

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського  
«Харківський авіаційний інститут»

Кафедра № 405 – «Вищої математики та системного аналізу»

О. А. Мураховська

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни «ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ  
В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ»**

Харків 2019

## Лекції № 1-2

### Вступ до навчальної дисципліни

### "Теорія управління і прогнозування в умовах невизначеності".

Проблема прийняття рішень, або проблема вибору альтернатив, – це один з найпоширеніших класів задач, які доводиться розв'язувати не тільки досліднику, але й інженеру-конструктору, господарському керівнику і т.д. Будь-які ситуації, що потребують прийняття рішень, містять, як правило, велику кількість невизначеностей. Можна сказати, що задачі, які не містять невизначеностей, є скоріше виключенням, ніж правилом, оскільки опис проблеми, адекватний реальності, практично завжди містить різного типу невизначеності.

Необхідно зазначити, що звести подібні задачі з невизначеностями до строго поставлених математичних задач надзвичайно складно.

На сьогоднішній день існує два принципово різних підходи до вирішення задач, що містять невизначеності. **Класичний підхід**, який базується на теорії прийняття рішень та **нечітко-множинний підхід**, що спирається на математичний апарат теорії нечітких множин. Класичний підхід орієнтований, в більшій мірі, на вирішення економічних і соціально-економічних завдань; нечітко-множинний - на вирішення складних технічних задач.

Врахування чинників невизначеності і неповноти інформації на практиці характеризується:

- неповнотою або відсутністю знань щодо поведінки окремих входних в систему елементів і підсистем, а також взаємозв'язків між ними;
- обмеженою можливістю експериментального дослідження процесів управління технічними засобами, а також необґрунтовано високою вартістю експериментів, що не дозволяє отримати достатню статистичну інформацію про найбільш важливі характеристики системи;
- багатоцільовим, багатокритеріальним, багатофункціональним характером завдань управління технічних засобів в складних ієрархічних структурах;
- якісними оцінками умов функціонування складних технічних систем;
- у багатьох випадках людина (експерт, група експертів) являє собою єдине джерело відомостей про розроблювані підсистеми і системи в цілому.

Апарат теорії нечітких множин дає можливість широко використовувати надійні та перевірені математичні підходи до розв'язання задач, які раніше важко піддавалися математичному опису або взагалі не піддавалися формалізації. Тим самим стало можливим по'єднання строгості й точності класичної математики з істотною невизначеністю й неоднозначністю багатьох практичних ситуацій, у тому числі різних явищ реального світу, суб'єктивно сприйраних та емоційно забарвлених у свідомості людини.

## **Історична довідка**

Початок сучасної теорії нечіткості покладено у 1965 році роботою американського вченого азербайджанського походження Л.А. Заде. На сьогодні згідно з цією теорією опубліковані тисячі книг і статей, видається кілька міжнародних журналів, виконано досить багато як теоретичних, так і прикладних робіт.

Л.А. Заде використовував термін "fuzzy set" (нечітка множина). Термін "fuzzy" перекладається як нечіткий, розмитий, розпливчастий, і навіть як пухнастий і туманний.

Сам Л.А. Заде розглядав теорію нечітких множин як апарат аналізу і моделювання гуманістичних систем, тобто систем, в яких бере участь людина. Його підхід спирається на передумову про те, що елементами мислення людини не є числа, а елементи деяких нечітких множин або класів об'єктів, для яких перехід від «належності» до «неналежності» безперервний.

## **Структура навчальної дисципліни**

### **"Теорія управління і прогнозування в умовах невизначеності"**

**Моделі опису невизначених даних.** Нечіткість і невизначеності, що виникають під час описування задач прийняття рішень. Класифікація невизначеностей. Моделі опису невизначених даних: імовірнісно-статистична, нечітка, інтервальна. Невизначеності, що виникають під час одиничних, повторних та опосередкованих вимірювань, в емпіричних формулах.

**Класичні та сучасні методи зменшення невизначеності.** Вирівнювання даних, як метод зменшення невизначеності: переваги та

недоліки. Порівняння теорій невизначеностей. Застосування біонічних принципів в інформаційних технологіях. Нечітке моделювання. Класифікація та переваги нечітких моделей. Порівняльний аналіз нечіткого та нейросіткового підходів до моделювання.

**Задачі багатокритеріального вибору.** Модель задачі багатокритеріального вибору. Аксиома Парето. Множина Парето. Принцип Еджворта-Парето. Розширювання системи «розумних» аксіом. Алгоритм знаходження множини Парето. Шкали критеріїв та інваріантність множини Парето. Відносна вага критеріїв. Звуження множини Парето на підставі інформації про відносну вагу критеріїв.

**Методи експертного оцінювання.** Експертне оцінювання як процес вимірювання. Методи вимірювання ступеню впливу об'єктів. Метод аналізу ієрархій (МАІ). Ієрархічне зображення проблеми. Матриця відносної ваги. Матриця парних порівнянь. Оцінювання однорідності суджень. Синтез пріоритетів на ієрархії та оцінювання їхньої однорідності. Урахування міркувань декількох експертів. Опис МАІ. Спрощені варіанти МАІ. Використання МАІ до розв'язання багатокритеріальних задач. Багатокритеріальний вибір на ієрархіях з різною кількістю та складом альтернатив по критеріям. Методи обробки та погодження міркувань експертів (прямий метод, принцип групового ранжування, узагальнена методика на основі стохастичних сценаріїв). Оцінка об'єктів з використанням нечіткого метода Дельфи.

**Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів.** Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів. Методи багатокритеріального вибору на основі: а) перетинання нечітких множин; б) у разі нечіткого відношення переваги; в) з використанням правила нечіткого виводу; г) на основі адитивної згортки. Ранжування альтернатив на множині лінгвістичних векторних оцінок. Переваги та недоліки різних методів багатокритеріального аналізу варіантів. Області застосування. Приклади задач математичного моделювання складних систем на базі нечіткого багатокритеріального аналізу варіантів в умовах невизначеності.

**Біонічні підходи до багатокритеріального аналізу складних систем.** Використання еволюційних методів в інформаційних технологіях. Генетичні алгоритми (ГА). Основні поняття. Зв'язок звичайної (біологічної) та штучної термінології. Класичний ГА. Оператори вибору батьків, рекомбінації, мутації

та селекції. Налагодження ГА. Різні модифікації ГА. Деякі моделі ГА (Genitor (Whitley), СНС (Eshelman), Hybrid algorithm (Davis), Island Models). Чинники, що утворюють складність для ГА. Модернізація ГА. Недоліки та переваги ГА. Приклади використання ГА для розв'язання задач багатокритеріальної безумовної оптимізації. Використання ГА для розв'язання нестационарних задач оптимізації.

## **Класифікація невизначеностей**

Нехай існує деяка множина  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  можливих рішень, які мають назву «альтернативи». Реалізація кожної з альтернатив приводить до наступу певних наслідків, сукупність яких являє собою множину  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ .

Аналіз цих наслідків за деяким заздалегідь вибраним набором показників може однозначно характеризувати міру прийнятності кожної з можливих альтернатив. Особа, що приймає рішення (ОПР), виходячи з цієї оцінки та деяких інших її міркувань щодо переваг, вибирає як остаточне рішення одну з альтернатив.

Таким чином, необхідно вивчити систему переваг ОПР  $S$  і побудувати таку модель вибору альтернативи, яка б забезпечувала кращий у деякому розумінні результат цього вибору. Цей результат має відповідати як меті рішення, що приймається, так і системі переваг ОПР. Отже, для характеристики задачі прийняття рішення може бути використаний такий кортеж:  $\langle A, Q, S, T \rangle$ , де

$A$  – множина альтернатив, що розглядаються;

$Q$  – середовище, у якому розглядається задача прийняття рішень;

$S$  – система переваг ОПР;

$T$  – деяка сукупність дій над множиною альтернатив  $A$ .

Об'єктивна наявність невизначеності, що приводить до необхідності подібного підходу до розв'язання задач прийняття рішень, може бути обумовлена різними джерелами її походження й мати різні зовнішні прояви. Тому вважається цілком природним припущення про те, що залежно від вигляду й характеру невизначеності істотно може змінюватися вибір методів для розв'язання відповідних задач. У досить загальному випадку класифікацію основних видів невизначеності, що мають місце під час розв'язання задач прийняття рішень, наочно можна зобразити у вигляді схеми, показаної на рис. 1.1.

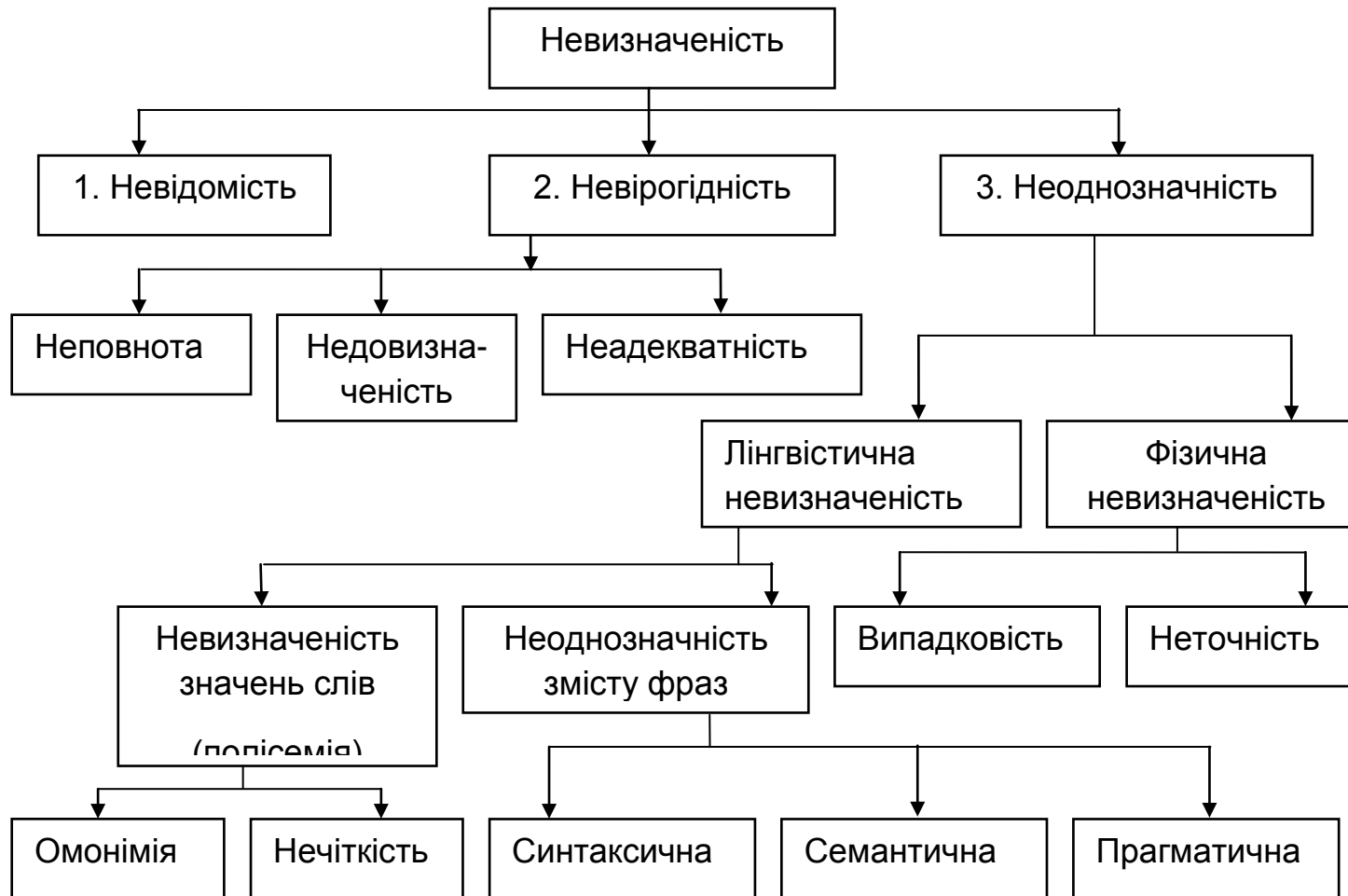


Рис. 1.1. Дерево класифікації невизначеностей

## Класичні і сучасні методи формалізації невизначеностей

На практиці досить часто виникає деяка помилкова аналогія між імовірністю й нечіткістю. Між цими поняттями та областями застосування відповідних методів існує принципова відмінність.

Проведемо порівняльний аналіз основних характерних рис методів теорії нечітких множин і методів теорії ймовірностей та їхніх можливостей у різних прикладних задачах.

У теорії ймовірностей зазвичай розглядаються події, невизначеність характеристик яких пов'язана з їх випадковим змінням, тимчасом як у теорії нечітких множин розглядаються цілком детерміновані об'єкти або події, окремі істотні характеристики яких, разом з тим, мають деяку невизначену частину.

Дійсно, імовірність деякої події може дорівнювати одиниці, тимчасом як ступінь її належності до певного класу більш загальних подій може бути меншим від одиниці. Наприклад, імовірність настання дня після ночі дорівнює одиниці, а ступінь належності конкретного моменту часу (наприклад, шостої ранку) до поняття «день» може бути різним залежно від пори року або погоди (сонячно або похмуро). Природно, при цьому слід враховувати й індивідуальні особливості конкретної людини. Для ймовірнісного підходу характерним є подання невизначеності в описі параметрів об'єктів або процесів у вигляді деякого закону розподілу випадкової величини. При цьому кожному значенню змінної  $x$  відповідає певне значення ймовірності  $P(x)$ .

Для нечіткомножинного підходу характерні невизначеності в описі об'єкта словами природної мови або невизначеності, обумовлені властивою людині суб'єктивністю суджень у процедурах оцінки. Вони можуть бути подані у вигляді значень функцій належності  $\mu_A(x)$  або у вигляді якогось елемента кількісної шкали з нечіткими (розмитими) межами.

Для ймовірнісного підходу характерним є оперування великою кількістю однорідних об'єктів, за випадковими відхиленнями значень одного або декількох параметрів яких і визначаються ймовірнісні характеристики розподілу для цих параметрів. При ймовірнісному підході досить поширеним є також випадок оперування великою кількістю даних, одержаних за результатами численних спостережень за одним конкретним об'єктом. При цьому кількість отриманих даних (результатів спостережень або вимірів) для строгого дослідження й визначення ймовірнісних характеристик досліджуваного процесу має бути досить великою.

Нечіткомножинний же підхід зазвичай пов'язаний з дослідженням невеликої кількості об'єктів або навіть одного об'єкта. Дослідника цих об'єктів цікавлять їхні характеристики, які не цілком чітко визначені, і його завдання полягає у визначенні міри цієї нечіткості.

При розв'язанні задач прийняття рішень сама нечіткість може стосуватися як ступеня належності до тієї або іншої альтернативи, так і можливого результату вибору цієї альтернативи. Добре відомо, що в житті людини нерідко виникає необхідність зробити рішучий вибір усього лише із двох можливих альтернатив, однак зменшення їх кількості істотно не полегшує задачу вибору. Успішно розв'язати задачу можна, лише знаючи характеристики нечіткості.

При виборі підходу, який би найбільшою мірою відповідав характеру задачі та цілям її розв'язання, можлива перевага визначається характерними рисами як можливих методів, так і самих цих задач. Природно, що всі задачі, так або інакше пов'язані з випадковим характером змінення параметрів та з існуванням відповідного розподілу ймовірності, повинні розв'язуватися із застосуванням адекватних імовірнісних методів.

До категорії ж нечітких задач належать такі, що пов'язані з визначенням ступеня наявності конкретної якості об'єкта. Прикладом може бути задача визначення, наскільки даного студента можна вважати високим, гарним, розумним тощо. Крім того, до класу нечітких задач належать і такі, у яких необхідними є оцінка деяких якісних категорій і вибір на цій основі однією ОПР певних варіантів з урахуванням сформульованих природною мовою деяких критеріїв раціонального вибору.

Таким чином, у процесі розв'язання реальних задач управління й прийняття рішень наявну невизначеність не можна ігнорувати, і навіть спрощувати. Необхідно ефективно використовувати існуючі методи й активно розробляти нові, які б дали можливість формалізувати невизначеність різного роду. Для цього необхідно не тільки знати природу невизначеності, розуміти принципи її класифікації, але й уміти в кожному конкретному випадку вибирати найбільш прийнятні методи для адекватного опису складних задач, що розв'язуються в умовах цієї невизначеності. Останніми роками все більш широкого застосування набувають методи розв'язання задач прийняття рішень, що базуються на теорії нечітких множин.



## Лекція № 3-4

### Принципи аналізу та рішення багатокритеріальних задач прийняття рішень

Нехай  $X$  - множина можливих (або допустимих) рішень. Вибір рішення полягає у виборі серед допустимих такого рішення, яке є найкращим.

Позначимо множину обраних рішень  $C(X)$ ,  $C(X) \subset X$ .

Людини (або цілий колектив), який здійснює вибір і несе повну відповідальність за його наслідки, називають особою, яка приймає рішення (ОПР).

Числові функції  $f_1, f_2, \dots, f_m$ ,  $m \geq 2$ , визначені на множині можливих рішень  $X$  називаються критеріями оптимальності, критеріями ефективності або цільовими функціями, а  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  утворюють векторний критерій. Всі можливі векторні оцінки утворюють множину можливих оцінок (можливих або допустимих векторів)

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Знак  $\succ_x$  означає перевагу даного ЛПР, яке виражається відношенням строгого переваги, або коротше - відношенням переваги.

Постановка задачі багатокритеріального вибору (*в термінах рішень*) включає:

- 1) множину можливих рішень  $X$ ,
- 2) векторний критерій  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ,
- 3) відношення переваги  $\succ_x$ .

Постановка задачі багатокритеріального вибору (*в термінах векторів*) включає:

- 1) множину можливих векторів  $Y, Y \subset R^m$ ,
- 2) відношення переваги  $\succ_Y$ ,

і полягає в знаходженні множини обраних векторів  $C(Y)$ ,  $C(Y) \subset Y$ , з урахуванням відносини переваги ОПР.

Дві наведені задачі (в термінах рішень і в термінах векторів) еквівалентні.

## Принцип Еджворта-Парето

Принцип Еджворта-Парето — система аксіом, що описує «розумну» поведінку ОПР в процесі вибору.

### *Аксіома 1 (аксіома виключення домінованих рішень)*

Для будь-якої пари допустимих рішень  $x', x'' \in X$ , для яких має місце співвідношення  $x' \succ_x x''$ , виконано  $x'' \notin C(X)$ .

Будь-яка множина обраних рішень, яким би способом вона не була виділена зі всієї множини можливих рішень, не повинна містити жодного такого рішення, для якого може знайтися більш детально визначене можливе рішення.

### *Аксіома Парето*

Для всіх пар допустимих рішень  $x', x'' \in X$ , для яких має місце нерівність  $f(x') \geq f(x'')$ , виконується співвідношення  $x' \succ_x x''$ .

В окремому випадку, коли векторний критерій є скалярним, тобто має лише одну компоненту, аксіома Парето висловлює прагнення ОПР максимізувати цю компоненту.

Рішення  $x^* \in X$  називається оптимальним за Парето (парето-оптимальним), якщо не існує такого можливого рішення  $x \in X$ , для якого має місце нерівність  $f(x) \geq f(x^*)$ . Усі парето-оптимальні рішення утворюють множину Парето, що позначається  $P_f(X)$ .

Залежно від структури множини і виду векторного критерію множина парето-оптимальних рішень може

- бути порожньою (не містити жодного елемента);
- бути одноелементною множиною;
- складатися з деякого кінцевого числа рішень;
- містити нескінченне число можливих рішень;
- збігатися з множиною можливих рішень.

### *Теорема (принцип Еджворта-Парето)*

Нехай виконана аксіома Парето. Тоді для будь-якої множини вибираємих рішень  $C(X)$ , що задовольняють аксіомі 1, справедливо включення  $C(X) \subset P_f(X)$ .

Геометричну ілюстрацію принципу Еджворта-Парето надано на рис. 3.1.

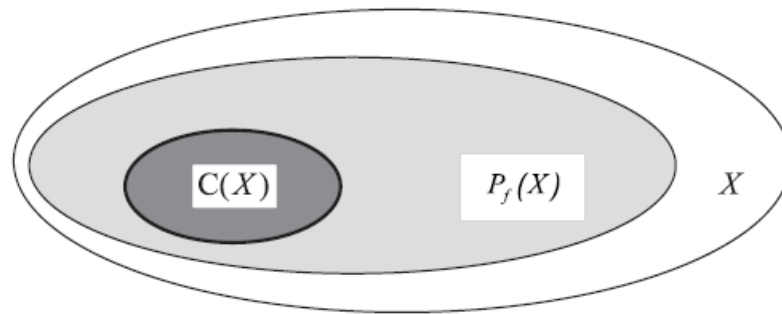


Рис. 3.1. Загальний випадок співвідношення між множинами допустимих, які обирають і парето-оптимальних рішень.

Застосування принципу ризиковано або ж взагалі неприпустимо, якщо реалізується хоча б один з наступних двох випадків:

1) рішення, що не вибрано з деякої пари виявляється обраним зі всієї безлічі можливих рішень;

2) порушена аксіома Парето, тобто для деякої пари допустимих рішень  $x', x'' \in X$ , для яких має місце нерівність  $f(x') \geq f(x'')$ , не виконується співвідношення  $x' \succ_X x''$ .

### ***Аксіома 2 (іррефлексивність і транзитивність відносини переваги)***

Іррефлексивне відношення переваги, яким ЛПР керується в процесі вибору, є транзитивним бінарним відношенням.

Кажуть, що критерій  $f_i$  узгоджений з відношенням переваги  $\succ$ , якщо для будь-яких двох векторів  $y', y'' \in R^m$ , таких що

$$y' = (y'_1, \dots, y'_{i-1}, y'_{i+1}, \dots, y'_m), \quad y'' = (y''_1, \dots, y''_{i-1}, y''_{i+1}, \dots, y''_m), \quad y'_i > y''_i,$$

завжди виконується співвідношення  $y' \succ y''$ .

### ***Аксіома 3 (узгодженість критеріїв з відношенням переваги)***

Кожен з критеріїв  $f_1, f_2, \dots, f_m$  узгоджений з відношенням переваги  $\succ$ . Узгодженість всіх критеріїв з відношенням переваги означає, що ЛПР зацікавлено в максимізації одночасно всіх критеріїв.

### ***Принцип Еджворта-Парето з використанням аксіом 2 і 3***

Нехай виконуються аксіоми 2 і 3. У цьому випадку для будь-якої множини обраних векторів  $C(Y)$ , що задовольняє аксіомі 1, має місце включення  $C(Y) \subset P(Y)$ .

Згідно з принципом Еджворта-Парето найкращі рішення завжди слід вибирати в межах множини Парето.

#### ***Теорема***

У разі непорожньої кінцевої множини можливих векторів (що буде виконано, якщо не пустою і кінцевою є множина можливих рішень) існує хоча б одно парето-оптимальне рішення і хоча б один парето-оптимальний вектор, тобто  $P_f(X) \neq \emptyset$  і  $P(Y) \neq \emptyset$ .

Для того щоб знайти множину Парето, потрібно для кожного допустимого двовимірного вектора побудувати кут з вершиною в даній точці і подивитися, чи знаходиться в ньому хоча б одна з можливих точок множини чи ні. Якщо така точка знайдеться, то вершина кута не є парето-оптимальною, в іншому випадку вершина парето-оптимальна.

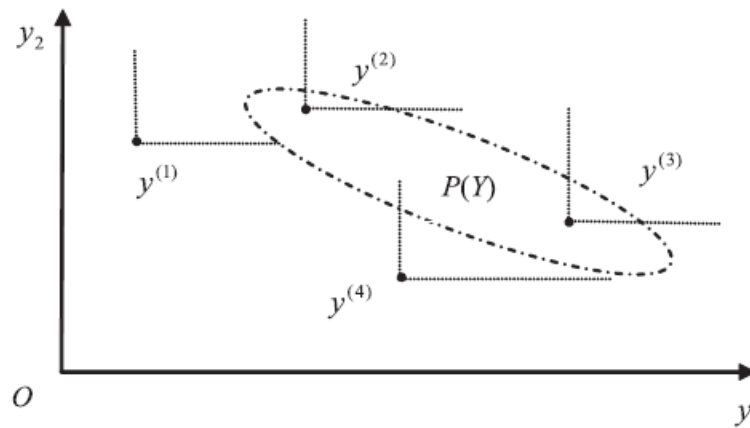


Рис. 3.2. Геометрична ілюстрація знаходження парето-оптимальних векторів на площині

#### ***Алгоритм знаходження множини Парето***

Крок 1. Нехай  $P(Y) = Y$ ,  $i = 1$ ,  $j = 2$ .

Крок 2. Перевірити виконання нерівності  $y^{(i)} \geq y^{(j)}$ . Якщо вона виявилася істинною, то перейти до кроку 3. В іншому випадку перейти до кроку 5.

Крок 3. Видалити з поточного множини векторів  $P(Y)$  вектор  $y^{(j)}$ , так як він не є парето-оптимальним. Потім перейти до Кроку 4.

Крок 4. Перевірити виконання нерівності  $j < N$ . Якщо воно має місце, то покласти  $j = j + 1$  і повернутися до кроку 2. В іншому випадку - перейти до кроку 7.

Крок 5. Перевірити справедливість нерівності  $y^{(j)} \geq y^{(i)}$ . У тому випадку, коли воно є істинним, перейти до кроку 6. В іншому випадку - повернутися до кроку 4.

Крок 6. Видалити з поточного множини векторів  $P(Y)$  вектор  $y^{(i)}$  і перейти до кроку 7.

Крок 7. Перевірити виконання нерівності  $i < N - 1$ . У разі істинності цієї нерівності слід послідовно покласти  $i = i + 1$ , а потім  $j = i + 1$ . Після цього необхідно повернутися до кроку 2. В іншому випадку (тобто коли  $i \geq N - 1$ ) обчислення закінчити. Множину парето-оптимальних векторів побудовано повністю.

### ***Метод аналізу ієрархій***

Метод аналізу ієрархій (МАІ) призначений для розв'язання багатокритеріальних задач з кінцевою множиною можливих векторів. Його застосування засноване на експертної інформації про відносну важливість критеріїв у вигляді матриці порівнянь парами.

Цей метод був запропонований американським математиком Т. Сааті в 1972 р. Згодом він оформився в цілий розділ прийняття рішень при наявності кількох критеріїв.

### ***Матриця відносних ваг***

Нехай є набір з  $n$  елементів, які позначимо  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Припустимо, що кожному елементу  $A_k$  поставлено у відповідність невід'ємне число  $\omega_k$ . Це число будемо називати вагою елемента  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Будемо вважати, що ваги всіх об'єктів підпорядковані умові нормування  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 1$ .

Кожен елемент матриці  $a_{ij}$  є відношенням ваги  $i$ -го елемента  $A_i$  до ваги  $j$ -го елемента  $A_j$ , тобто  $a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$  для всіх номерів  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} \omega_1/\omega_2 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & \omega_2/\omega_2 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & \omega_n/\omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1/\omega_2 & \dots & \omega_1/\omega_n \\ \omega_2/\omega_1 & 1 & \dots & \omega_2/\omega_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n/\omega_1 & \omega_n/\omega_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1) Усі елементи матриці  $A$  додатні, причому елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

2) Матриця  $A$  обернено симетрична.

3) Матриця має властивість узгодженості в тому значенні, що для всіх номерів  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$  мають місце рівності  $a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \cdot \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = a_{ik}$ .

4) Число  $n$  є власним значенням матриці  $A$ , а вектор-стовпець ваг  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$  - відповідним власним вектором. Інакше кажучи, виконується рівність  $A\omega = n\omega$ .

Для того щоб переконатися в справедливості четвертого властивості, розглянемо  $k$ -ю компоненту вектора. Вона є результатом множення  $k$ -го рядка матриці  $A$  на вектор  $\omega$ :

$$(a_{k1} \ a_{k2} \ \dots \ a_{kn}) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_n \end{pmatrix} = a_{k1}\omega_1 + a_{k2}\omega_2 + \dots + a_{kn}\omega_n = \frac{\omega_k}{\omega_1}\omega_1 + \frac{\omega_k}{\omega_2}\omega_2 + \dots + \frac{\omega_k}{\omega_n}\omega_n = n\omega_k.$$

Завдяки довільності вибору номера  $k$  рівність можна вважати доведеним.

Лемма. Матриця відносних ваг  $A$  має тільки два різних власних значень  $0$  і  $n$ .

Після введення позначення  $\lambda_{\max} = \max\{0, n\} = n$  рівність можна переписати у вигляді  $A\omega = \lambda_{\max}\omega$ . Саме це рівність лежить в основі МАІ.

### **Матриця порівнянь парами**

Є набір елементів  $A_1, A_2, \dots, A_n$  і потрібно визначити ваги кожного з них, тобто числа  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Матриця порівнянь парами має вигляд:

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Довільний елемент  $a_{ij}$  цієї матриці виражає собою число, що показує у скільки разів вага елемента  $A_i$  більше ваги елемента  $A_j$ . Ці числа призначаються експертами в результаті попарного порівняння об'єктів. Звідси і походить найменування цієї матриці.

В ідеальному випадку матриця порівнянь парами повинна в точності збігатися з матрицею відносних ваг. Насправді це відбувається далеко не завжди, проте, необхідно прагнути до того, щоб розбіжність між ними була якомога менше. Матриця порівнянь парами повинна мати усі перераховані чотири властивості матриці відносних ваг.

### *Алгоритм МАІ*

Метод аналізу ієрархій передбачає виконання таких трьох етапів.

I. З залученням експерта формується матриця порівнянь парами  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . Для заповнення матриці розміру від експерта необхідно отримати  $\frac{n(n-1)}{2}$  суджень. Властивості 1-2 матриці порівнянь парами завжди легко можна виконати, а ось третя властивість виконується не завжди. Крім того, у матриці парних порівнянь максимальне власне значення найчастіше не збігається з  $n$ . Можна довести, що  $\lambda_{\max} \geq n$ , причому рівність тут має місце тоді і тільки тоді, коли матриця  $A$  узгоджена.

Автор МАІ, Т. Сааті, ввів спеціальний числовий показник  $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$  який називається індексом сумісності, і оцінює «ступінь невиконання» властивості узгодженості. Так, якщо індекс спільності не перевищує 0.1, то матриця парами рівнянь  $p$  узгоджена і можна переходити до наступного етапу. В іншому випадку рекомендується провести процедуру корекції.

II. На другому етапі використовують четверту властивість матриці порівнянь парами. А саме, застосовуючи відповідні чисельні методи, слід знайти максимальне власне значення  $\lambda_{\max}$  матриці  $A$ .

III. Далі, підставивши  $\lambda_{\max}$  в  $A\omega = \lambda_{\max}\omega$  отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь. Знайдене рішення  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  складатиме шуканий ваговий вектор.

### *Спрощений метод МАІ*

Постоїмо матрицю порівнянь парами, що задовольняє властивостям 1-3. Діагональні елементи матриці парних порівнянь відомі - це одиниці. Далі

виділяється об'єкт («зразок»), з яким експерту найзручніше порівнювати всі інші об'єкти. Цьому об'єкту привласнюють перший номер. Решта об'єктів можуть бути пронумеровані у будь-який спосіб. Далі експерту пропонують порівняти вагу першого об'єкта з вагою другого об'єкта і вказати додатне число, що показує у скільки разів вага першого об'єкта більше ваги другого об'єкта, тобто отримуємо елемент матриці  $a_{12}$ . І т. д. Поки не отримаємо перший рядок матриці  $A$ . Інші елементи матриці  $A$  можна знайти за формулами  $a_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j} = a_{1j} / a_{i1}$ , для всіх  $i, j = 2, \dots, n$ . Після того як матрицю  $A$  зазначеним способом побудовано, можна знайти ваговий вектор  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ . Його компоненти обчислюються за формулою

$$\omega_i = \frac{a_{1n}}{a_{1i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \omega_n = 1.$$

### ***Спрощений варіант МАІ на основі схеми послідовного порівняння об'єктів***

Виявляється, спрощений варіант МАІ можна також реалізувати, взявши за основу не елемент першого рядка матриці порівнянь парами, а й інші визначені набори із  $n-1$  елементів матриці порівнянь парами.

Розглянемо, наприклад, набір елементів  $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n}$ . Цьому набору відповідає наступна схема послідовного порівняння. З наявного набору об'єктів довільно вибирається якийсь один. Йому присвоюється перший номер. Для нього з метою подальшого порівняння підбирається інший об'єкт (якому присвоюється другий номер), найбільш «відповідний» для порівняння з першим. В результаті порівняння стає відомим елемент  $a_{12}$ . Подальші дії аналогічні: для другого об'єкта підбирається найбільш «зручний» для порівняння третій об'єкт; в результаті порівняння стає відомий елемент  $a_{23}$  і т.д. Останній стовпець побудованої матриці буде шуканим (ненормованим) ваговим вектором.

### ***Застосування МАІ до вирішення багатокритеріальних задач***

Звернемося до багатокритеріальної задачі з векторним критерієм  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  заданим на кінцевій множині можливих рішень. Припустимо, що для ЛПР кожен із критеріїв бажано максимізувати.

Відповідно до МАІ найкращим рішенням  $x^* \in X$  буде рішення, яке приносить найбільше можливе значення «аддитивній згортці» критеріїв



$\sum_{i=1}^m \omega_i f_i(x)$ , тобто  $\sum_{i=1}^m \omega_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \omega_i f_i(x)$ . При цьому додатні коефіцієнти

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$   $\sum_{i=1}^m \omega_i f_i(x)$  визначаються на основі МАІ (або його спрощеного варіанту). З цією метою експерту для порівняння за важливістю пропонується набір критеріїв  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , які виступають в якості порівнюваних об'єктів.

Далі здійснюється максимізація адитивної згортки на множині можливих рішень  $X$ . В результаті буде отримано рішення  $x^*$ , яке згідно МАІ слід вибирати.

Зауваження. Рішення багатокритеріальної задачі на основі МАІ не має строгого обґрунтування. В першу чергу це відноситься до призначення експертом елементів матриці парних порівнянь, які носять суб'єктивний характер. Друге «слабке місце» МАІ пов'язано зі способом скаляризації багатокритеріальної задачі тому вибір того чи іншого способу скаляризації (згортки) в сильному ступені впливає на точку максимуму згортки.

## Лекція №5

### Методи обробки експертних оцінок

Залежно від цілей експертного оцінювання і методу обліку експертних оцінок виникають такі основні задачі:

- 1) побудова узагальненої оцінки понять і об'єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;
- 2) побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об'єктів кожним з експертів;
- 3) визначення відносних ваг взаємозв'язку об'єктів;
- 4) визначення залежностей між ранжуванням;
- 5) визначення узгодженості оцінки експертів;
- 6) оцінка надійності обробки результатів.

### Прямий метод отримання та узгодження експертних оцінок

Нехай мається на увазі безперервну зміну оцінюваного параметра. Тоді зміна рівня  $\mu(y)$  в проміжках між оцінками  $y$ , як правило, апроксимується прямою. Відрізняються три основних типи відповідей експертів, представлених на рис. 5.1.

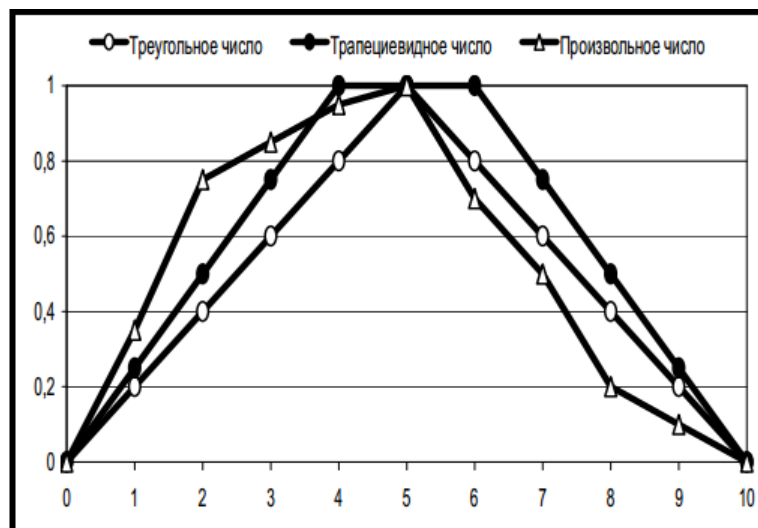


Рис. 2.1 Основні типи лінеаризованого представлення нечітких чисел

Процедура отримання узгодженого думки експертів може бути задана одним з двох способів:

- способом логічного згортання;
- способом арифметико-логічного згортання.

Перший спосіб полягає в спільному виконанні логічних дій з множинами чітких оцінок  $(y_i)_j$  або з інтервалами  $[y_{min}y_{max}]_j$ , і логіко-арифметичних дій з множинами чітких оцінок  $\mu_j(y_i)$ . При цьому два типи логічних дій визначають весь спектр можливих логічних згорток. Приклади операцій логічного згортання думок двох експертів наведено на рис. 5.2.

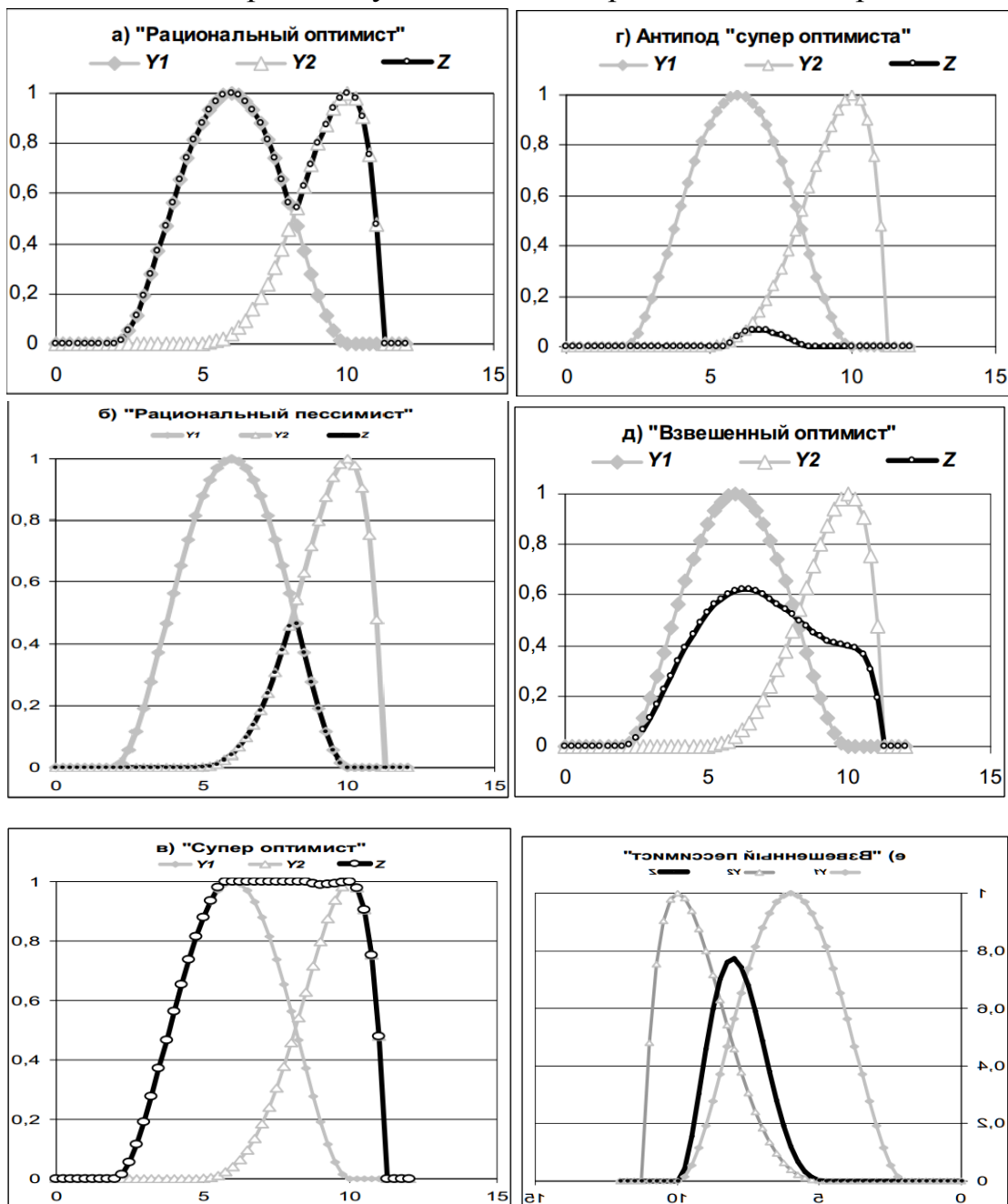


Рис. 5.2 . Приклади операцій логічного згортання думок двох експертів  $(Y_1, Y_2 \rightarrow Z)$

У разі великої кількості експертів при виборі песимістичних моделей результатом згортки може стати близький до нуля рівень на близькому до нуля інтервалі (рис. 5.2 б, г). А при виборі оптимістичній моделі - одиничний рівень на максимальному інтервалі (приклади 5.8а, в, д). І в тому і в іншому випадку узгоджена думка експертів може виявитися некорисним для подальшого практичного застосування.

Другий спосіб отримання узгодженої думки заснований на застосуванні до нечітких чисел традиційного в чіткої статистики підходу до розрахунку математичного очікування. Причому, так як дії з оцінками або з інтервалами виробляються тільки за правилами алгебри, то, на відміну від попереднього способу, тут узгодженості в діях з оцінками рівнів вже не потрібно.

При цьому, однак, виникає додаткова трудність, пов'язана з тим, що операції підсумовування множин чисел (зокрема, інтервалів) в загальному випадку є багатозначними.

Тому для отримання однозначної згортки значень рівня нечіткого результату знову доводиться застосовувати будь-який варіант логічного згортання.

На рис. 5.3 показано результат операції обчислення середнього арифметичного з думок двох експертів.

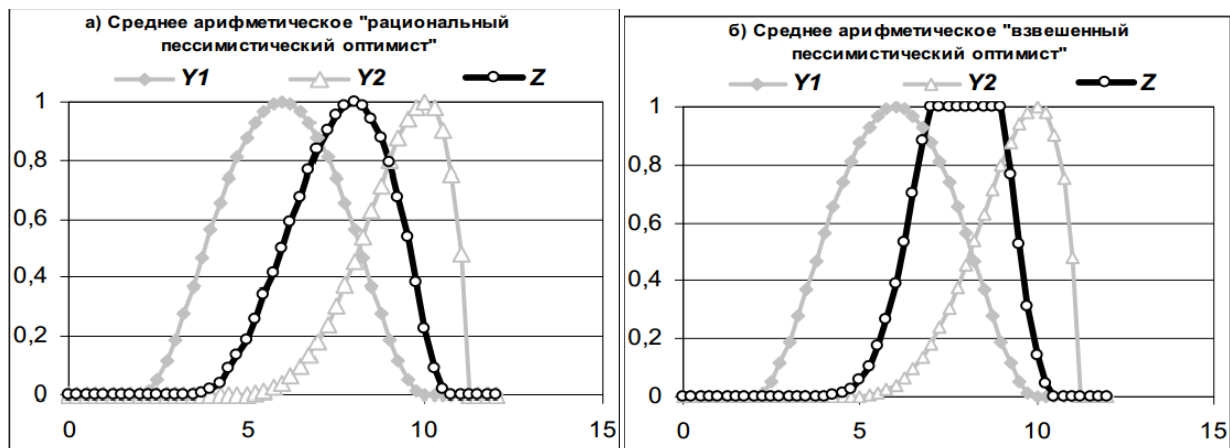


Рис. 5.3. Приклади операцій середнього арифметичного згортання думок двох експертів ( $Y_1, Y_2 \rightarrow Z$ )

Наведені вище приклади дозволяють виявити ще один істотний недолік прямого методу узгодження - залежність результату не тільки від експертних оцінок, а й від суб'єктивної думки особи, що приймає рішення (ОПР).

## Застосування методу аналізу ієрархій для оцінювання рівня компетенції експертів

Експерти першої групи виробляють попарне порівняння рівня компетенції експертів другої групи. Оцінки повинні бути виражені додатною величиною  $p_{ij} \in R^+, i, j, \dots, Q_2$ . Дана оцінка є відповіддю на питання про те, наскільки (у скільки разів) компетентність  $i$ -го експерта вище компетентності  $j$ -го експерта. Очевидно, що при більш високій компетентності  $i$ -го експерта  $p_{ij} > 1$ . При менш високою компетентності  $i$ -го експерта  $p_{ij} < 1$ . Якщо ж віддати пріоритет нікому не вдається,  $p_{ij} = 1$ . Остання умова виконується звичайно при  $i = j$ .

Ідеальний теоретичний результат такої процедури порівняння (одним експертом першої групи) можна представити у вигляді узгодженої матриці:

$$P_{q_1(Q_2, Q_2)} = \begin{bmatrix} \frac{p_1}{p_1} & \frac{p_1}{p_2} & \frac{p_1}{p_3} & \dots & \frac{p_1}{p_{Q_2}} \\ \frac{p_2}{p_1} & \frac{p_2}{p_2} & \frac{p_2}{p_3} & \dots & \frac{p_2}{p_{Q_2}} \\ \frac{p_3}{p_1} & \frac{p_3}{p_2} & \frac{p_3}{p_3} & \dots & \frac{p_3}{p_{Q_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_{Q_2}}{p_1} & \frac{p_{Q_2}}{p_2} & \frac{p_{Q_2}}{p_3} & \dots & \frac{p_{Q_2}}{p_{Q_2}} \end{bmatrix}$$

де  $p_i, i = 1, \dots, Q_2$  є шукані рівні «компетентності» експертів другої групи.

Ця матриця має три очевидних властивості узгодженості:

$$p_{ij} = p_i/p_j = 1 \text{ при } i = j; \quad p_{ij} = 1/p_{ji} \text{ при } i, j; \quad p_{ij} = p_{ik} * p_{kj}.$$

Якщо експерт ідеально задав тільки перший рядок матриці:

$$P_{Q_1}(1) = \left[ 1, \frac{p_1}{p_2}, \frac{p_1}{p_3}, \dots, \frac{p_1}{p_{Q_2}} \right], \text{ то з урахуванням властивості } p_{ij} = 1 \text{ при } i = j.$$

Всі інші рядки узгодженої матриці можна просто обчислити:

$$p_{ij} = (p_i/p_1)^* (p_1/p_j) \text{ при } i < j, \text{ після чого } p_{ij} = \frac{1}{(p_j/p_i)} \text{ } i > j.$$

Тобто вектор  $\bar{p}_{(Q_2)} = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_{Q_2}]^T$ , неважко отримати основне співвідношення методики аналізу ієрархій:  $P_{q_1(Q_2, Q_2)} * \bar{p}_{(Q_2)} = Q_2 * \bar{p}_{(Q_2)}$ .

Вектор  $\bar{p}_{(Q_2)}$  є власним вектором матриці, відповідному власному числу  $Q_2$ . При цьому на справедливість основного співвідношення ніяк не впливає умова нормування рівнів  $P_{q_1(Q_2, Q_2)} * \frac{\bar{p}_{(Q_2)}}{|\bar{p}_{(Q_2)}|} = Q_2 * \frac{\bar{p}_{(Q_2)}}{|\bar{p}_{(Q_2)}|}$ . Якщо тепер відомості,

отримані від всіх експертів першої групи усереднити, то як рішення задачі оцінювання рівнів «компетентності» експертів другої групи можна вибрати нормований власний вектор з системи рівнянь:

$$\left[ \frac{1}{Q_1} * \sum_{q_1=1}^{Q_1} P_{q_1(Q_2, Q_2)} \right] * \frac{\bar{p}_{(Q_2)}}{|\bar{p}_{(Q_2)}|} = \lambda_{max} * \frac{\bar{p}_{(Q_2)}}{|\bar{p}_{(Q_2)}|},$$

де  $\lambda_{max}$  - максимальне власне число.

У практичних розрахунках отриманої системи можна скористатися наближеними значеннями:

$$\tilde{p}_{q_2} = \sqrt[Q_2]{\prod_{j=1}^{Q_2} \left[ \frac{1}{Q_1} * \sum_{q_1=1}^{Q_1} P_{q_1(Q_2, Q_2)} \right]}_{q_2, j}, \quad i = 1, \dots, Q_2;$$

$$\tilde{\lambda}_{max} = \frac{1}{Q_2} * \bar{E}_{(Q_2)}^T * \left[ \frac{1}{Q_1} * \sum_{q_1=1}^{Q_1} P_{q_1(Q_2, Q_2)} \right] * \frac{\tilde{p}_{(Q_2)}}{|\tilde{p}_{(Q_2)}|},$$

де  $\bar{E}_{(Q_2)}^T$  - одиничний вектор,  $\tilde{p}_{(Q_2)}$  - вектор наближених значень.

Величиною  $\delta = |\tilde{\lambda}_{max} - Q_2| / (Q_2 - 1)$  можна наближено характеризувати ступінь відхилення матриці опитування експертів від ідеального узгодженого виду.

## **Групова експертна оцінка об'єктів при безпосередньому оцінюванні**

Нехай  $m$  експертів провели оцінку  $n$  об'єктів по  $l$  показникам. Результати оцінювання представлені величинами,  $x_{ij}^h$  де  $i$  - номер об'єкта,  $j$  - номер експерта,  $h$  - номер показника. У якості групової оцінки візьмемо

$$x_i = \sum_{h=1}^l \sum_{j=1}^m q_h x_{ij}^h k_j, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

де  $q_h$  - коефіцієнти ваг показників порівняння об'єктів,  $k_j$  - коефіцієнти компетентності експертів.  $\sum_{h=1}^l q_h = 1, \sum_{j=1}^m k_j = 1, q_h = \sum_{j=1}^m q_{hj} k_j$ .

Коефіцієнти компетентності експертів можна визначити по апостеріорного даними, тобто за результатами оцінки об'єктів. Основною ідеєю цього обчислення є припущення про те, що компетентність експерта слід оцінювати за рівнем узгодженості його оцінок з груповою оцінкою об'єктів.

Алгоритм обчислення групових оцінок при  $h=1$ :

1) Початкові умови при  $t = 0$   $k_j^0 = \frac{1}{m}$  ( $j = \overline{1, m}$ ).

2) Рекурентні співвідношення для  $t = 1, 2, 3 \dots$

а)  $x_i^t = \sum_{j=1}^m x_{ij} k_j^{t-1}$ , ( $i = \overline{1, n}$ );

б)  $\lambda^t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^t x_{ij}$ ;

в)  $k_j^t = \frac{1}{\lambda^t} \sum_{i=1}^n x_{ij} x_i^t$ , ( $j = \overline{1, m-1}$ );

г)  $k_m^t = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} k_j^t$ .

3) Ознака закінчення ітераційного процесу  $\max(|x_i^t - x_i^{t-1}|) < E$ .

Збіжність даної ітераційної процедури доведена в літературі для випадку, коли індивідуальні оцінки невід'ємні, а кожна група експертів не оцінює об'єкти своєї групи. У більшості практичних завдань ці умови виконуються, що доводить збіжність алгоритму.

## Лекція № 6-7

### Нечіткий багатокритеріальний аналіз варіантів

Задача багатокритеріального аналізу полягає в упорядкуванні елементів множини  $P$  за критеріями із множини  $G$ .

Нехай  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  – множина варіантів, які підлягають багатокритеріальному аналізу;  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  – множина критеріїв, за якими оцінюють варіанти.

Нехай  $\mu_{G_i}(P_j)$  – число в інтервалі  $[0, 1]$ , відповідно до якого оцінюється варіант  $P_j \in P$  за критерієм  $G_i \in G$ : чим більше число  $\mu_{G_i}(P_j)$ , тим кращий варіант  $P_j$  за критерієм  $G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, k}$ . Тоді критерій  $G_i$  можна зобразити у вигляді нечіткої множини  $\tilde{G}_i$  на універсальній множині варіантів  $P$ :

$$G_i = \left\{ \frac{\mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}, \quad (6.1)$$

де  $\mu_{G_i}(P_j)$  – ступінь належності елемента  $P_j$  нечіткій множині  $\tilde{G}_i$ .

Знаходити ступені належності нечіткої множини (6.1) зручно методом побудови функції належності на основі порівнянь парами.

Для кожної пари елементів універсальної множини експерт оцінює переважання одного елемента над іншим стосовно властивості нечіткої множини. Такі порівняння парами зручно подавати у вигляді матриці

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix},$$

де  $a_{ij}$  – рівень переважання елемента  $x_i$  над  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), який визначається за дев'ятибальною шкалою Сааті:

- 1, якщо перевага елемента  $x_i$  над елементом  $x_j$  відсутня;
- 2, якщо перевага елемента  $x_i$  над елементом  $x_j$  майже слабка;
- 3, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  слабка;
- 4, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  майже суттєва;
- 5, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  суттєва;
- 6, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  майже явна;
- 7, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  явна;



– 8, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  майже абсолютна;

– 9, якщо перевага  $x_i$  над  $x_j$  абсолютна.

Матриця порівнянь парами є діагональною й обернено симетричною ( $a_{ji} = 1/a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ).

Ступені належності беруть такими, що дорівнюють відповідним координатам власного вектора  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  матриці порівнянь парами  $A$ :

$$\mu(x_i) = w_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Власний вектор знаходять із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} AW = \lambda_{\max} W, \\ w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1, \end{cases} \quad (6.3)$$

де  $\lambda_{\max}$  – максимальне власне значення матриці  $A$ .

Зауваження. Матриця порівнянь парами повинна мати властивість транзитивності, тобто  $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ , однак на практиці це відбувається далеко не завжди. Щоб уникнути одержання оцінки компонентів функції належності з похибкою, застосовують процедуру корекції.

Згідно з цим методом необхідно сформувати матриці порівнянь парами варіантів за кожним критерієм. Загальна кількість таких матриць дорівнює кількості критеріїв. Найкращим варіантом буде той, який одночасно кращий за всіма критеріями. Нечітке рішення  $\tilde{D}$  визначається як перетинання частинних критеріїв:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \tilde{G}_1 \cap \tilde{G}_2 \cap \dots \cap \tilde{G}_n = \\ &= \left\{ \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_1)}{P_1}, \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_2)}{P_2}, \dots, \frac{\min_{i=1, n} \mu_{G_i}(P_k)}{P_k} \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Відповідно до отриманої нечіткої множини  $\tilde{D}$  найкращим слід уважати той варіант, який має найбільший ступінь належності:

$$D = \arg \max (\mu_D(P_1), \mu_D(P_2), \dots, \mu_D(P_k)).$$

При нерівноважних критеріях ступені належності нечіткої множини  $\tilde{D}$  знаходять так:

$$\mu_D(P_j) = \min_{i=1, n} (\mu_{G_i}(P_j))^{\alpha_i}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (6.5)$$

де  $\alpha_i$  – коефіцієнт відносної важливості критерію  $G_i$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ .

Показник степеня  $\alpha_i$  у формулі (6.5) концентрує нечітку множину  $\tilde{G}_i$  відповідно до ступеня важливості критерію  $G_i$ . Коефіцієнти відносної важливості критеріїв можна визначити різними методами, наприклад за допомогою порівнянь парами за шкалою Сааті.

## Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги

Нехай на множині альтернатив  $X$  задано деяку сукупність із  $m$  ознак, що характеризують кожну альтернативу. Нехай інформацію про результати порівняння пар альтернатив за кожною  $j$ -ю ознакою подано у вигляді відповідного відношення переваги  $R_j$ . Спочатку будемо вважати, що всі ці відношення мають однакову важливість, тобто на множині  $X$  є  $m$  відношень переваги. На основі цієї інформації необхідно вибрати найкращу альтернативу  $x$  із множини  $\{X, R_1, R_2, \dots, R_m\}$ .

Нехай відношення переваги  $R_j$  характеризуються заданими функціями корисності  $f_j: X \rightarrow R$ . При цьому значення кожної такої функції слід розуміти як числову оцінку альтернативи  $x$  за  $j$ -ю ознакою. Чим більшою є величина оцінки  $f_j(x)$ , тим більший ступінь переваги за цією ознакою має альтернатива  $x$ . Задача ж полягає в тому, щоб відшукати альтернативу, що має найбільші оцінки за всіма ознаками заданої їх сукупності.

Кожна з функцій  $f_j(x)$  описує звичайне відношення переваги  $R_j$  на множині  $X$ . Кожне з цих відношень можна подати у вигляді

$$R_j = \{(x, y) | x, y \in X, f_j(x) \geq f_j(y)\}$$

Побудуємо перетинання цих відношень:  $Q_1(x, y) = \bigcap_{j=1}^m R_j(x, y)$ . Оскільки всі  $R_j$  являють собою звичайні (чіткі) відношення переваги, то функція належності має вигляд

$$\mu_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x, y) \in R_j, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin R_j. \end{cases}$$

Тоді функція належності  $\mu_{Q_1}$  перетину  $Q_1$  цих відношень визначається формулою

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min(\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), \dots, \mu_m(x, y)). \quad (6.6)$$

Розглянемо більш загальний випадок, коли відношення переваги  $R_j$  мають різний ступінь важливості та описані нечітко.

У такому випадку згортка  $Q_1$  початкових відношень переваги  $R_j$  з урахуванням значень вагових коефіцієнтів  $w_j, j = \overline{1, m}$ , причому  $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ , має значення функції належності

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min(w_1 \mu_1(x, y), w_2 \mu_2(x, y), \dots, w_m \mu_m(x, y)),$$

яке фактично являє собою функцію належності нечіткого відношення переваги.

Оскільки згортка  $Q_1$  як деяке узагальнене відношення переваги не є, взагалі кажучи, рефлексивним і не дозволяє врахувати можливі розбіжності між значеннями відносної важливості відношень  $R_j$ , що входять у нього, то часто для розв'язання подібних задач використовується згортка  $Q_2$  іншого вигляду:

$$\mu_{Q_2}(x, y) = \sum_{j=1}^m w_j \mu_j(x, y). \quad (6.7)$$

Отримане відповідно до згортки  $Q_2$  узагальнене відношення переваги  $\mu_{Q_2}(x, y)$  є рефлексивним в силу адитивності й рефлексивності початкових відношень  $R_j$ , що входять у неї, і дозволяє одержати додаткову інформацію й тим самим звузити клас реальних виборів альтернатив.

Для розв'язування багатокритеріальної задачі раціонального вибору невідоміючих альтернатив рекомендується така процедура.

1. Побудувати нечітке відношення переваги  $Q_1$  як перетинання початкових відношень переваги  $R_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Функцію належності цього відношення визначити за формулою (6.6). Тоді множина невідоміючих альтернатив на множині  $(X, Q_1)$  матиме вигляд

$$\mu_{Q_1}^{HD}(x) = 1 - \sup_{y \in X} (\mu_{Q_1}(y, x) - \mu_{Q_1}(x, y)) \quad (6.8)$$

Побудувати узагальнене нечітке відношення переваги  $Q_2$  як згортку (6.7) початкових відношень переваги  $R_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  і на його основі визначити нечітку підмножину невідоміючих альтернатив на множині  $(X, Q_2)$ :

$$\mu_{Q_2}^{HD}(x) = 1 - \sup_{y \in X} (\mu_{Q_2}(y, x) - \mu_{Q_2}(x, y)) \quad (6.9)$$

Ця функція впорядковує альтернативи за ступенем невідоміювання.

3. Знайти перетинання отриманих нечітких множин  $\mu_{Q_1}^{HD}(x)$  і  $\mu_{Q_2}^{HD}(x)$ :

$$\mu^{HD}(x) = \min(\mu_{Q_1}^{HD}(x), \mu_{Q_2}^{HD}(x)).$$

4. Раціональним при цьому слід уважати вибір альтернатив із множини

$$X^{HD} = \left\{ x \mid x \in X, \mu^{HD}(x) = \sup_{x \in X} \mu^{HD}(x') \right\}.$$

Найбільш раціональним слід уважати вибір такої альтернативи із множини  $X^{HD}$ , що має найбільший ступінь невідоміювання.

## Прийняття рішень при якісній невизначеності на основі нечіткого опису стану системи та наслідків

Нехай  $\epsilon$  множина альтернатив  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , вибір однієї з них залежить від станів середовища  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Відомо, якщо система перебувала в стані  $x_j$  і вибрано альтернативу  $a_i$ , то її корисністю буде  $u_{ij}$ . Для різних альтернатив і можливих станів маємо матрицю  $m \times n$ :

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}.$$

При відомому стані системи  $x_j \in X$  кращою є альтернатива, що має найбільшу корисність:  $u_0 = \max_{i=1,m} u_{ij}$ . Однак, якщо стан системи або корисність альтернатив відомі нечітко, то оптимальну альтернативу можна подати тільки у вигляді нечіткої множини  $\tilde{A}_0$  з функцією належності  $\mu_{\tilde{A}_0}(a_i)$ . Тут можливі три випадки.

Нечіткий стан системи. Нехай стан системи описується нечіткою множиною

$$\tilde{X} = \bigcup_k \mu_{\tilde{X}}(x_k) / x_k, \quad x_k \in X.$$

У цьому випадку корисність альтернативи не може бути визначена точно. Однак, скориставшись інформацією про стан системи, її можна подати у вигляді

$$\tilde{U}_i = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i}(u_k) / u_k, \quad (6.10)$$

де  $u_k = u_{ik}$ ;  $\mu_{\tilde{U}_i}(u_k) = \mu_{\tilde{X}}(x_k)$ .

Тут і далі передбачається, якщо деякий елемент області визначення під час обчислень з'являється  $k$  разів з різними значеннями функції належності  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ , то ступінь його належності  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$ , де  $\mu_1 + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2$ .

Вибір оптимальної альтернативи ґрунтується на розгляді максимальної корисності альтернативи і ступеня належності їй різних значень корисності.

Максимізуючою множиною функції  $f$  на множині  $Y$  називають нечітку множину  $M(f)$ , таку, що ступінь належності до якої деякого  $y$  характеризує близькість  $f(y)$  до  $\sup f$ . Аналогічно максимізуючою

множиною  $M(Y)$  множини  $Y$  називають нечітку підмножину, ступінь належності до якої для  $y \in Y$  відображає в деякому розумінні близькість  $y$  до  $\sup Y$ .

Розглянемо множину  $Y$ , що містить усі можливі значення корисності для заданого нечіткого стану:  $Y = \bigcup_{i=1}^m S(U_i)$ . Визначимо максимізуючу множину для альтернативи  $a_i \in A$ :

$$\tilde{U}_{im} = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k) / u_k,$$

де  $\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k) = (u_k : u_{\max})^n$ ;  $u_{\max} = \sup Y$ ;  $n$  – ціле число, вибране залежно від задачі.

Далі визначимо множину  $\tilde{U}_{i0}$  як перетин нечітких множин  $\tilde{U}_{im}$  і  $\tilde{U}_i$ :

$$\mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k) = \min(\mu_{\tilde{U}_{im}}(u_k), \mu_{\tilde{U}_i}(u_k)).$$

Множину, що являє собою оптимальну альтернативу, знаходимо таким чином:  $\mu_{\tilde{A}_0}(a_i) = \max_k \mu_{\tilde{U}_{i0}}(u_k)$ . Очевидно, що кращою буде альтернатива  $a_0$ , яка має найбільше значення функції належності множині  $\tilde{A}_0$ :  $\mu_{\tilde{A}_0}(a_0) = \max_i \mu_{\tilde{A}_0}(a_i)$ .

Нечіткі корисності. Нехай тепер корисність  $U_{ij}$ , що пов'язана з альтернативою  $a_i$  при стані  $x_j$ , є нечіткою:

$$\tilde{U}_{ij} = \bigcup_k \mu_{U_{ij}}(u_k) / u_k. \quad (6.11)$$

Тоді матриця корисностей матиме вигляд

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \dots & \tilde{U}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{U}_{m1} & \dots & \tilde{U}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Якщо відомо стан системи  $x_j \in X$ , то визначення оптимальної альтернативи аналогічне попередньому випадку: якщо  $x_j$  чітке, то множина  $\tilde{U}_i$  визначається рівністю  $\tilde{U}_i = \tilde{U}_{ij}$ .

Нечіткі корисності та стан системи. Нечітка корисність альтернативи  $a_i$  при деякому нечіткому стані системи, яку позначено через  $\tilde{U}_i^*$ , має вигляд

$$\tilde{U}_i^* = \bigcup_k \mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{U}_k) / \tilde{U}_k, \quad (6.12)$$

де  $\tilde{U}_k = \tilde{U}_{ik}$ ;  $\mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{U}_k) = \mu_{\tilde{X}}(x_k)$ .

Нечітка множина  $\tilde{U}_i^*$  складається, у свою чергу, з нечітких множин. Вона може бути зведена до нечіткої множини на чітких значеннях корисностей. Якщо елемент множини  $\tilde{U}_i^* \in$

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(\tilde{U}_k) / \tilde{U}_k = \mu_{\tilde{U}_i^*}(\mu_{\tilde{U}_k}(u_1) / u_1) / (\mu_{U_k}(u_1) / u_1),$$

то значення ступеня належності чіткого значення  $u_1$  множині  $\tilde{U}_i^*$  визначається формулою

$$\mu_{\tilde{U}_i^*}(u_1) = \min(\mu_{\tilde{X}}(x_k), \mu_{\tilde{U}_k}(u_1)). \quad (6.13)$$

Ця процедура повторюється для всіх  $k$ , після чого множина  $\tilde{U}_i^*$  буде містити корисності  $u_1$  і їхні ступені належності, тобто буде зведена до множини  $\tilde{U}_{ir}^*$ :

$$\tilde{U}_{ir}^* = \mu_{\tilde{U}_i^*}(u_1)/u_1. \quad (6.14)$$

Потім для  $\tilde{U}_i = \tilde{U}_{ir}^*$  повторюється вже описана процедура знаходження нечіткої множини  $\tilde{A}_0$  кращої альтернативи.

### **Вибір рішень при ймовірнісній невизначеності в умовах неточності й невизначеності опису наслідків**

Розглянемо метод аналізу рішень у випадку, коли наслідки альтернатив відомі неточно та ймовірності їх настання оцінюються за допомогою функції належності. На рис. 6.1 зображено просте дерево рішень. Необхідно вибрати одне із двох рішень, які описуються стратегіями  $A$  і  $B$  і залежать від різних випадкових подій. При виборі стратегії  $A$  рішення, що має корисність  $u_1$ , досягається з імовірністю  $p$ , а рішення з корисністю  $u_2$  – з імовірністю  $1-p$ . Використовуючи правила теорії очікуваної корисності, цю стратегію вибирають тоді і тільки тоді, коли  $pu_1 + (1-p)u_2 > qv_1 + (1-q)v_2$ . Тут величина й ступінь переваги однієї альтернативи над іншою точно невідомі.

Нехай  $\mu_A(a)$ ,  $\mu_B(b)$  – ступені належності  $a$  і  $b$  множинам очікуваних корисностей стратегій  $A$  і  $B$ , тоді відповідно до принципу узагальнення

$$\mu_A(a) = \max_{pu_1 + (1-p)u_2} (\min(\mu_P(p), \mu_{A_1}(u_1), \mu_{A_2}(u_2))); \quad (6.15)$$

$$\mu_B(b) = \max_{qv_1 + (1-q)v_2} (\min(\mu_Q(q), \mu_{B_1}(V_1), \mu_{B_2}(V_2))), \quad (6.16)$$

де  $\mu_P(p)$  – ступінь належності  $p$  множині можливих значень для цієї ймовірності. Розподіли очікуваної корисності для кожної стратегії, обчислені за формулами (6.15) і (6.16), зображено на рис. 6.2. Спостерігається значне перекриття між двома розподілами, і хоча максимуму функція  $\mu_A(x)$  набуває при більшому значенні  $x$ , ніж функція  $\mu_B(x)$ , цього недостатньо для твердження, що  $A$  краще, ніж  $B$ .

Щоб оцінити ступінь, з яким  $A$  має перевагу над  $B$ , скористаємося таким методом:

$$\mu(X \rightarrow Y) = \mu(-X \cup Y) = \max(1 - \mu(X), \mu(Y)). \quad (6.17)$$

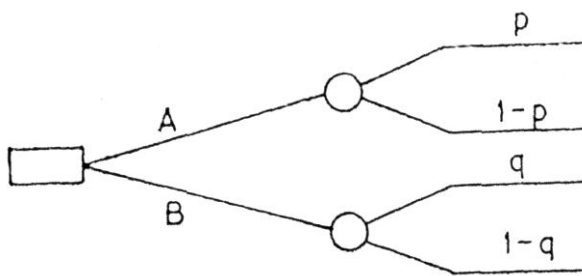


Рис. 6.1. Просте дерево рішень

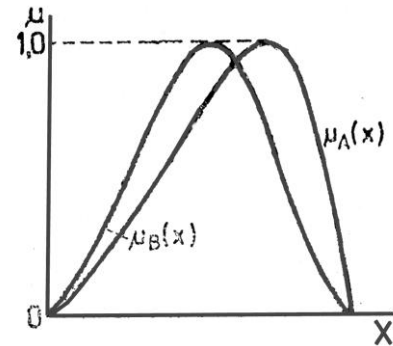


Рис. 6.2. Нечіткий розподіл функції корисності

Як бачимо, ступінь, з яким з деякого нечіткого речення  $X$  впливає інше нечітке речення  $Y$ , є ступенем істинності вислову «або не  $X$ , або  $Y$ », що у свою чергу, дорівнює більшому зі значень ступеня істинності «не  $X$ » і ступеня істинності « $Y$ ». У більш загальній постановці  $X$  і  $Y$  є нечіткими відношеннями між двома змінними  $a$  і  $b$ , які подано функціями належності  $\mu_X(a,b)$  і  $\mu_Y(a,b)$ ,

$$\mu(X \rightarrow Y) = \min_{a,b} (\max(1 - \mu_X(a,b), \mu_Y(a,b))). \quad (6.18)$$

Це означення змісту нечіткого вислову не є єдино можливим, але достатньо ефективно для розглядуваних цілей.

## Лекція № 8-9

### Використання еволюційних методів в інформаційних технологіях

Генетичні алгоритми відносять до області м'яких обчислень. Термін «м'які обчислення» був введений Лофті Заде. Це поняття об'єднує такі області, як нечітка логіка, нейронні мережі, імовірнісні міркування, еволюційні алгоритми, які доповнюють один одного і використовуються для створення гібридних інтелектуальних систем. Перша схема генетичного алгоритму (ГА) була запропонована в 1975 році в Мічиганському університеті Джоном Холландом. Вона заснована на принципах природного відбору Ч. Дарвіна. ГА відносяться до стохастичним методам.

### Основні поняття

**Вектор** - упорядкований набір чисел, які називаються компонентами вектора. Так як вектор можна представити у вигляді рядка його координат, то в подальшому поняття вектора і рядка вважаються ідентичними.

**Логічний вектор** - вектор, компоненти якого приймають значення з двох елементної (булевої) множини, наприклад,  $\{0,1\}$  або  $\{-1,1\}$ .

**Хеммінгова відстань** - використовується для булевих векторів і дорівнює числу компонент що відрізняються в обох векторах.

**Хеммінгов простір** - простір булевих векторів, з введенням на ньому відстанню (метрикою) Хеммінга. У разі булевих векторів розмірності  $n$  розглядається простір, що являє собою множину вершин  $n$ -мірного гіперкуба з хеммінговою метрикою. Відстань між двома вершинами визначається довжиною найкоротшого шляху, що з'єднує їх, виміряного уздовж ребер.

**Хромосома** - вектор (або рядок) з будь-яких чисел. Якщо цей вектор представлено бінарним рядком з нулів і одиниць, наприклад, 1010011, то його отримано або з використанням двійкового кодування, або коду Грея. Кожна позиція (біт) хромосоми називається **геном**.

**Індивідуум (генетичний код, особь)** - набір хромосом (варіант вирішення завдання). Зазвичай особь складається з однієї хромосоми, тому в подальшому особь і хромосома ідентичні поняття.

**Відстань** - хеммінгово відстань між бінарними хромосомами.

**Кроссінговер (кросовер)** - операція, при якій дві хромосоми обмінюються своїми частинами. Наприклад, 1100 & 1010  $\rightarrow$  1110 & 1000.



**Мутація** - випадкова зміна однієї або декількох позицій у хромосомі. Наприклад, 1010011 -> 1010001.

**Інверсія** - зміна порядку проходження бітів в хромосомі або в її фрагменті. Наприклад, 1100 -> 0011.

**Популяція** - сукупність індивідумів.

**Придатність (приспосованість)** - критерій або функція, екстремум якої слід знайти.

**Локус** - позиція гена в хромосомі.

**Алель** - сукупність генів, що розташовані поряд.

**Епістаз** - вплив гена на придатність індивідуума в залежності від значення гена, присутнього в іншому місці. Ген вважають епістатичним, коли його присутність пригнічує вплив гена в іншому локусі.

З наведених вище визначень виходить, що термінологія ГА являє собою синтез властиво генетичних і штучних понять. Так, для поняття, запозиченого з генетики, можна надати його штучний (символічний) аналог.

## Основні принципи роботи ГА:

1. Генеруємо початкову популяцію з  $n$  хромосом.
2. Обчислюємо для кожної хромосоми її придатність.
3. Вибираємо пару хромосом-батьків за допомогою одного із способів відбору.
4. Проводимо кроссінговер двох батьків з ймовірністю  $p_c$ , виробляючи двох потомків.
5. Проводимо мутацію потомків з ймовірністю  $p_m$ .
6. Повторюємо кроки 3-5, поки не буде згенеровано нове покоління популяції, що містить  $n$  хромосом.
7. Повторюємо кроки 2-6, поки не буде досягнуто критерію закінчення процесу.

## Оператори вибору батьків

Існує кілька підходів до вибору батьківської пари.

**Панміксія** - найпростіший оператор відбору. Відповідно до нього кожному члену популяції співставляється випадкове ціле число на відрізку  $[1; n]$ , де  $n$  - кількість особин в популяції. Будемо розглядати ці числа як номери особин, які візьмуть участь в схрещуванні. При такому виборі якісь із членів популяції не будуть брати участь в процесі розмноження, так як

утворюють пару самі з собою. Якісь члени популяції візьмуть участь в процесі відтворення неодноразово з різними особинами популяції.

**Інбридинг** являє собою такий метод, коли перший з батьків вибирається випадковим чином, а другий із батьків — це член популяції найближчий до першого. Тут «найближчим» мається на увазі мінімальна відстань Хеммінга (для бінарних рядків) або евклидова відстань між двома дійсними векторами. Відстань Хеммінга дорівнює числу локусів (розрядів), що відрізняються в бінарному рядку.

При **аутбридинге** також використовують поняття схожості особин. Однак тепер пари батьків формують з максимально далеких особин.

**Селекція** полягає в тому, що батьками можуть стати тільки ті особини, значення пристосованості яких не менше порогової величини, наприклад, середнього значення пристосованості по популяції. Такий підхід забезпечує більш швидку збіжність алгоритму.

Порогова величина в селекції може бути обчислена різними способами. Тому в літературі по ГА виділяють різні варіації селекції. Найбільш відомі з них - це турнірний і рулеточний (пропорційний) відбори.

## Рекомбінація

Оператор рекомбінації застосовують відразу ж після оператора відбору батьків для отримання нових особин-потомків. Значення рекомбінації полягає в тому, що створені нащадки повинні наслідувати генну інформацію від обох батьків. Розрізняють дискретну рекомбінацію і кросинговер.

### Дискретна рекомбінація

**Дискретна рекомбінація (*Discrete recombination*)** в основному застосовується до хромосом з дійсними генами. Основними способами дискретної рекомбінації є власне дискретна рекомбінація, проміжна, лінійна і розширено лінійна рекомбінації.

**Проміжна рекомбінація (*Intermediate recombination*)** може бути застосована лише до дійсних змінних, (до бінарних неможливо). В даному методі попередньо визначається числовий інтервал значень генів потомків, який мусить містити значення генів батьків. Потомки створюються за наступним правилом:

$$\text{Потомок} = \text{Батько 1} + (\text{Батько 2} - \text{Батько 1}),$$

де множник  $\alpha$  - випадкове число на відрізку  $[-d, 1+d]$ ,  $d \geq 0$ . Як зазначають прихильники цього методу, найбільш оптимальне відтворення досягається при  $d = 0,25$ . Для кожного гена створюваного потомка вибирається окремий множник  $\alpha$ .

**Лінійна рекомбінація (Line recombination)** відрізняється від проміжної тим, що множник вибирається для кожного потомка один раз.

## Кросинговер (бінарна рекомбінація)

Рекомбінацію бінарних рядків прийнято називати кросинговером (кросовером) або схрещенням.

**Одноточечний кросинговер (Single-point crossover)** моделюється наступним чином. Нехай є дві батьківські особи з хромосомами  $X = \{x_i, i \in [0; L]\}$  и  $Y = \{y_i, i \in [0; L]\}$ . Випадковим чином визначається точка всередині хромосоми (точка розриву), в якій обидві хромосоми діляться на дві частини і обмінюються ними. Такий тип кросинговеру називається одноточечним, так як при ньому батьківські хромосоми розділяються тільки в однієї випадкової точці.

У **доточковому кросинговері (і багатоточковому кросинговері)** взагалі) хромосоми розглядаються як цикли, які формуються з'єднанням кінців лінійної хромосоми разом.

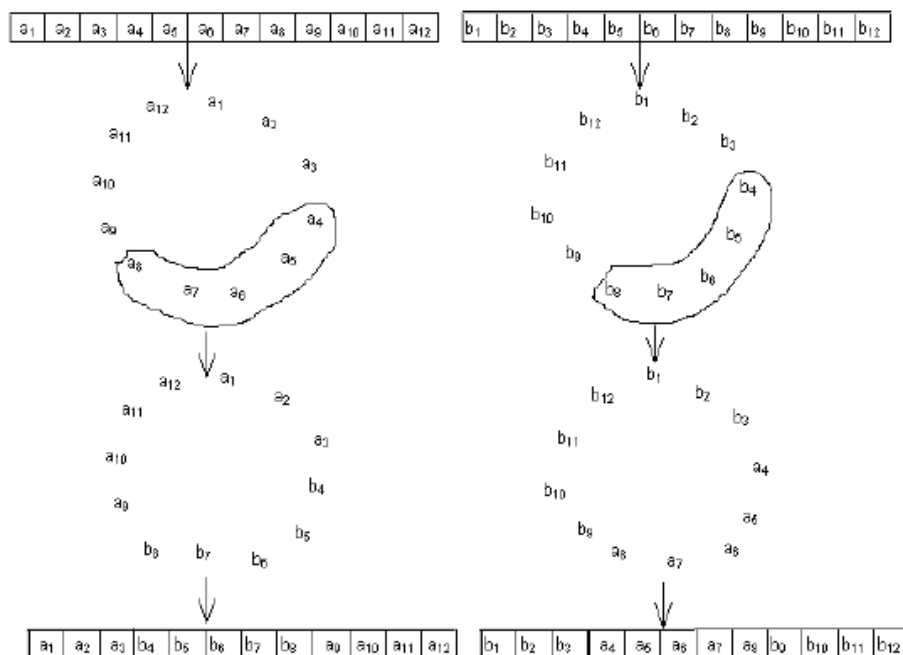


Рис. 7. Двухточечный кроссинговер

Для заміни сегмента одного циклу сегментом іншого циклу потрібно вибір двох точок розрізу. Тобто, одноточковий кросинговер може бути розглянутий як кросинговер з двома точками, але з однією точкою розрізу, зафіксованої на початку рядка.

## Деякі моделі ГА

**Genitor (Whitley).** У даній моделі використовується специфічна стратегія відбору. На кожному кроці тільки одна пара випадкових батьків створює тільки одного потомка, який заміняє не одного з батьків, а одну з найгірших особин популяції. Таким чином, на кожному етапі в популяції оновлюється тільки одна особь.

Дослідження показали, що пошук гіперплоскостей відбувається краще, а збіжність швидше, ніж у класичного ГА.

**СНС (Eshelman).** СНС – це Cross generational elitist selection, Heterogenous recombination, Cataclysmic mutation.

Для нового покоління вибираються N кращих різних особин серед батьків і потомків. Дублювання рядків не допускається.

Для схрещування все особі розбиваються на пари, але схрещуються лише ті пари, між якими відстань Хеммінга більше деякого порогового (також може бути встановлено обмеження на мінімальну відстань між крайніми розрізняються бітами).

При схрещуванні використовується так званий HUX-оператор (Half Uniform Crossover), різновид однорідного кросовера - кожному потомку переходить рівно половина бітів кожного з батьків.

Розмір популяції невеликий. Цим виправдано використання однорідного кросовера.

Даний алгоритм досить швидко сходиться тому, що в ньому немає мутацій. В цьому випадку СНС застосовує cataclysmic mutation: всі рядки, крім найбільш пристосованої особі, піддаються сильній мутації (змінюється близько третини бітів). Таким чином, алгоритм перезапускається і далі продовжує роботу, застосовуючи тільки кросовер.

**Hybrid algorithm (Davis).** Використання гібридного алгоритму дозволяє об'єднати переваги ГА з перевагами класичних методів.

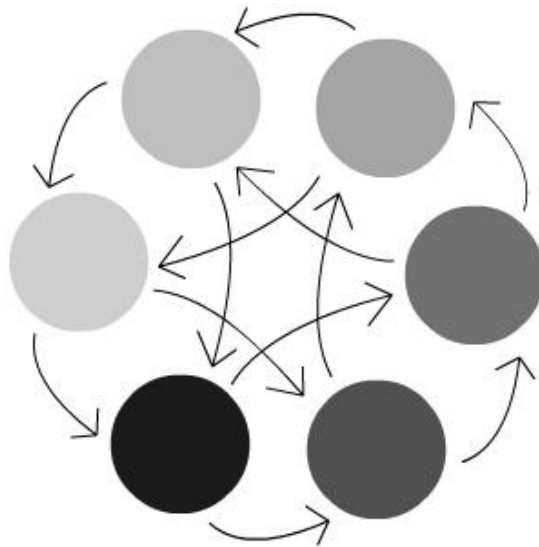
Справа в тому, що ГА дозволяють знаходити задовільне рішення, але знаходження оптимального часто виявляється набагато більш важким завданням в силу стохастичності принципів роботи алгоритму. Тому

виникла ідея використовувати ГА на початковому етапі для ефективного звуження простору пошуку навколо глобального екстремуму, а потім, взявши кращу особь, застосувати один з "класичних" методів оптимізації.

Однак можна використовувати "класичні" методи (hill-climbing, наприклад) і всередині самих ГА. У кожному поколінні отриманий потомок оптимізується цим методом, таким чином, кожна особь досягає локального максимуму, поблизу якого вона знаходиться, після чого піддається відбору, схрещенню і мутації. Такий метод погіршує здатність алгоритму шукати рішення за допомогою відбору гіперплоскостей, натомість зростає ймовірність того, що одна особь потрапить в область глобального максимуму і після оптимізації виявиться рішенням задачі.

**Island Models.** Острівна модель (island model) - модель паралельного генетичного алгоритму. Розіб'ємо популяцію на кілька підпопуляцій. Кожна з них буде розвиватися окремо за допомогою якогось генетичного алгоритму. Таким чином, можна сказати, що ми розселили особі за декількома ізольованими островами.

Деколи (наприклад, кожні 5 поколінь) відбувається міграція - острова обмінюються кількома хорошими особинами.



Так як населеність островів невелика, то підпопуляції будуть схильні до передчасної збіжності. Тому важливо правильно встановити частоту міграції:

- надто часта міграція (або міграція занадто великого числа особин) призведе до змішання всіх підпопуляцій, і тоді острівна модель буде не сильно відрізнятися від звичайного ГА;
- якщо міграція буде занадто рідкою, то вона не зможе запобігти передчасного сходження підпопуляцій.

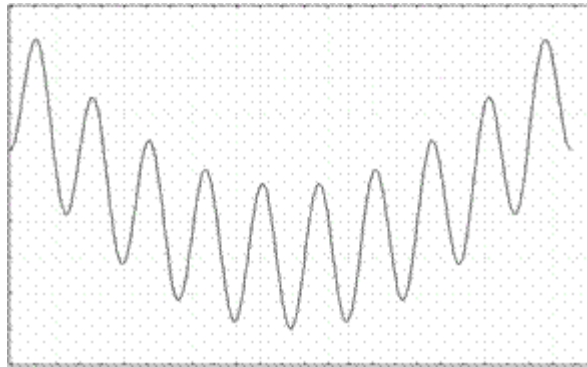
Генетичні алгоритми стохастичного, тому при різних його запусках популяція може сходиться до різних хороших рішень. Острівна модель дозволяє запустити алгоритм відразу кілька разів і поєднати «досягнення» різних островів для отримання найкращого рішення.

## Фактори, що створюють складність для ГА

Властивості функцій пристосованості, що створюють складність для ГА:

- багатоекстремальність: створюється множина помилкових аттракторів. Приклад - функція Растригина:

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i))$$



На картинці зображено графік функції Растригина з одним аргументом.

- Обманливість (deception): функція побудована так, що шаблони малого порядку відводять популяцію до локального екстремуму.

- Ізольованість («пошук голки в копиці сіна»): функція не надає ніякої інформації, що нагадує, в якій області шукати максимум. Лише випадкове потрапляння особи в глобальний екстремум може розв'язати задачу.



- Додатковий шум (noise): значення пристосованості шаблонів сильно розкидані, тому часто навіть хороші гіперплощини малого порядку не проходять відбір, що уповільнює пошук рішення.