^2 - x$.

Розв’язання. $D(f) = (-\infty;+\infty)$. Область визначення симетрична відносно нуля. Обчисліть $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x = -(-x^2 - x)$. Обчисліть $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ні парна, ні не парна.

Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою на деякій множині**, якщо існують числа A і B, що для всіх значень аргументу з цієї множини виконується умова $A \leq f(x) \leq B$. Наприклад, функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ – обмежені для всіх дійсних x, оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$ та $-1 \leq \cos x \leq 1$ (мал. 5)



мал. 5

Інколи зручніше використовувати так зване симетричне означення.

Згідно з ним, функція $y = f(x)$ називається **обмеженою**, якщо існує таке додатне число C, що для всіх x виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

$$\left(f(x) - \text{обмежена}\right) \Leftrightarrow \left(\exists C > 0\ \forall x \in D(y) \left|f(x)\right| \leq C\right).$$

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції числа $x + T$ та $x - T$ також належать області визначення і виконується умова $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Іншими словами, періодична функція – це функція, значення якої повторюються через деякий проміжок. Такі функції описують періодичні процеси, які часто зустрічаються в природі, а також у технічних задачах. Наприклад, рух маятника описується саме періодичними функціями.

Період функції – це таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції $y = f(x)$, числа $x + T$ та $x - T$ також належать області визначення й виконується умова $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

При дослідженні функцій і побудови графіків важливим є знаходження найменшого додатного періоду.

Серед функцій, які розглядаються у школі, періодичними є тригонометричні функції.

Найменший додатний період функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ дорівнює 2π, а функцій $y = \text{tg}\, x$ і $y = \text{ctg}\, x$ дорівнює π.

Також можна знайти найменший додатній період функції $y = f(ax + b)$, де f - одна з тригонометричних функцій.

Найменший додатній період функцій $y = \sin(kx + b)$ і $y = \cos(kx + b)$ дорівнює $2\pi/|k|$, а функції $y = \text{tg}(kx + b)$ і $y = \text{ctg}(kx + b)$ дорівнює $\pi/|k|$.

Приклад. Знайдіть найменший додатній період функції

$$1)\, y=\sin\left(\frac{\pi}{8}-4x\right);\quad 2)\, y=tg\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{9}\right)$$

Розв'язання.

$$1)\, T=\frac{2\pi}{|-4|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};\quad 2)\, T=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=3\pi.$$

Нехай задані дві функції $y=f(u)$ і $u=g(x)$, де G - область визначення f, а D – область визначення g, і нехай кожному x з D відповідає за допомогою функції g значення u, яке належить G. Тоді функція виду $y=f(g(x))$ називається **композицією** функцій f і g. Її називають також **складеною функцією**, або **функцією від функції**.

Функція $y=2^{\sin x}$ складена функція: $y=2^u, u=\sin x, x\in R$. Можливою є складена функція, в утворенні якої беруть участь n функцій: $y=f_1\left(f_2\left(f_3\left(...\left(f_n(x)\right)...\right)\right)\right)$.

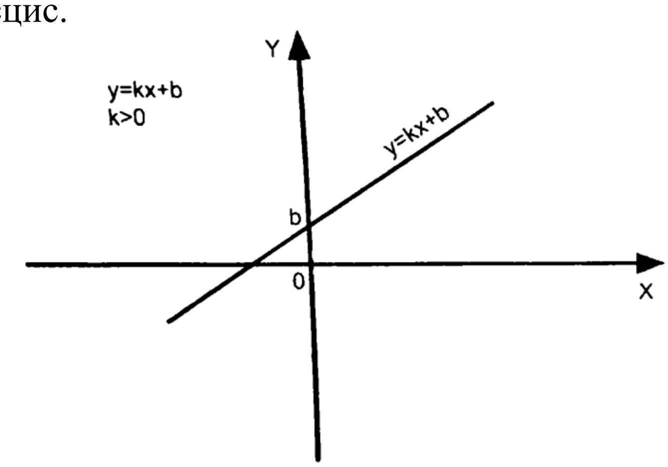
Функція $y=\sqrt{1-x^2}$ є композицією трьох функцій $y=\sqrt{u}, u=1-t, t=x^2$. Оскільки функція $y=\sqrt{u}$ визначена тільки для $u\geq 0$, то функція $y=\sqrt{1-x^2}$ визначена для таких x, які задовольняють нерівності $1-x^2\geq 0$, тобто $-1\leq x\leq 1$, значить, $D(y)\ =[-1,1]$.

Лінійна функція

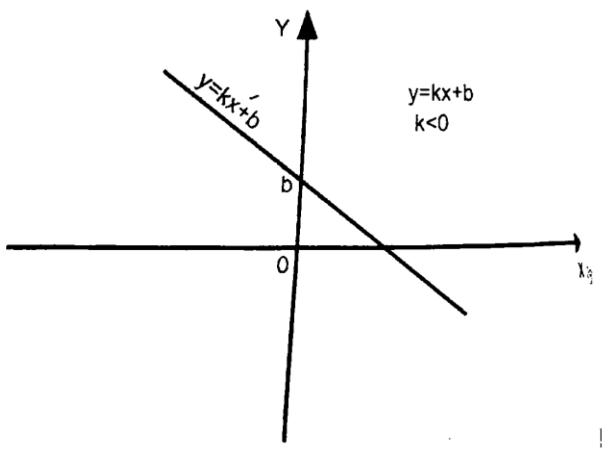
Лінійна функція – це функція, яку можна задати формулою $y=kx+b,$ де x - незалежна змінна, k і b - числа. Якщо $b=0$, маємо пряму пропорційність, причому число k називається коефіцієнтом пропорційності. Графіком лінійної функції є пряма. Властивості лінійної функції $y=kx+b$:

1) Область визначення і область значень – усі дійсні числа ($D(y)\in R, E(y)\in R$).
2) Функція ні парна, ні непарна $y(-x)=k(-x)+b=-kx+b=-(kx-b)$.
3) Якщо $k>0$, то функція зростає на всій області визначення (мал. 6); якщо $k<0$, то функція спадає на всі області визначення (мал. 7).
4) Якщо $b=0$, то пряма проходить через початок координат (мал. 8); якщо $k=0$, то пряма паралельна осі Ox (мал. 9)

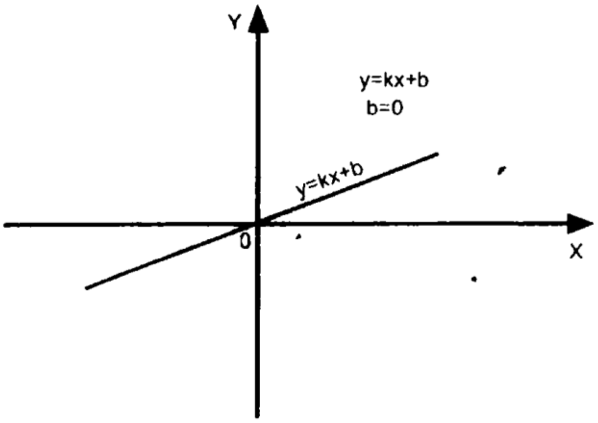
Для побудови графіка лінійної функції достатньо дві точки. Число k називається кутовим коефіцієнтом прямої, воно дорівнює тангенсу кута між прямою та додатним напрямком осі абсцис.



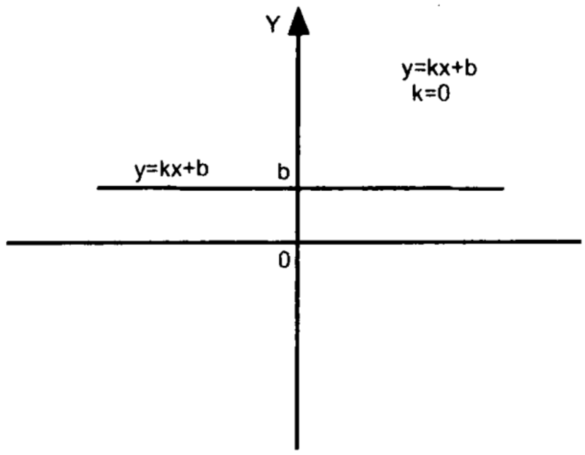
мал. 6



мал. 7



мал. 8



мал. 9

Приклади лінійних функцій:

$$y = 2x - 5; \quad y = -\frac{1}{3}x; \quad y = 4; \quad y = 0{,}7x - 2$$

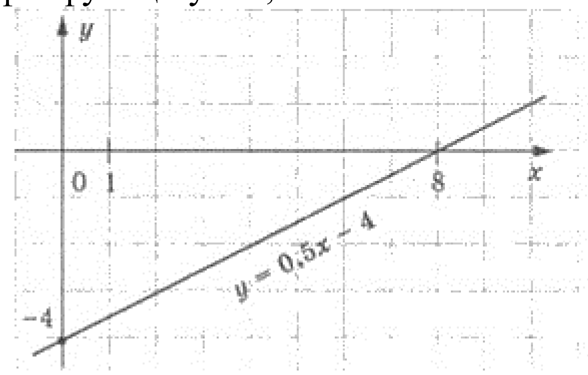
тощо.

Приклад 1. Побудувати графік функції у = 0,5*x* - 4.

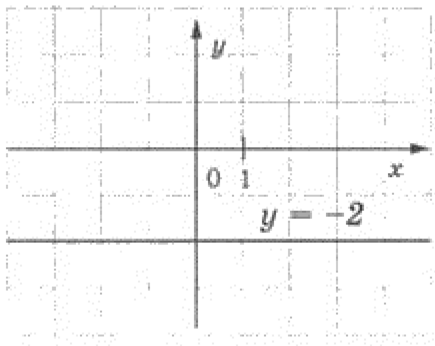
Розв'язання. Складемо таблицю для двох яких-небудь значень аргументу.

x	0	8
y	-4	0

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 10) та проведемо через них пряму. Дістали графік функції у = 0,5*x* - 4.



мал. 10



мал. 11

Якщо $k = 0$, то формула $y = kx + b$, якого задана лінійна функція набуває вигляду $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Лінійна функція задана формулою $y = b$, набуває одне й те саме значення при будь-якому x.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = -2$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -2. Графіком функції є пряма, що утворена точками з координатами (x; -2), де x - будь-яке число. Позначимо будь-які дві точки з ординатами -2, наприклад (-4; -2) і (3; -2) і проведемо через них пряму (мал. 11). Ця пряма є графіком функції $y = -2$. Зауважимо, що вона паралельна осі Ox.

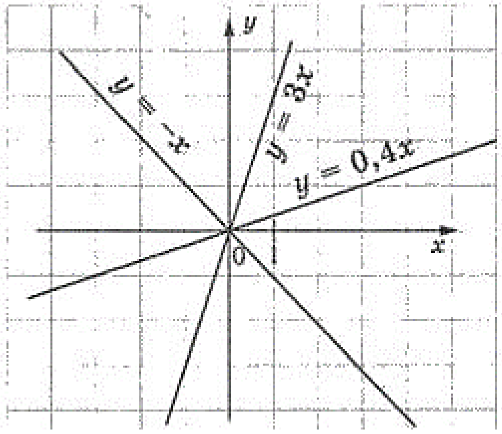
Взагалі, щоб побудувати графік функції $y = b$, досить позначити на осі y точку з координатами (0; b) та провести через цю точку пряму, паралельну осі Ox.

Пряма пропорційність.

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x - незалежна змінна, k - число відмінне від нуля, називають **прямою пропорційністю**.

Зауважимо, що графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат, причому якщо $k > 0$, то пряма розташована у I та III координатних чвертях, а якщо $k < 0$, а якщо $k = 0$, то пряма розташована у II та IV.

На малюнку 12 зображено графіки функцій $y = 3x$; $y = -x$ і $y = 0{,}4x$.



мал. 12

Обернена пропорційність

Обернена пропорційність — це функція, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, а число $k \neq 0$. Графіком оберненої пропорційності є гіпербола, асимптотами (прямими до яких графік функції нескінченно наближується, однак ніколи не перетинає) якої є осі координат. Число k називається **коефіцієнтом оберненої пропорційності.**

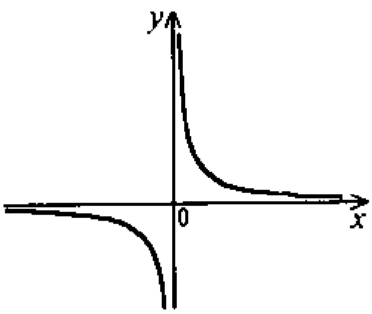
Властивості функції $y = \frac{k}{x}$:

1) Область визначення і область значень — усі дійсні числа, крім 0 .

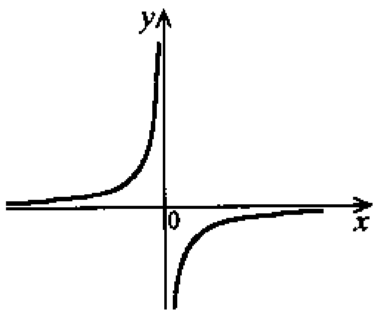
2) Функція непарна: $y(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -y(x)$.

3) Якщо $k > 0$, то функція спадає на всій області визначення (мал. 13); якщо $k < 0$, то функція зростає на всій області визначення (мал. 14).

4) Якщо $k > 0$, то вітки графіка функції розташовані в I і III чверті (мал. 13). Якщо $k < 0$, то вітки графіка функції розташовані в II і IV чверті (мал. 14).



мал. 13



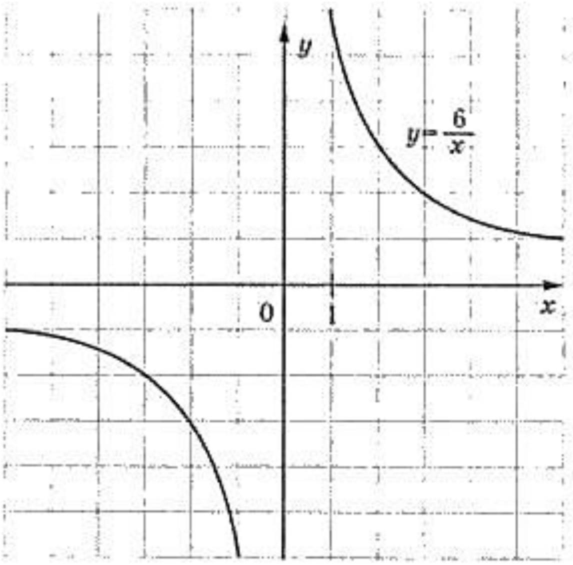
мал. 14

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

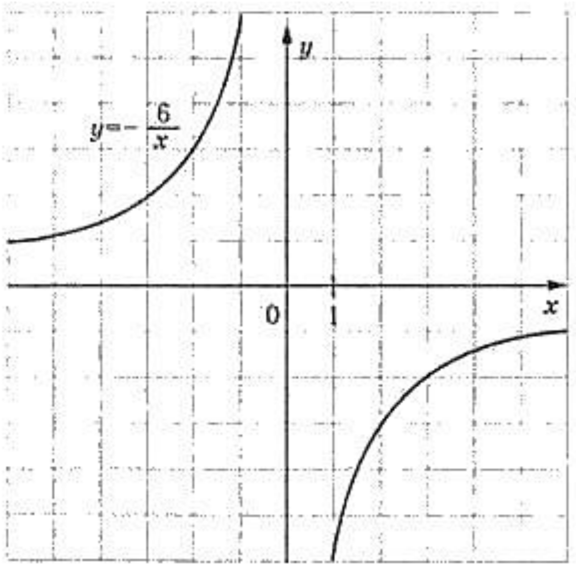
Розв’язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

Позначимо ці точки на координатній площині та з’єднаємо плавними лініями точки кожної з віток гіперболи (мал. 15).



мал. 15



мал. 16

Приклад 2. Побудуємо графік функції $y=-\frac{6}{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y=-\frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

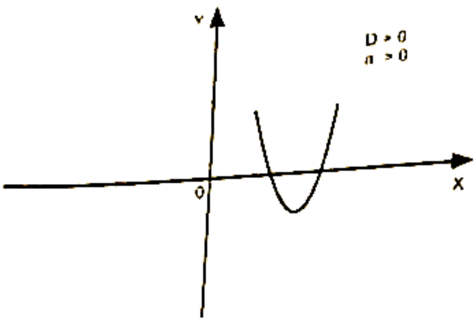
Графік функції зображено на малюнку 16.

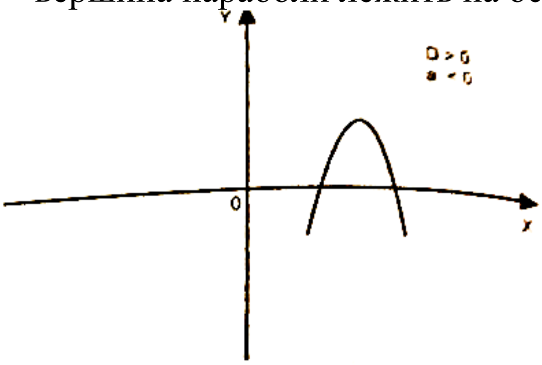
Квадратична функція

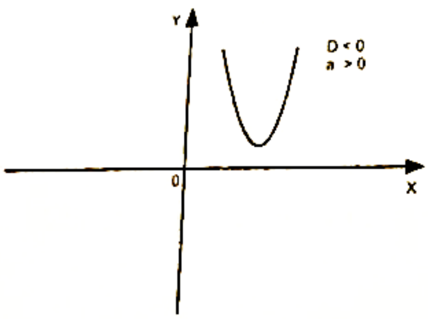
Квадратична функція — це функція, яку задано формулою $y=ax^2+bx+c$, де a,b,c — дійсні числа, причому $a\neq 0$.

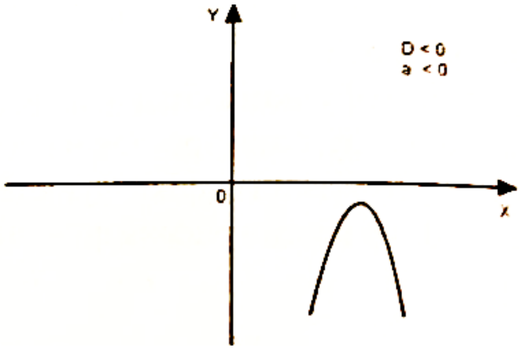
Графіком квадратичної функції є парабола. Якщо $a > 0$, то вітки і напрямлені вгору (мал. 17). Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз (мал. 18).

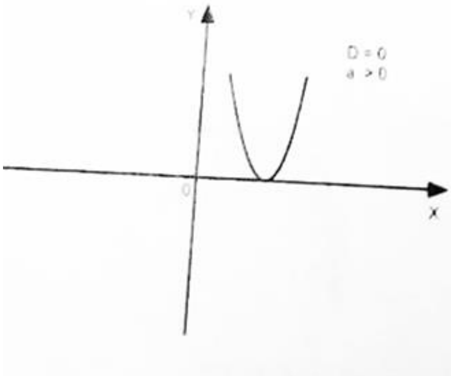
Для знаходження точок перетину параболи з віссю OX треба розв'язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$. Якщо дискримінант $D > 0$ — парабола перетинає вісь OX; якщо $D < 0$ — парабола не перетинає вісь OX; якщо $D = 0$ — вершина параболи лежить на осі OX.



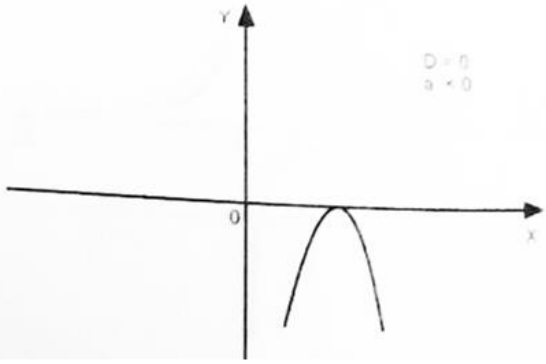








мал. 17



мал. 18

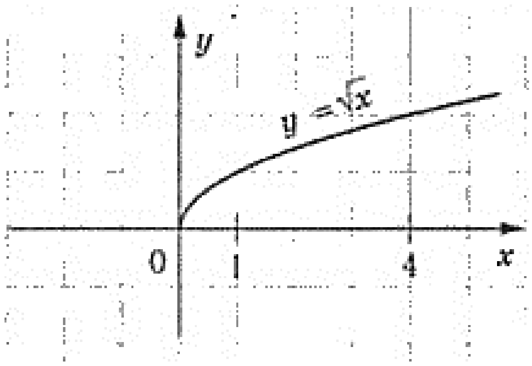
Абсциса вершини параболи $x_в = -\dfrac{b}{2a}$. Функція парна, якщо $b = 0$. Область визначення — усі дійсні числа.

Область визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина невід'ємних чисел: $x \geq 0$. Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є вітка параболи.

Складемо таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$ для кількох значень аргументу

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Графік функції $y = \sqrt{x}$ зображено на малюнку 19.



мал. 19

Степенева функція

Функція $y = x^n$, де n — натуральне число, називається **степеневою функцією з натуральним показником**. При $n = 1$ одержуємо функцію $y = x$, її властивості розглянуті вище, а графіком є пряма; при $n = 2$ маємо функцію $y = x^2$, графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору; при $n = 3$ маємо функцію $y = x^3$, графіком якої є кубічна парабола.

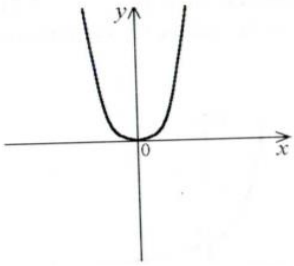
Назвемо властивості функції $y = x^2$, графіком якої є парабола з вершиною у точці (0; 0) зображена на мал. 20.

1. Область визначення — усі дійсні числа.
2. Область значень — $[0;+\infty)$.
3. Функція парна.
4. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.
5. Функція зростає на проміжку $[0;+\infty)$.

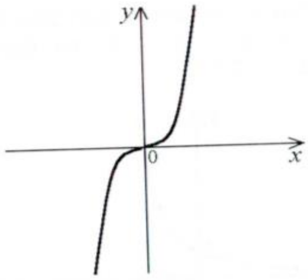
Назвемо властивості функції $y = x^3$, графіком якої є кубічна парабола зображена на мал. 21.

1. Область визначення – усі дійсні числа.
2. Область значень – усі дійсні числа.
3. Функція непарна.
4. Функція зростає на всій області визначення.

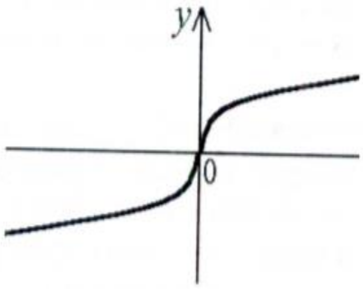
Степенева функція – це функція виду $f(x) = x^p$, де p - стале дійсне число, а x – (основа) змінна. Якщо p – парне, то графік, зображений на мал. 20. Якщо p – непарне, то графік, зображений на мал. 21. Якщо *p* – дробове, то графік, зображений на мал. 19 $y=\sqrt{x}$ і на мал. 22 $y=\sqrt[3]{x}$



мал. 20



мал. 21

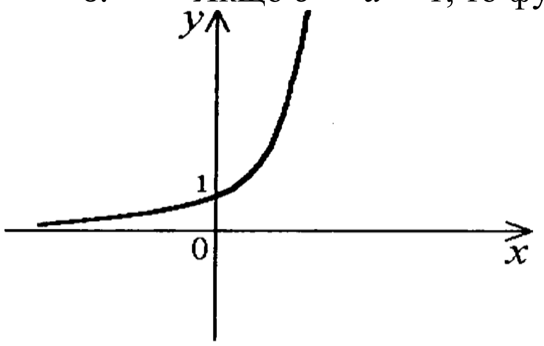


мал. 22

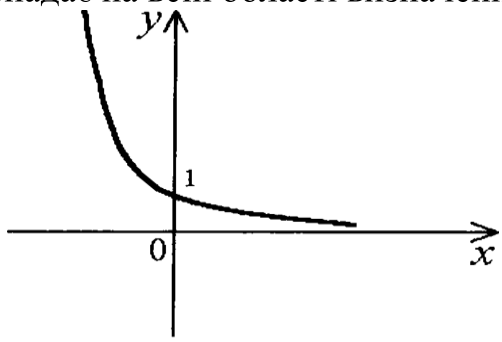
Показникова функція

Показникова функція (з основою *a)* — це функція виду $y=a^x$, де $a>0$ і $a\neq 1$. Назвемо властивості функції:

1. Область визначення — усі дійсні числа.
2. Область значень — (0;+∞).
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Графік функції проходить через точку (0;1).
5. Якщо a > 0, то функція зростає на всій області визначення (мал. 23).
6. Якщо 0 < a < 1, то функція спадає на всій області визначення (мал. 24).



мал. 23



мал. 24

Приклади показникових функцій:

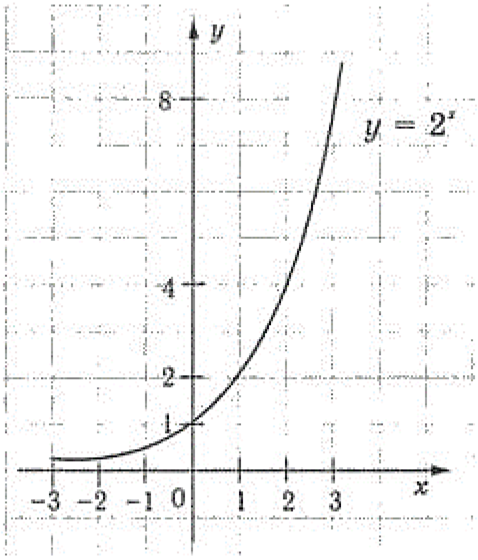
$$y=3^x;\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad y=\pi^x;\quad y=\left(\sqrt{3}\right)^x$$

тощо.

Розглянемо функцію $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

Зауважимо, що $2^x > 0$ для всіх значень *x*, тому графік функції $y = 2^x$ не перетинає вісь абсцис. Графік функції $y = 2^x$ зображено на малюнку 25. При всіх значеннях $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схожий на графік функції $y = 2^x$.

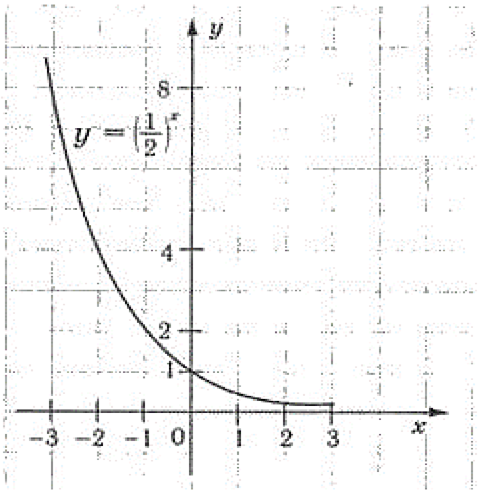


мал. 25

Розглянемо функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю значень для кількох цілих значень аргументу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ для всіх значень *x*, то графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ не перетинає вісь абсцис. Графік функції зображено на малюнку 26. При всіх значеннях $0 < a < 1$ графік функції $y = a^x$ схожий на графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



мал. 26

Логарифмічна функція

Логарифмом числа *N* за основою *a* називається корінь рівняння $a^x = N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, або показник степеня *x*, до якого треба піднести основу *a*, щоб дістати число *N*. Такий показник степеня позначають $y = \log_a x$.

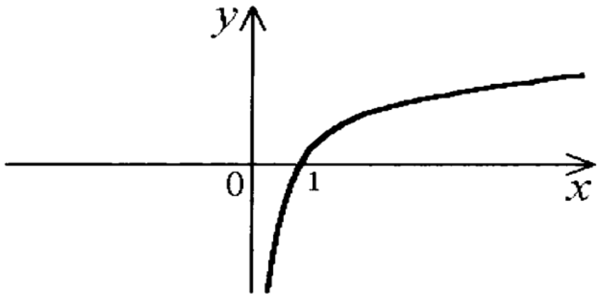
Логарифмічна функція за основою *a* – це функція виду $y = \log_a x$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$), обернена до показникової функції $y = a^x$.

Дійсно, показникова функція *f* з *D*(*f*)=*R*, задана формулою $y = a^x$ є оборотною і має обернену функцію. Для задання оберненої функції треба у формулі $y = a^x$ поміняти місцями *x* та *y*, одержати рівняння $x = a^y$ (1), де у – значення оберненої функції, і розв’язати рівняння (1) відносно змінної *y*, якщо це можливо.

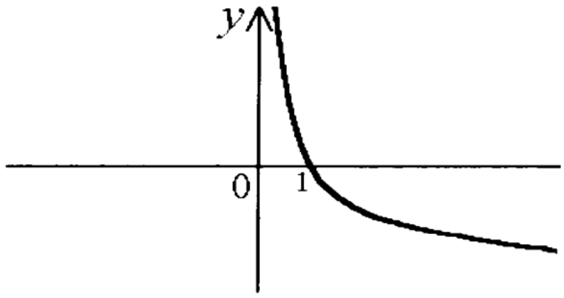
Для довільного значення додатного x, ми не знаємо способу розв'язання рівняння (1). З'ясуємо зміст значення y оберненої функції, y — це показник степеня, до якого треба піднести додатну, відмінну від 1, основу a, щоб дістати додатне число x.

Назвемо властивості логарифмічної функції.

1. Область визначення — $(0;+\infty)$.
2. Область значень — усі дійсні числа.
3. Функція ні парна, ні непарна.
4. Графік функції проходить через точку (1; 0).
5. Якщо $a > 0$, то функція зростає на всій області визначення (мал. 27).
6. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на всій області визначення (мал. 28).



мал. 27



мал. 28

Приклади логарифмічної функції:

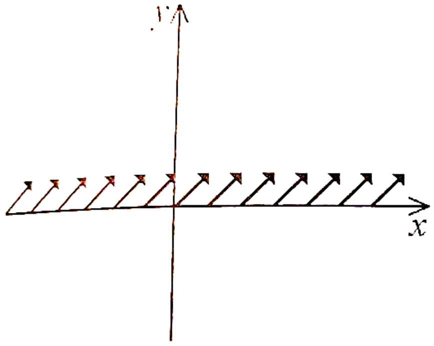
$y = \log_5 x$; $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \log_\pi x$; $y = \lg x$; $y = \ln x$ тощо.

Функція $y = [x]$. Функція $y = \{x\}$

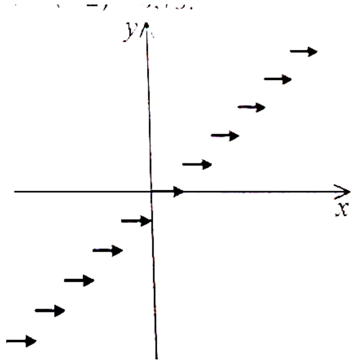
Нехай x — дійсне число. **Цілою частиною** дійсного числа називається найбільше ціле число, яке не перебільшує x. Ціла частина числа позначаєть [x]. **Дробовою частиною** числа x називається різниця між числом і його цілою частиною, тобто $x = x - [x]$. Дробова частина позначається $\{x\}$. Отже, $\{x\} = x - [x]$. Наприклад, [3,53] = 3, а {3,53} = 0,53; [12] = 12, а {12} =0; [-1,27] =-2, а {-1,27} =-1,27 - (-2) = 0,73.

Побудуємо графік функції $y = [x]$. Якщо $0 \le x < 1$, то $y = [x] = 0$; якщо $1 \le x < 2$, то $y = [x] = 1$; якщо $-1 \le x < 0$, то $y = [x] = -1$ і так далі. Графік функції зображений на мал. 29.

Побудуємо графік функції $y = \{x\}$. Відзначимо, що $\{x+1\} = \{x\}$, тому достатньо спочатку побудувати вітку графіка на будь-якому проміжку довжиною 1, наприклад, на $[0;1]$. Якщо $0 \le x < 1$, то $y = [x] = 0$, а тому $\{x\} = x$. Графік функції $y = \{x\}$ на всій числовій осі зображений на мал. 30.



мал. 29



мал.30

Лекція 10
Показникові, логарифмічні вирази та їхні перетворення

Корінь рівняння $a^x = N$, де $a > 0, a \neq 1$, називають **логарифмом** числа N за основою a.

Логарифмом числа N за основою a ($a > 0$ і $a \neq 1$) називається показник степеня x, до якого треба піднести a, щоб дістати число N.

Те, що число x є логарифмом числа N за основою a, записують так: $\log_a N = x$

Цю рівність читають так: логарифмом числа N за основою a дорівнює x. Наприклад, з рівностей $5^3 = 125;\ 6^{-2} = \dfrac{1}{36};\ 7^0 = 1;\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 64$ випливає, що $\log_5 125 = 3;\ \log_6 \dfrac{1}{36} = -2;\ \log_7 1 = 0;\ \log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$.

Зазначимо, що вирази $\log_4(-64), \log_3 0$ не мають смислу, бо рівняння $4^x = -64, 3^x = 0$ не мають коренів.

Вираз $\log_a N$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, має смисл лише при $N > 0$.

Логарифмічна рівність $\log_a N = b$ і показникова рівність $a^b = N$ виражають одне й те саме співвідношення між числами a, b і N.

За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, що входять до них, якщо задано два інші. Відповідно до цього можна розв’язати три задачі.

1) Знайти число N за даним його логарифмом b і за основою a.
2) Знайти основу a за даним числом N і його логарифмом b.
3) Знайти логарифм b даного числа N за даною основою a.

Широко використовують так звані десяткові логарифми, тобто логарифми за основою 10. Для них застосовують замість символу $\log_{10}$ символ lg (без зазначення основи), наприклад $\lg 10 = 1, \lg 100 = 2, \lg 1000 = 3, \lg 0{,}1 = -1$.

Розглянемо показникову рівність $a^x = N$ (1).

За означенням логарифма, $x = \log_a N$. (2)

Замінюючи в рівності (1) x на його значення з рівності (2), дістанемо:

$$a^{\log_a N} = N \ (3)$$

Рівність (3) називається **основною логарифмічною тотожність**. Вона є коротким записом означення логарифма: $\log_a N$ є показником степеня, до якого треба піднести основу степеня a, щоб дістати N. Наприклад: $5^{\log_5 125} = 125;\ 10^{\lg 1000} = 1000;\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 9} = 9$.

Приклад 1. Записати у вигляді логарифмічних рівностей: а) $2^7 = 128$; б) $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$; в) $216^{\frac{1}{3}} = 6$.

Розв’язання. Застосовуючи означення логарифма даного числа за даною основою, маємо: а) $\log_2 128 = 7$; б) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; в) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$.

Приклад 2. За означенням логарифма, перевірити справедливість таких рівностей: а) $\log_5 625 = 4$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$.

Це так, оскільки: а) $5^4 = 625$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

Приклад 3. За означенням логарифма, визначити, яке число має логарифм 3 за основою 7.

Розв’язання. За умовою $\log_7 x = 3$, звідси $x = 7^3$; $x = 343$.

Приклад 4. За якою основою логарифм числа 10000 дорівнює 4?

Розв’язання. Маємо: $\log_x 10000 = 4$, $x^4 = 10000$, $x = \sqrt[4]{10000}$; $x = 10$.

Приклад 5. Знайти: а) логарифм числа $\frac{1}{343}$ за основою 7; б) логарифм числа 16 за основою $\frac{1}{2}$.

Розв’язання. Маємо: а) $\log_7 \frac{1}{343} = x;\ 7^x = 7^{-3};\ x = -3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x;\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16;\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^4;\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}, x = -4$.

Приклад 6. Обчислити вираз: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$; б) $\log_3 \log_3 27$.

Розв’язання. Маємо: а) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$; б) позначимо $\log_3 \log_3 27 = x$. За означенням логарифма, $3^x = \log_3 27$, або $3^x = 3$, звідси $x = 1$.

Приклад 7. За допомогою основної логарифмічної тотожності перетворити рівність $2^5 = 32$.

Розв’язання. Маємо: $2^{\log_2 32} = 32$.

Приклад 8. Обчислити: а) $4^{-\log_4 20}$; б)$5^{\log_5 9 - \log_5 10}$; в)$49^{\log_7 8}$.

а) За означенням степеня з від’ємним показником, $4^{-\log_4 20} = \frac{1}{4^{\log_4 20}} = \frac{1}{20}$;

б) У показнику маємо різницю, а показники степенів віднімаються при діленні. Отже, $5^{\log_5 9 - \log_5 10} = \frac{5^{\log_5 9}}{5^{\log_5 10}} = \frac{9}{10}$.

в) Враховуючи, що $49 = 7^2$, дістанемо: $49^{\log_7 8} = \left(7^{\log_7 8}\right)^2 = 8^2 = 64$. Отже, $49^{\log_7 8} = 64$.

Основні властивості логарифмів виражаються в ряді теорем, на яких ґрунтується практичне застосування логарифмів.

Теорема 1. Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів, тобто $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$, де $N_1>0, N_2>0$.

Доведення. Позначимо $\log_a N_1=x_1$ і $\log_a N_2=x_2$. За означенням логарифма, $N_1=a^{x_1}, N_2=a^{x_2}$. Перемножуючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1N_2=a^{x_1+x_2}$. Тут x_1+x_2 є показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює добутку. Отже, можна записати: $\log_a(N_1N_2)=x_1+x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 на їх вирази через логарифми, остаточно дістанемо: $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$. Теорему доведено для окремого випадку – для двох множників. Але її можна довести і для будь-якого скінченного числа множників, бо при знаходженні добутку скінченного числа степенів однієї й тієї самої основи показники степенів додаються. Отже, взагалі, $\log_a(N_1N_2N_3...N_n)=\log_a N_1+\log_a N_2+...+\log_a N_n$, де $N_1>0, N_2>0,..., N_n>0$ (довести самостійно).

Для доведення цієї теореми можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю, а саме: нехай, як і раніше, $N_1=a^{x_1}, N_2=a^{x_2}$. За основною логарифмічною тотожністю, $N_1=a^{\log_a N_1}, N_2=a^{\log_a N_2}$. Перемножуючи почленно ці рівності, дістанемо: $N_1N_2=a^{\log_a N_1}a^{\log_a N_2}=a^{\log_a N_1+\log_a N_2}$. За означенням логарифма, $\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$.

Теорема 2. Логарифм частки двох додатних чисел(дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто $\log_a \frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$, де $N_1>0, N_2>0$.

Доведення. Нехай $\log_a N_1=x_1$ і $\log_a N_2=x_2$. Тоді $N_1=a^{x_1}, N_2=a^{x_2}$. Поділимо почленно першу рівність на другу: $\frac{N_1}{N_2}=a^{x_1-x_2}$. Тут x_1-x_2 є показником степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює частці $\frac{N_1}{N_2}$. Отже, маємо: $\log_a \frac{N_1}{N_2}=x_1-x_2$. Замінюючи x_1 і x_2 на їх вирази через логарифми, остаточно дістанемо: $\log_a \frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$. Цю теорему також можна довести, користуючись основною логарифмічною тотожністю.(Довести самостійно).

Наслідок. Логарифм дробу, чисельник якого дорівнює одиниці, дорівнює логарифму знаменника, взятому з протилежним знаком.

Теорема 3. Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто $\log_a\left(N^m\right)=m\log_a N,$ де m – будь-яке число, $N>0$.

Доведення. Нехай $\log_a N=x$, тоді $N=a^x$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня $m: N^m=a^{mx}$. Тут mx – показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб дістати число, яке дорівнює N^m. Отже, переходячи до логарифмів, дістанемо: $\log_a\left(N^m\right)=mx$. Замінимо x на його вираз через логарифм і остаточно матимемо: $\log_a\left(N^m\right)=m\log_a N$.

Теорема 4. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня, тобто $\log_a\sqrt[k]{N}=\dfrac{\log_a N}{k}$.

Доведення. Нехай треба знайти $\log_a\sqrt[k]{N}$. Замінюючи радикал на степінь з дробовим показником і застосовуючи теорему 3, дістанемо: $\log_a\sqrt[k]{N}=\log_a N^{\frac{1}{k}}=\dfrac{1}{k}\log_a N=\dfrac{\log_a N}{k}$.

Теорема 5. Якщо логарифми двох додатних чисел за тією самою основою рівні, то й самі числа рівні. І навпаки, якщо два додатні числа рівні, то і їх логарифми за тією самою основою рівні.

Доведення. Нехай $\log_a b=\log_a c, a>0, a\neq 1, b>0, c>0$. Позначимо $\log_a b=x, \log_a c=y$. Тоді $a^x=b, a^y=c$. За властивістю показникової функції, якщо $x=y,$ то $b=c$. Обернене твердження пропоную довести самостійно.

До основних властивостей логарифмів належать ще такі.

1) Логарифм одиниці дорівнює нулю. Це випливає з означення степеня з нульовим показником. Якщо $a\neq 0, a^0=1$, але тоді $\log_a 1=0$.

2) Логарифм основи дорівнює одиниці, тобто $\log_a a=1$. Це випливає з того, що $a^1=a$.

Основні властивості логарифмів широко використовуються під час перетворення виразів, що містять логарифми. Окремим видом таких перетворень є логарифмування виразів.

Прологарифмувати одночлен означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел (позначених цифрами і літерами), що входять до його складу.

Користуючись теоремами про логарифм добутку, частки, степеня і кореня, можна прологарифмувати будь-який одночленний вираз.

Подані вище рівності справедливі для будь-якої основи a, що задовольняє умови $a>0, a\neq 1$. Можна і так простіше при логарифмуванні основою вважати 10 або e ($\log_{10} a=\lg a, \log_e a=\ln a$).

Приклад 1. Прологарифмувати вирази:

$а)x = 5ac(a > 0, b > 0)$; $б)x = \dfrac{m}{n}(m > 0, n > 0)$; $в)x = \sqrt[4]{3a^2b}(a > 0, b > 0)$.

Розв’язання. а) Даний вираз є добутком, а тому, за теоремою 1: $\lg x = \lg 5 + \lg a + \lg c$.

б) За теоремою 2: $\lg x = \lg m - \lg n$.

в) За теоремою 4: $\lg x = \dfrac{1}{4}\lg\left(3a^3b\right) = \dfrac{1}{4}\lg 3 + \dfrac{3}{4}\lg a + \dfrac{1}{4}\lg b$.

Приклад 2. Обчислити, не користуючись допоміжними засобами: а) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5$; б) $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16}$.

Розв’язання.

а) $\log_3 2 + \log_3 4{,}5 = \log_3\left(2 \cdot 4{,}5\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$;

б) $\log_2 7 - \log_2 \dfrac{7}{16} = \log_2 \dfrac{7}{\frac{7}{16}} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$.

Приклад 3. Нехай $\log_a b = 0{,}45; \log_a c = 0{,}4; \log_a d = 0{,}85; \log_a k = -0{,}25$. Знайти $\log_a x$, якщо $x = \dfrac{b^2\sqrt[8]{c}}{dk^3}$.

Розв’язання.

$$\log_a x = \log_a \frac{b^2\sqrt[8]{c}}{dk^3} = \log_a\left(b^2\sqrt[8]{c}\right) - \log_a\left(dk^3\right) = \log_a b^2 + \log_a (c)^{\frac{1}{8}} - \left(\log_a d + \log_a k^3\right) =$$
$$= 2\log_a b + \frac{1}{8}\log_a c - \log_a d - 3\log_a k = 2 \cdot 0{,}45 + \frac{1}{8} \cdot 0{,}4 - 0{,}85 - 3 \cdot \left(-0{,}25\right) =$$
$$= 0{,}9 + 0{,}05 - 0{,}85 + 0{,}75 = 0{,}85.$$

Деякі важливі тотожності, що містять логарифми.

1) Доведемо тотожність $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, або $\log_b a \log_a b = 1$.

Нехай $\log_b a = x$. Тоді, за означенням логарифма, $b^x = a$. Логарифмуючи цю рівність за основою *а*, дістанемо: $x\log_a b = 1$, звідси $x = \dfrac{1}{\log_a b}$, тобто $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

2) Доведемо тотожність $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, що має такий зміст: якщо число, що стоїть під знаком логарифма, і основу логарифма піднести до будь-якого степеня, то значення логарифма не зміниться.

Нехай $\log_a N = x$. Тоді $a^x = N$ і $a^{kx} = N^k$, або $\left(a^k\right)^x = N^k$. Тут x – показник степеня, до якого треба піднести вираз a^k, щоб дістати N^k. Отже, $x = \log_{a^k} N^k$. Підставляючи замість *х* його значення, остаточно дістанемо: $\log_a N = \log_{a^k} N^k$.

3) Доведемо тотожність $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$.

Нехай $\log_{a^n} N = x$, тоді $a^{nx} = N$. Піднесемо обидві частини останньої рівності до степеня $\frac{1}{n}$, дістанемо: $a^x = N^{\frac{1}{n}}$. Тепер прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x = \frac{1}{n}\log_a N$, тобто $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$.

Перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа (виразу) визначають саме число (вираз), називають **потенціюванням**. Це перетворення є оберненим до логарифмування.

Застосовуючи теореми логарифмування, іноді можна вирази, що містять логарифми чисел або виразів, перетворити на логарифм одного числа або виразу.

Часто необхідно здійснити перехід від логарифмів за однією основою до логарифмів за іншою основою. Нехай відомо $\log_a N$ і треба знайти $\log_b N = x$ (x – невідоме число), де $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. За означенням логарифма, $b^x = N$. Прологарифмуємо останню рівність за основою a. Маємо: $x\log_a b = \log_a N$. Звідси $x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$, тобто $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ (1). Таким чином, логарифм будь-якого додатного числа N за основою b дорівнює логарифму того самого числа за іншою основою a, поділеному на логарифм числа b за основою a. Цю залежність застосовують у такому вигляді: $\log_a N = \log_b N \log_a b$ (2). Формули (1) і (2) справедливі, якщо обидві їх частини мають смисл, тобто $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$. Отже, будь-який логарифм можна подати у вигляді відношення двох логарифмів, узятих за тією самою основою. Наприклад, $\log_5 10$ можна подати за основами 2 і 3 ($a > 0, a \neq 1$). Так: $\log_5 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 5}; \log_5 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 5}; \log_5 10 = \frac{\log_a 10}{\log_a 5}$.

Лекція 11

Показникові, логарифмічні рівняння

Рівняння називають **показниковим**, якщо його невідомі входять лише до показників степенів при сталій основі.

Приклади показникових рівнянь:

$4^x = 8;\ 4^x + 2^x = 2;\quad \frac{1}{5^x+2} + \frac{1}{5^x-2} = 3$ тощо.

Якщо $b \le 0$, то рівняння $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ не має розв'язків, оскільки вираз a^x приймає лише додатні значення.

Якщо $b > 0$, то рівняння має єдиний розв'язок, який використовуючи основну логарифмічну тотожність можна записати так $x = \log_a b$.

Зауважимо, що, якщо $b = a^c$,то маємо $a^x = a^c$ і звідки $x = c$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 81$; 2) $7^x = 9$; 3) $4^x = 0$.

Розв'язання. 1) $3^x = 81;\ 3^x = 3^4;\ x = 4.$

2) $7^x = 9;\ x = \log_7 9;\ x = \log_7 3^2;\ x = 2\log_7 3.$

3) $4^x = 0$. Рівняння не має розв'язків.

Аналогічно розв'язуються рівняння $a^{f(x)} = b$, де $a > 0, a \neq 1.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: 1) $2^{x+1} = \sqrt[7]{8}$; 2) $7^{x^2-2x} = 1$

Розв'язання. 1) Оскільки $\sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$, то маємо

$$2^{x+1} = 2^{\frac{3}{7}};\ x+1 = \frac{3}{7};\ x = -\frac{4}{7}.$$

2) $7^{x^2-2x} = 1;\ x^2 - 2x = 0;\ x(x-2) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 2.$

Основними методами розв'язування показникових рівнянь є: метод зведення до однієї основи, метод групування, метод заміни змінної, метод розв'язування однорідних рівнянь, метод логарифмування.

Метод зведення до однієї основи: рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння:

$$1)\ 81^x = 27^{x-1};\ 2)\ 2^x 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{4-2x}.$$

Розв'язання. 1) $(3^4)^x = (3^3)^{x-1};\ 3^{4x} = 3^{3x-3};\ 4x = 3x - 3;\ x = -3.$

2) $(2\cdot 3)^x = (6^{-1})^{4-2x};\ 6^x = 6^{2x-4};\ x = 2x - 4;\ x = 4.$

Зведення показникових рівнянь до найпростіших способом винесення спільного множника за дужки.

Цей спосіб можна використовувати у випадку, коли рівняння містить кілька виразів виду a^{x+m_i}, де m_i — різні числа. Тоді використовуємо формулу

$a^{x+m_i} = a^x \cdot a^{m_i}$ та виносимо за дужки спільний множник. Після спрощень отримаємо рівняння виду $a^x = b$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $3 \cdot 2^{x+1} + 2^x - 5 \cdot 2^{x-1} = 9$.

Розв'язання.

$$3 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 2^x - 5 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 9; \quad 2^x\left(3 \cdot 2 + 1 - 5 \cdot \frac{1}{2}\right) = 9;$$

$$2^x \cdot \frac{9}{2} = 9; \quad 2^x = 2; \quad x = 1.$$

Рівняння виду $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Поділимо ліву і праву частини рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ (де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) на $b^{f(x)} \neq 0$. Тоді $(a/b)^{f(x)} = 1$, а, отже, $f(x) = 0$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $3^{x+1} = 7^{x+1}$.

Розв'язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на $7^{X+1} \neq 0$. Маємо

$$\frac{3^{x+1}}{7^{x+1}} = 1; \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} = 1; \quad x + 1 = 0; \quad x = -1.$$

Заміна змінних у показникових рівняннях.

Досить часто показникові рівняння можна звести до алгебраїчного за допомогою заміни $t = a^{f(x)}$, зауважимо, що $t > 0$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: $3 \cdot 16^x - 2 \cdot 4^x = 1$.

Розв'язання. Заміна $4^x = t$, $t > 0$.

Тоді $16^x = \left(4^2\right)^x = \left(4^x\right)^2 = t^2$. Маємо $3t^2 - 2t - 1 = 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{1}{3}$ — не задовольняє умову $t > 0$.

Отже, $4^x = 1; \quad 4^x = 4^0; \quad x = 0$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: $\frac{5}{8^{\sqrt{x}} + 1} + 2 = \frac{6}{8^{\sqrt{x}} - 2}$.

Розв'язання. Заміна $8^{\sqrt{x}} = t, \ t > 0$.

Маємо рівняння $\frac{5}{t+1} - \frac{6}{t-2} + 2 = 0$.

Розв'язавши його, матимемо $t_1 = 4$; $t_2 = -2{,}5$ - не задовольняє умову $t > 0$. Тоді

$$8^{\sqrt{x}} = 4; \quad 2^{3\sqrt{x}} = 2^2; \quad 3\sqrt{x} = 2; \quad \sqrt{x} = \frac{2}{3}; \quad x = \frac{4}{9}.$$

Однорідні показникові рівняння.

Рівняння виду $Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)}b^{f(x)} + Cb^{2f(x)} = 0, \ A \neq 0; \ C \neq 0$ є однорідним показниковим рівнянням другого степеня.

Метод розв'язання такого рівняння полягає в діленні лівої і правої частини на $b^{2f(x)} \neq 0$ (або на $a^{2f(x)} \neq 0$). Тоді маємо

$$A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0$$

Далі заміна $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t,\ t > 0.$

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0.$

Розв'язання. Оскільки $4^x = (2^2)^x,\ 6^x = 2^x \cdot 3^x,\ 9^x = (3^2)^x$, то рівняння зводиться до однорідного $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0.$

Ділимо ліву і праву частини рівняння на $3^{2x} \neq 0$.

Маємо $\frac{2 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{5 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + \frac{3 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0;\ 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0.$

Заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t,\ t > 0.$ Тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t^2.$ Маємо $2t^2 - 5t + 3 = 0;\ \ t_1 = 1{,}5;$ $t_2 = 1.$

$$1)\ t_1 = 1{,}5;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2};\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1};\ \ x = -1.$$

$$2)\ t_2 = 1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0;\ \ x = 0.$$

Метод логарифмування. **Логарифмуванням** додатного виразу називаэться дыя знаходження його логарифма за деякою основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оберненою до логарифмування дією є потенціювання. Отже, перетворення, за допомогою якого за даним логарифмом числа виразу визначають саме число або вираз називається **потенціюванням**.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}$, де $c > 0, c \neq 1$.

Степенево-показниковим називається рівняння, яке містить змінну в основі і показнику степеня. Знайдемо розв'язки рівняння виду $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$. Розглянемо різні значення функції $f(x)$, яка є основою степеня.

1) $f(x) = 1$. Корені цього рівняння повинні належати області визначення функції $g(x)$ і $h(x)$;

2) $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} f(x) = -1, \\ g(x) = k, k \in Z, \\ h(x) = l, l \in Z, \\ k, l \textit{ однієї парності} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) = h(x); \end{cases}$

5) $\begin{cases} f(x) \neq -1, \\ f(x) < 0, \\ g(x) = h(x) = m, m \in Z. \end{cases}$ Можна окремо розглянути випадок $g(x) = h(x) = \frac{m}{2k-1}$

Уточнення поняття степеня дозволяють нам знайти всі дійсні корені рівняння виду: $f\left(x\right)^{g(x)}=f\left(x\right)^{h(x)}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\left(x^2+x-31\right)^{2x^3-3}=\left(x^2+x-31\right)^{5x}$.

Розв'язання. 1) $x^2+x-31=1, x^2+x-32=0, D=1+128=129, x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{129}}{2}$. Оскільки $D\left(2x^2-3\right)=R$ і $D\left(5x\right)=R$, то одержані числа будуть коренями даного рівняння.

2) $\begin{cases} x^2+x-31=0, \\ 2x^2-3>0, \\ 5x>0. \end{cases}$ Розв'язками першого рівняння є числа: $x_3=\dfrac{-1-\sqrt{125}}{2}$, яке не задовольняє останній нерівності, і $x_4=\dfrac{-1+\sqrt{125}}{2}$, яке задовольняє обом нерівностям системи, тобто є коренем даного рівняння.

3) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x-31=-1, \\ 2x^2-3=2k, k\in Z \\ 5x=2n, n\in Z; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x-31=-1, \\ 2x^2-3=2m-1, m\in Z \\ 5x=2l-1, l\in Z. \end{cases} \end{array}\right.$

Розв'язавши перше рівняння, одержимо корені $x_5=-6, x_6=5$.

Якщо $x=-6$, то $2x^2-3=69;\ 5x=-30$. Одержані значення мають різну парність, тому $x=-6$ не є коренем рівняння. Якщо $x=5$, то $2x^2-3=47;\ 5x=25$. Обидва значення непарні.

Перевірка. $\left(25+5-31\right)^{2\cdot25-3}=\left(25+5-31\right)^{5\cdot5}$; $\left(-1\right)^{47}=\left(-1\right)^{25}$ – правильна числова рівність, тобто $x=5$ – корінь рівняння.

4) $\begin{cases} x^2+x-31<0 \\ x^2+x-31\neq-1 \\ 2x^2-3=5x=\dfrac{2m}{2n-1}, m\in Z, n\in Z; \end{cases}$

Розв'язками останнього рівняння є числа $x_7=-\dfrac{1}{2}, x_8=3$. Всім трьом умовам задовольняє число 3.

Перевірка. $(9+3-31)^{2\cdot 9-3}=(9+3-31)^{5\cdot 3}$; $(-19)^{15}=(-19)^{15}$ − правильна числова рівність, тобто $x=3$ − корінь рівняння.

Відповідь: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{129}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{125}}{2};3;5$.

Логарифмічні рівняння.

Рівняння називають **логарифмічним**, якщо його невідомі входять лише під знаками логарифмів.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$\log_3 x=-1;\ \log_2 x+\log_4 x=6;\ \lg(2-x)=\lg(x+4)$ тощо.

Розглянемо деякі види логарифмічних рівнянь та методи їх розв'язання.

Рівняння виду $\log_a x = b$.

Рівняння $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, b — будь-яке число можна розв'язати використовуючи означення логарифма. Отримаємо: $x = a^b$.

Аналогічно розв'язуються рівняння, в яких замість x у рівняння входить $f(x)$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 x=-2$; 2) $\log_2(x+1)=3$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(3x^2-2x)=0$.

Розв'язання. 1) $\log_3 x=-2;\ x=3^{-2};\ x=\dfrac{1}{9}$.

2) $\log_2(x+1)=3;\ x+1=2^3;\ x+1=8;\ x=7$.

3) $\log_{\frac{1}{7}}\left(3x^2-2x\right)=0;\ 3x^2-2x=\left(\dfrac{1}{7}\right)^0;\ 3x^2-2x-1=0;\ x_1=1;\ x_2=-\dfrac{1}{3}$.

Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, де $a>0, a\neq 1$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $\lg(x^2 + 2x - 7) = \lg(x - 1)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2+2x-7=x-1, \\ x-1>0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x-6=0, \\ x>1. \end{cases}$$

Розв'язками рівняння $x^2 + x - 6 = 0$ є числа $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Але лише перший з них задовольняє умову $x > 1$. Отже $x = 2$ - єдиний корінь початкового рівняння.

Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$.

Рівняння виду $\log_a f(x)=g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x)=a^{g(x)}$.

Приклад. Розв'яжіть рівняння: $\log_2(3\cdot 2^x-4)=x$

Розв'язання. Рівняння рівносильне такому $3 \cdot 2^x - 4 = 2^x$. Далі маємо $3\cdot 2^x-2^x=4;\ 2\cdot 2^x=4;\ 2^x=2;\ x=1$.

Рівняння, які зводяться до найпростіших за допомогою формул логарифмування.

При розв'язуванні більш складних логарифмічних рівнянь можна дотримуватися наступної схеми:

1) Знаходимо ОДЗ рівняння.

2) За допомогою формул логарифмування зводимо рівняння до виду $\log_a f(x) = b$ або до виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

3) Розв'язуємо отримане рівняння.

4) Перевіряємо корені на предмет входження в ОДЗ початкового рівняння та даємо відповідь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівнянням $\log_3(x+1{,}5)+\log_3 x = 0.$

Розв'язання. ОДЗ рівняння знайдемо з системи $\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x>0, \end{cases}$ тобто $x > 0$.

Маємо $\log_3(x(x+1{,}5)) = 0;\quad x(x+1{,}5) = 3^0;\quad x^2+1{,}5x-1=0;\quad x_1 = 0{,}5;$ $x_2 = -2.$

ОДЗ рівняння задовольняє лише перший корінь. Отже, x = 0,5 — єдиний корінь рівняння.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\lg 8 - \frac{1}{2}\lg(x+6) = \lg 16 - \lg(x-2).$

Розв'язання. ОДЗ рівняння знайдемо із системи $\begin{cases} x+6>0, \\ x-2>0, \end{cases}\ x>2.$

Домножимо ліву і праву частини рівняння на 2, щоб позбутися дробів:

$$2\lg 8 - \lg(x+6) = 2\lg 16 - 2\lg(x-2).$$

Використаємо формулу логарифмування:

$$\lg 8^2 - \lg(x+6) = \lg 16^2 - \lg(x-2)^2;\quad \lg\frac{64}{x+6} = \lg\frac{256}{(x-2)^2};$$

Тоді $\frac{64}{x+6} = \frac{256}{(x-2)^2};\ x^2-4x+4 = 4(x+6);\ x^2-8x-20=0;$ x_1 = 10; x_2 = -2. ОДЗ рівняння задовольняє лише перший корінь. Отже, x = 10 — єдиний корінь рівняння.

Заміна змінних у логарифмічних рівняннях.

Часто логарифмічні рівняння зводяться до алгебраїчних заміною $\log_a f(x) = t$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\log^2{}_3(x-1)+\log_3(x-1)-2=0.$

Розв'язання. Заміна $\log_3(x-1) = t$. Маємо $t^2+t-2=0;\ t_1 = 1;\ t_2 = -2.$

1) $t_1 = 1;\ \log_3(x-1) = 1;\ x-1=3;\ x=4.$

2) $t_2 = -2;\ \log_3(x-1) = -2;\ x-1 = 3^{-2};\ x = 1\frac{1}{9}.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1.$

Розв'язання. Маємо $\frac{2}{\log_{27} x} - 3\log_{27} x = 1.$ Заміна $\log_{27} x = t$. Тоді

$\frac{2}{t} - 3t = 1;\ \ \frac{2 - 3t^2 - t}{t} = 0;\ \ t_1 = -1;\ \ t_2 = \frac{2}{3}.$

1) $t_1 = -1$; $\log_{27} x = -1$; $x = 27^{-1}$; $x_1 = 1/27$.

2) $t_2 = 2/3$; $\log_{27} x = 2/3$; $x = 27^{2/3}$; $x_1 = (3^3)^{2/3}$; $x_2 = 9$.

Отже, $x_1 = \frac{1}{27},\ \ x_2 = 9.$

Лекція 12
Показникові, логарифмічні нерівності.

Нерівність називається **показниковою**, якщо вона містить невідоме в показнику.

При розв'язуванні показникових нерівностей треба обов'язково враховувати основу.

Нерівності виду $a^x \geq b$, $a^x > b$, $a^x \leq b$, $a^x < b$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Оскільки $a^x > 0$ для всіх значень x при $a > 0$, $a \neq 1$, то у випадку $b \leq 0$ множиною розв'язків нерівностей $a^x \geq b$, $a^x > b$ є множина R, а нерівності $a^x \leq b$, $a^x < b$ не будуть мати розв'язків.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівності: 1) $2^x \geq -5$; 2) $3^x < -1$.

Розв'язання. 1) $2^x \geq -5$; $x \in R$.

2) $3^x < -1$, нерівність не має розв'язків.

Розглянемо нерівність $a^x \geq b$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Схему розв'язання цієї нерівності подамо у вигляді таблиці.

$a^x \geq b$; $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $x \leq \log_a b$	Знак нерівності не змінюється $x \geq \log_a b$

Зауважимо, що нерівності $a^x > b$, $a^x \leq b$, $a^x < b$ розв'язуються аналогічними методами. Якщо $b = a^c$, де c - деяке число, то відповідно матимемо:

для $0 < a < 1$: $a^x \geq a^c$; $x \leq c$;

для $a > 1$: $a^x \geq a^c$; $x \geq c$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівності:

$$1)\ 3^x \geq 27; \qquad 2)\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{16};$$

$$3)\ 7^x \leq 2; \qquad 4)\ \left(\frac{1}{3}\right)^x > 8.$$

Розв'язання.

$$1)\ 3^x \geq 27;\ \ 3^x \geq 3^3;\ \ x \geq 3.$$

$$2)\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{16};\ \ \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^4;\ \ x > 4.$$

$$3)\ 7^x \leq 2;\ \ x \leq \log_7 2.$$

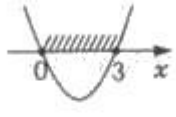
$$4)\ \left(\frac{1}{3}\right)^x > 8;\ \ x < \log_{\frac{1}{3}} 8;\ \ x < \log_{3^{-1}} 8;\ \ x < -\log_3 8.$$

Аналогічно розв'язуються нерівності у випадку, коли замість x маємо $f(x)$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} \geq 1.$

Розв’язання. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} \ge 1$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^0$; $x^2-3x \le 0$;

$x(x-3) \le 0$; $0 \le x \le 3$ (мал. 1).



мал. 1

Нерівності виду $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \ne 1$.

Метод розв’язування нерівності $a^x \ge b$ можна узагальнити для нерівностей виду $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \ne 1$. Подамо метод розв’язування нерівності у вигляді таблиці.

$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $f(x) \le g(x)$	Знак нерівності не змінюється $f(x) \ge g(x)$

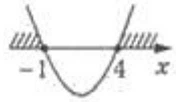
Аналогічно розв’язується нерівність виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Приклад. Розв’яжіть нерівності: 1) $3^{2x-6} > 9^{5-x}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}$.

Розв’язання.

$$1)\ 3^{2x-6} > 9^{5-x};\quad 3^{2x-6} > \left(3^2\right)^{5-x};\quad 3^{2x-6} > 3^{10-2x};$$
$$2x-6 > 10-2x;\quad 4x > 16;\quad x > 4.$$

2) Оскільки $0 < ½ < 1$, то маємо $x^2-2x \ge x+4$; $x^2-3x-4 \ge 0$. Розв’язавши цю нерівність, маємо $x \le -1$ або $x \ge 4$ (мал. 2).



мал. 2

Розв’язування складніших показникових нерівностей.

При розв’язуванні більш складних показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й при розв’язуванні рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючись зводити нерівності до найпростіших.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: $3^{x+1} - 2\cdot 3^x \ge 9$.

Розв’язання. $3^x \cdot 3^1 - 2\cdot 3^x \ge 9$; $3^x(3-2) \ge 9$; $3^x \ge 9$; $3^x \ge 3^2$; $x \ge 2$.

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 > 0$.

Розв’язання. Заміна $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t,\ t > 0;\ t^2 - 2t - 3 > 0.$ Розв’язуючи цю нерівність, отримаємо $t < -1$ або $t > 3$. Повертаємося до змінної x:

$$1)\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < -1$$ - немає розв’язків.

$$2)\ \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3;\ \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1};\ x < -1.$$

Отже, розв’язками нерівності є множина $(-\infty;-1)$.

Логарифмічні нерівності

Логарифмічною називається нерівність, в якій змінна знаходиться під знаком логарифма.

Нерівності виду $\log_a x \ge b$, $\log_a x > b$, $\log_a x \le b$, $\log_a x < b$.

При розв’язуванні нерівностей виду $\log_a x \ge b$, $\log_a x > b$, $\log_a x \le b$, $\log_a x < b$ можна користуватися наступними принципами:

1) якщо $a > 1$, то при переході до нерівності-наслідку знак нерівності залишимо без змін; якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

2) якщо в отриманій нерівності-наслідку є гарантія виконання ОДЗ: $x > 0$, то отриману нерівність нічим не доповнюємо; якщо такої гарантії немає, то доповнюємо дану нерівність умовою $x > 0$.

Покажемо (у вигляді схеми) як дані принципи використовуються, наприклад, при розв’язуванні нерівності $\log_a x > b$.

$\log_a x \ge b$, $a > 0$, $a \ne 0$, b – будь-яке число	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $0 < x \le a^b$	Знак нерівності не змінюється $x \ge a^b$

Аналогічно розв’язуються нерівності, у яких замість x, у нерівність входить $f(x)$.

Приклад. Розв’яжіть нерівність: $1)\ \log_5 x > -1;\quad 2)\ \log_{\frac{1}{2}} x \ge -3;$

$3)\ \log_3(x+1) < 2;\quad 4)\ \log_{\frac{1}{4}}(x-3) \le -1.$

Розв’язання.

1) $\log_5 x > -1; \quad x > 5^{-1}; \quad x > \frac{1}{5}.$

2) $\log_{\frac{1}{2}} x \ge -3; \quad 0 < x \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; \quad 0 < x \le 8.$

3) $\log_3(x+1) < 2; \quad 0 < x+1 < 3^2; \quad -1 < x < 8.$

4) $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) \le -1; \quad x-3 \ge \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}; \quad x-3 \ge 4; \quad x \ge 7.$

Нерівності виду $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Подамо метод розв'язування нерівності $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ у вигляді таблиці:

$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	Знак нерівності не змінюється $\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Нерівність виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ розв'язується аналогічно.

Приклад. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \ge \log_{\frac{1}{3}}(2x-3);$

2) $\log_7(x^2-2) > \log_7 x.$

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < 1/3 < 1$, то знак нерівності змінюємо на протилежний $x - 2 \le 2x - 3$. Крім того треба врахувати $x - 2 > 0$ (тоді умова $2x - 3 > 0$ буде виконуватися автоматично). Отже, нерівність рівносильна системі:

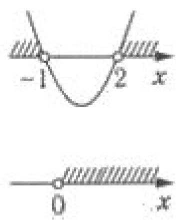
$$\begin{cases} x-2 \le 2x-3, \\ x-2 > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 1, \\ x > 2, \end{cases} \qquad x > 2.$$

2) Оскільки $7 > 1$, то знак нерівності не змінюємо $x^2 - 2 > x$. Крім того треба врахувати $x > 0$ (умова $x^2 - 2 > 0$ виконується автоматично).

Отже, маємо:

$$\begin{cases} x^2-2 > x, \\ x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-x-2 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Розв'язки першої нерівності: $x < -1$ і $x > 2$ (мал. 3 — схема вгорі). Враховуючи $x > 0$, маємо розв'язки: $x > 2$.



мал. 3

Отже, розв'язком початкової нерівності є множина: $x > 2$.

Розв'язування складніших логарифмічних нерівностей.

При розв'язуванні більш складних логарифмічних нерівностей використовуємо прийоми розв'язування логарифмічних рівнянь та принципи за якими розв'язуються найпростіші логарифмічні нерівності.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність: $\log_3(x-1)+\log_3(x+5)<3.$

Розв'язання. Область допустимих значень знайдемо із системи:

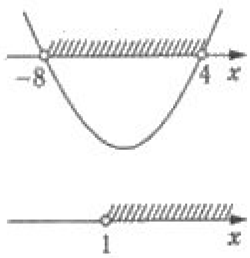
$$\begin{cases} x-1>0, \\ x+5>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>1, \\ x>-5, \end{cases} \quad x>1.$$

На цій області визначення маємо $(x - 1)(x + 5) < 3$. Оскільки $3 > 1$, то знак нерівності не змінюємо: $(x - 1)(x + 5) < 3^3$.

При $x > 1$ умова $(x - 1)(x + 5) > 0$ виконується автоматично.

Маємо $x^2+5x-x-5-27<0; \quad x^2+4x-32<0.$

Звідки $-8 < x < 4$ (мал. 4 — схема вгорі). Необхідно врахувати область визначення: $x > 1$ (мал. 4 — схема внизу).



мал. 4

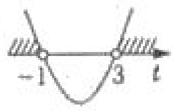
Відповіддю до початкової нерівності є переріз множин $-8 < x < 4$ і $x > 1$, тобто $1 < x < 4$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність: $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 2\log_{\frac{1}{2}} x - 3 \geq 0.$

Розв'язання. Заміна $\log_{\frac{1}{2}} x = t.$ Тоді $t^2 - 2t - 3 \geq 0$, звідки $t \leq -1$ або $t \geq 3$ (мал. 5). Маємо:

$$1)\ t \leq -1;\ \log_{\frac{1}{2}} x \leq -1;\ x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1};\ x \geq 2.$$

$$2)\ t_2 \geq 3;\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 3;\ 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{3};\ 0 < x < \frac{1}{8}.$$



мал. 5

Отже, розв’язками початкової нерівності є об’єднання множин $x \geq 2$ і $0 < x \leq \frac{1}{8}$, тобто $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [2; +\infty)$.