Конфліктно-керовані системи
Практичні заняття
8 семестр

Заняття № 1. Матричні ігри. Складання матриці гри. Визначення стратегій гравців

Завдання для аудиторної роботи.

1.1.1. У грі беруть участь два гравці. Кожен з гравців вибирає одне з чисел: 0 або 1. Після цього перший гравець отримує від другого гравця суму вибраних чисел. Записати матрицю гри.

1.1.2. Два студенти, які беруть участь у грі, незалежно один від одного вибирають одне з чисел: 3, 4 або 5. Якщо обидва вибрали одне і те й саме число, то перший студент виграє число очок, яке дорівнює вибраному числу. Інакше виграє другий студент та отримує від першого кількість очок, яка відповідає максимальному з вибраних чисел. Скласти матрицю гри.

1.1.3. Два гравці незалежно один від одного вибирають одне з чисел: -3, -1, 1, 3. Числа, вибрані гравцями, позначимо відповідно x та y. Величина виграшу першого гравця визначається виразом $x+y+xy$. Скласти матрицю гри.

1.1.4. Два учасники гри вибирають по одному з натуральних чисел між 1 і 8. Якщо число, вибране одним з учасників, на одиницю більше числа, вибраного іншим, то цей гравець програє 2 очки. Якщо вибір одного з учасників більше хоча б на 2 одиниці, то цей учасник виграє 1 очко. У разі, коли вибрані гравцями числа співпадають, гра закінчується внічию. Скласти матрицю гри.

1.1.5. Кожен з двох гравців називає один з трьох предметів : камінь, ножиці, папір. Правила гри такі: "папір" перемагає "камінь", "камінь" - "ножиці", "ножиці" - "папір". Гравець, який вибирає предмет, що «виграє», отримує від супротивника одиницю. Якщо обидва гравці виберуть однакові предмети, то гра закінчується внічию. Побудувати матрицю цієї гри.

1.1.6. Гра полковника Блотто [загальна назва великого класу тактичних військових ігор «оборона міста»]. Дві воюючі армії ведуть боротьбу за два пункти. Перша армія (під командуванням полковника Блотто) складається з чотирьох полків; друга (під командуванням капітана Кіже) має три полки. Армія, яка посилає більше полків на той або інший пункт, займає його і знищує усі спрямовані на цей пункт сили протилежної сторони. При цьому вона отримує одиницю, як за зайнятий пункт, так і за кожен знищений полк супротивника. Полковник Блотто і капітан Кіже повинні вирішити, як розподілити сили, щоб виграти якомога більше очок. Скласти матрицю гри.

Завдання для домашньої роботи.

1.2.1. Гра в «парне - непарне число». Один з гравців затискає в руці парне або непарне число дрібних предметів, а другий гравець намагається цю парність відгадати. В разі відгадування він отримує від першого гравця одну одиницю, інакше сам платить одиницю першому гравцеві. Побудувати матрицю гри.

1.2.2. Скласти матрицю наступної гри. Кожен з двох гравців вибирає одне з натуральних чисел, що належать проміжку [1, 7]. Вибрані гравцями числа позначимо відповідно x та y. Числа порівнюються. Якщо $x \geq y$, то перший гравець виграє $x+y-2$ очок, якщо ж $x<y$, то $y-x$ очок виграє другий гравець.

1.2.3. Два гравці незалежно один від одного вибирають одне з чисел, які належать проміжку [1, 5]. Числа, вибрані гравцями, позначимо відповідно x та y. Виграшем першого гравця є значення виразу $(x+y)x+(y-x)y$, якщо воно парне. Інакше воно є виграшем другого гравця. Скласти матрицю гри.

1.2.4. Задана впорядкована множина чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Один з гравців вибирає якесь з цих чисел, а другий відгадує його індекс. Якщо другий гравець відгадав індекс вибраного числа, то він отримує число очок, яке дорівнює порядковому номеру цього числа, інакше він програє це число очок першому гравцеві. Скласти матрицю гри.

1.2.5. Побудувати матрицю **гри «Камінь – вода – ножиці – стекло – папір»**. Два гравці одночасно називають один з п'яти вказаних предметів. Відомо, що вода змочує камінь і папір, ножиці коштують дорожче, ніж вода і камінь, стекло крихкіше, ніж вода і ножиці, папір гнучкіший, ніж ножиці і скло, а камінь товщий, ніж стекло і папір. Гравець, який вибирає предмет, що «виграє», отримує від суперника 5 одиниць виграшу; якщо обидва гравці виберуть однакові предмети, то гра закінчується внічию.

1.2.6. Гра полковника Блотто. Скласти матрицю гри у разі, коли полковник Блотто командує п'ятьма полками, а капітан Кіже – чотирма.

Заняття № 2. Біматричні ігри. Складання матриці гри

Завдання для аудиторної роботи.

2.1.1. Гра «Родинна суперечка». Чоловік та дружина (відповідно 1-й і 2-й гравці) домовляються про те, щоб провести родинний вечір разом, відвідавши кінотеатр або футбольний матч. Спільні відвідини кінотеатру приносять чоловікові помірне задоволення (оцінюване числом 1), а дружині - велике задоволення (оцінюване числом 2). Спільні відвідини футболу доставляють задоволення в зворотних оцінках (чоловікові - 2, дружині - 1). Нарешті, відсутність домовленості нікому задоволення не приносить (виграш, рівний нулю). Записати матрицю гри.

2.1.2. Скласти матрицю **гри «Обмін закритими портфелями»**: Дві люди зустрічаються і обмінюються закритими портфелями, вважаючи, що один з них містить гроші, інший - товар. Кожен гравець може поважати операцію і покласти у портфель товар, про який домовилися, або обдурити партнера, віддавши йому порожній портфель. Якщо кожен з гравців вибрав «поважати операцію», обидва отримують C очок. Якщо один вирішив «обдурити», а іншій «поважати операцію», то перший отримує D очок, другий - c очок. Якщо обидва вибрали «обдурити» - кожен отримує по d очок.

Значення змінних C, D, c, d можуть бути будь-якого знаку, але між ними повинна дотримуватися нерівність: $D > C > d > c$ [це правило було встановлене Дугласом Хофштадтером]. Цей приклад є класичним описом так званої «дилеми ув'язненого».

2.1.3. Гра «Два гравці та банкір». Кожен з гравців має 2 картки: на одній написано «співробітничати», на іншій - «зрадити» (це стандартна термінологія гри «Дилема ув'язненого»). Кожен гравець кладе одну з карток перед банкіром написом вниз. Ніхто з гравців не знає, що вибрав інший гравець. Банкір відкриває картки і говорить про виграш. Якщо обидва вибрали «співробітничати», кожен отримує по 2 очки. Якщо один вибрав «зрадити», іншій «співробітничати», перший отримує 3 очки, другий – 0. Якщо обидва вибрали «зрадити», кожен отримує по 1 очку. Побудувати матрицю гри.

Завдання для домашньої роботи.

2.2.1. «Залік». Гравцями є студент і викладач. Студент, що прийшов здавати залік, може бути добре підготовленим до нього або погано підготовленим. Викладач, що приймає залік, може поставити залік студентові або не поставити. Ситуації, що виникають в цій грі, доставляють гравцям різне моральне задоволення, яке можна оцінити балами: 0, 1, 2, 3. Скласти матрицю гри. Оцінки морального задоволення прийняти за виграші гравців.

2.2.2. Дві конкуруючі фірми визначають для себе, скільки засобів витрачати на рекламу. Ефективність реклами і прибуток кожної фірми зменшується із зростанням витрат на рекламу у конкурента. Обидві фірми приймають рішення збільшити витрати на рекламу, при цьому їх долі ринку і, можливо, об'єми продажів залишаються незмінними, а прибуток зменшується. Межею гонки рекламних бюджетів є прибуток, втім, вони можуть намагатися деякий час працювати і в збиток. Фірми можуть піти на угоду про скорочення витрат на рекламу, але завжди є стимул його порушити. Скласти матрицю гри.

2.2.3. Гра «Перехрестя». Два автомобілісти (гравця) рухаються по двох пересічних дорогах і одночасно під'їжджають до перехрестя. Кожен з них може зупинитися, пропускаючи іншого, або їхати далі. Передбачимо, що кожен з гравців вважає за краще зупинитися, чим постраждати в аварії, і проїхати перехрестя, не зупиняючись, якщо інший зробив зупинку. У завданні вводиться в розгляд негативне число ε. Воно відповідає незадоволенню гравця, який спостерігає за іншим гравцем, що проїжджає перехрестя, тоді як сам він зупинився. Побудувати матрицю гри.

Заняття № 3. Матрична гра з сідловою точкою. Розв'язання гри у чистих стратегіях. Верхня і нижня ціна гри. Визначення чистої ціни гри та оптимальних стратегій гравців.

Завдання для аудиторної роботи.

В наступних прикладах (**3.1.1 - 3.1.4**) знайти нижню та верхню ціни гри, визначити чисту ціну гри, сідлові точки та оптимальні стратегії, якщо вони існують:

3.1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

3.1.2. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

3.1.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

3.1.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

У задачах **3.1.5 - 3.1.7** розглянути матриці ігор, побудовані раніше (це розв’язки задач Заняття 1). З’ясувати, чи мають ті ігри сідлові точки. У разі позитивної відповіді знайти чисту ціну гри та оптимальні стратегії:

3.1.5. Задача 1.2.1.

3.1.6. Задача 1.2.2.

3.1.7. Задача 1.2.3.

3.1.8. Показати, що матрична гра з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, де $a_{ij}=i-j$, має розв’язок у чистих стратегіях та знайти його.

3.1.9. Довести, що матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, де $a_{ij}\le a_{i,j+1}$, $i,j=1..n$, має сідлову точку.

3.1.10. Довести, що матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ де $b_{ij}=a_{i,j}+const$, $i=1..m$, $j=1..n$, мають сідлові точки одночасно.

Завдання для домашньої роботи.

У прикладах **3.2.1 – 3.2.5** знайти нижню та верхню ціни гри, визначити чисту ціну гри, сідлові точки та оптимальні стратегії, якщо вони існують:

3.2.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ **3.2.2.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

3.2.3. $A=\begin{pmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 10 & 24 & 9 \end{pmatrix}$ **3.2.4.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

3.2.5. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & -1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & -2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -3 & n-2 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У задачах **3.2.6** – **3.2.8** розглянути матриці ігор, що були вже побудовані (див. розв’язки задач Заняття 1), та з’ясувати, чи мають ті ігри сідлові точки. У разі позитивної відповіді вказати чисту ціну гри та оптимальні стратегії:

3.2.6. Задача 1.1.1.

3.2.7. Задача 1.1.3.

3.2.8. Задача 1.1.5.

3.2.9. Показати, що матрична гра з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, де $a_{ij}=f(i)+g(j)$ та $f(i),\ g(j)$ - деякі функції, має розв’язок у чистих стратегіях та знайти його.

3.2.10. Нехай $v(A)$ та $v(B)$ - сідлові точки матричних ігор з матрицями A та B відповідно. Привести приклади матриць A і B таких, що для них виконуються нерівності:

а) $v(A+B)>v(A)+v(B)$;

б) $v(A+B)<v(A)+v(B)$;

в) $v(A+B)=v(A)+v(B)$.

Заняття № 4. Матрична гра, яка не має сідлової точки. Визначення виграшів гравців. Перевірка оптимальності стратегій гравців.

Завдання для аудиторної роботи.

У задачах **4.1.1 – 4.1.3** визначити виграші 1-го гравця для матричної гри з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, якщо 1-й гравець вибрав стратегію $E=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m\right)$, а 2-й гравець – стратегію $H=\left(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\right)$.

4.1.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad E=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\quad H=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.1.2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad E=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad H=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

4.1.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad E=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad H=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Перевірити, чи є стратегії $E^*=\left(\xi_1^*,\xi_2^*,...,\xi_m^*\right)$ та $H^*=\left(\eta_1^*,\eta_2^*,...,\eta_n^*\right)$ оптимальними у матричній грі з матрицею $D=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}$ (задачі **4.1.4 – 4.1.6**).

4.1.4. $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad E^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad H^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.1.5. $D=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad E^*=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $\quad H^*=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

4.1.6. $D=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad E^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad H^*=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Завдання для домашньої роботи.

Визначити виграші 1-го гравця для матричної гри з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, якщо 1-й гравець вибрав стратегію $E=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m\right)$, а 2-й гравець – стратегію $H=\left(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\right)$ (задачі **4.2.1 – 4.2.4**).

4.2.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

4.2.2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

4.2.3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

4.2.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Перевірити, чи є стратегії $E^*=\left(\xi_1^*,\xi_2^*,...,\xi_m^*\right)$ та $H^*=\left(\eta_1^*,\eta_2^*,...,\eta_n^*\right)$ оптимальними у матричній грі з матрицею $D=\left(d_{ij}\right)_{m\times n}$ (задачі **4.2.5 – 4.2.8**).

4.2.5. $D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E^*=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2.6. $D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, $H^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.2.7. $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H^*=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4.2.8. $D=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E^*=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$, $H^*=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Заняття № 5. Розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях. Симетрична гра. Розв’язок симетричної гри.

Завдання для аудиторної роботи.

У задачах **5.1.1 – 5.1.4** знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри для матричних ігор, які задані матрицею $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$.

5.1.1. $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **5.1.2.** $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5.1.3.** $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5.1.4. Розглянути матрицю гри «Камінь, ножиці, папір».

Завдання для домашньої роботи.

У задачах **5.2.1 - 5.2.3** знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри для матричних ігор, які задані матрицею $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$.

5.2.1. $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ **5.2.2.** $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5.2.3.** $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Заняття № 6. Розв'язання матричної гри порядку 2×2. Аналітична та матрична форма запису. Спрощення матриці гри. Співвідношення переваги. Розширення змішаної стратегії. Домінування стратегій гравців.

Завдання для аудиторної роботи.

У задачах **6.1.1 – 6.1.4** знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри 2×2 з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$:

6.1.1. $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ **6.1.2.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **6.1.3.** $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

6.1.4. Розглянути матрицю гри у «парне-непарне число» (задача 1.2.1).

У задачах **6.1.5 – 6.1.9**, використовуючи спрощення елементів матриці гри, знайти розв’язок гри, яка задана матрицею $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$:

6.1.5. $B=\begin{pmatrix}25 & 85\\ 35 & 65\end{pmatrix}$, **6.1.6.** $B=\begin{pmatrix}300 & 400\\ 700 & 200\end{pmatrix}$, **6.1.7.** $B=\begin{pmatrix}-14 & -7\\ -21 & -35\end{pmatrix}$,

6.1.8. $B=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}14\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{pmatrix}$, **6.1.9.** $B=\begin{pmatrix}12 & 42 & 30\\ 18 & 21 & 32\\ 34 & 82 & 54\end{pmatrix}$.

Використовуючи визначення домінування строк та стовбців у матриці гри, знайти оптимальні стратегії для наступних матричних ігор (задачі **6.1.10 – 6.1.17**):

6.1.10. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **6.1.11.** $A=\begin{pmatrix}10 & 0 & 6\\ 0 & 10 & 7\end{pmatrix}$ **6.1.12.** $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}$

6.1.13. $A=\begin{pmatrix}0 & 15\\ 8 & 0\\ -10 & 20\\ 10 & 12\end{pmatrix}$ **6.1.14.** $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ **6.1.15.** $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 5 & 1\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$

6.1.16. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \dots & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & 1 & 1\end{pmatrix}$ **6.1.17.** $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0 & -3 & -4\\ -2 & 1 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$

Завдання для домашньої роботи.

Знайти оптимальні змішані стратегії та ціну гри 2×2 з матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ (задачі **6.2.1–6.2.4**):

6.2.1. $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ **6.2.2.** $A=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ **6.2.3.** $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

6.2.4. Розглянути гру, яка задана матрицею $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$.

Знайти розв'язок цієї гри у 3-х випадках: 1) $a<1$; 2) $1<a<3$; 3) $a>3$.

У задачах **6.2.5 – 6.2.8**, використовуючи спрощення елементів матриці гри, знайти розв'язок гри, яка задана матрицею $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$:

6.2.5. $B=\begin{pmatrix} 9 & -36 \\ -27 & -45 \end{pmatrix}$, **6.2.6.** $B=\begin{pmatrix} 100 & 400 \\ 200 & 800 \end{pmatrix}$, **6.2.7.** $B=\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}6 \\ 2{,}7 & 3{,}6 \end{pmatrix}$,

6.2.8. $B=\begin{pmatrix} 12 & 28 & 32 \\ -18 & 17 & -34 \\ -27 & 54 & -45 \end{pmatrix}$.

Використовуючи визначення домінування строк та стовбців у матриці гри, знайти оптимальні стратегії для наступних матричних ігор (задачі **6.2.9 – 6.2.15**):

6.2.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **6.2.10.** $A=\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **6.2.11.** $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

6.2.12. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **6.2.13.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **6.2.14.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6.2.15. $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & -2 & 8 & 10 \\ 3 & -6 & 0 & 8 & -9 & -8 \end{pmatrix}$

6.2.16. Нехай матриця гри має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_3 \\ a_1 & a_6 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

причому елементи матриці задовольняють нерівностям:

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6.$$

Довести, що для оптимальних стратегій та ціни гри вірні співвідношення:

$$x_3=y_2=0, \qquad x_1>1/2, \qquad x_1>y_1>x_2, \qquad a_3<C<a_4.$$

Заняття № 7. Розв'язання матричних ігор розміром 2×n та m×2 графічним методом.

Завдання для аудиторної роботи.

За допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, яка задана матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ (у задачах **7.1.1 – 7.1.5**):

7.1.1. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **7.1.2.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

7.1.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ **7.1.4.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ **7.1.5.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 5 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

Спростити матрицю G гри та знайти її розв’язок графічним методом (задачі **7.1.6**, **7.1.7**)

7.1.6. $G=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **7.1.7.** $G=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Завдання для домашньої роботи.

За допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, яка задана матрицею $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ (у задачах **7.2.1 – 7.2.5**):

7.2.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **7.2.2.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

7.2.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 6 \\ 5 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **7.2.4.** $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 7 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ **7.2.5.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Спростити матрицю G гри та знайти її розв’язок графічним методом (задачі **7.2.6**, **7.2.7**):

7.2.6. $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **7.2.7.** $G=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

Заняття № 8. Симплекс метод розв'язання задач.

Завдання для аудиторної роботи.

За допомогою симплекс методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, яка задана матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ (у задачах **8.1.1 – 8.1.3**):

8.1.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **8.1.2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **8.1.3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Завдання для домашньої роботи.

За допомогою симплекс методу знайти оптимальні стратегії та ціну гри, яка задана матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ (у задачах **8.2.1 – 8.2.3**):

8.2.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **8.2.2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **8.2.3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Заняття № 9. Позиційні ігри. Побудова дерева гри. Нормалізація позиційної гри. Різні випадки інформованості гравців. Інформаційні множини.

Завдання для аудиторної роботи.

9.1.1. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.

9.1.2. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.
Порівняти результат задачі з результатом задачі 9.1.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри.

Завдання для домашньої роботи.

9.2.1. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і не знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.

9.2.2. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.
Порівняти результат задачі з результатом задачі 9.2.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри.

Заняття № 10. Позиційні ігри. Різні випадки інформованості гравців.

Завдання для аудиторної роботи.

10.1.1. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.

10.1.2. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.
Порівняти результат задачі з результатом задачі 10.1.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри.

Завдання для домашньої роботи.

10.2.1. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і не знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.

10.2.2. Визначить ціну наступної гри. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравця. 1-й хід робить 1-й гравець. Він вибирає число x з двох чисел $\{1,2\}$. 2-й хід робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрав 1-й гравець на першому ході, він вибирає число y з двох чисел $\{1,2\}$. 3-й хід робить 1-й гравець. Не знаючи, яке число вибрав 2-й гравець, і знаючи, яке число він вибрав на 1-му ході, він вибирає число z з двох чисел $\{1,2\}$. Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, якому відповідають наступні значення:

x	1	1	1	1	2	2	2	2
y	1	1	2	2	1	1	2	2
z	1	2	1	2	1	2	1	2
L	**-2**	**-1**	**3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**6**

Визначити усі інформаційні множини гравців.
Порівняти результат задачі з результатом задачі 10.2.1. Як впливає інформованість гравців на ціну гри.

Заняття № 11. Позиційні ігри. Різні випадки інформованості гравців. Інформаційні множини.

Завдання для аудиторної роботи.

11.1.1.

1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з рівними ймовірностями $0{,}5$.

2-й хід. Робить 1-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід. Робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$$L(1,1,1)=-2, \quad L(1,2,2)=-4, \quad L(1,1,2)=4, \quad L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3, \quad L(1,2,1)=1, \quad L(2,1,2)=0, \quad L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

11.1.2.

1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з рівними ймовірностями $0,5$.

2-й хід. Робить 1-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід. Робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і не знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$$L(1,1,1)=-2, \quad L(1,2,2)=-4, \quad L(1,1,2)=4, \quad L(2,1,1)=3,$$
$$L(2,2,1)=-3, \quad L(1,2,1)=1, \quad L(2,1,2)=0, \quad L(2,2,2)=-5.$$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.
Порівняти результат задачі з результатом задачі 11.1.1 та зробити висновки щодо впливу наявності інформованості гравців на результат гри.

11.1.3.

1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з ймовірностями $2/3$ та $1/3$.

2-й хід. Робить 1-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід. Робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$L(1,1,1)=-1,\quad L(1,2,2)=-3,\quad L(1,1,2)=5,\quad L(2,1,1)=4,$

$L(2,2,1)=-2,\quad L(1,2,1)=2,\quad L(2,1,2)=1,\quad L(2,2,2)=6.$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

Завдання для домашньої роботи.

11.2.1.

1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з рівними ймовірностями $0,5$.

2-й хід. Робить 1-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід. Робить 2-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$L(1,1,1)=-2,\quad L(1,2,2)=-4,\quad L(1,1,2)=4,\quad L(2,1,1)=3,$

$L(2,2,1)=-3,\quad L(1,2,1)=1,\quad L(2,1,2)=0,\quad L(2,2,2)=-5.$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

11.2.2.

1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з рівними ймовірностями $0,5$.

2-й хід. Робить 1-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.

3-й хід. Робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$L(1,1,1)=-2,\quad L(1,2,2)=-4,\quad L(1,1,2)=4,\quad L(2,1,1)=3,$

$L(2,2,1)=-3,\quad L(1,2,1)=1,\quad L(2,1,2)=0,\quad L(2,2,2)=-5.$

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

Порівняти результат задачі з результатом задачі 11.2.1 та зробити висновки щодо впливу наявності інформованості гравців на результат гри.

11.2.3.
1-й хід проводиться випадково: вибирається число x, що дорівнює 1 або 2 з ймовірностями $2/3$ та $1/3$.
2-й хід. Робить 1-й гравець. Знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході, він вибирає число y з множини двох чисел $\{1,2\}$.
3-й хід. Робить 2-й гравець. Не знаючи, яке число x вибрано на 1-му ході і знаючи, яке число y вибрано 1-м гравцем на 2-му ході, він вибирає число z з множини двох чисел $\{1,2\}$.
Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му суму $L(x,y,z)$, де $L(x,y,z)$ - функція, що визначена значеннями:

$L(1,1,1)=-1$, $L(1,2,2)=-3$, $L(1,1,2)=5$, $L(2,1,1)=4$,
$L(2,2,1)=-2$, $L(1,2,1)=2$, $L(2,1,2)=1$, $L(2,2,2)=6$.

Побудувати дерево гри, визначити інформаційні множини, знайти ціну гри та оптимальні стратегії гравців.

Заняття № 12. Нескінченні ігри. Ігри з опуклими функціями.

Завдання для аудиторної роботи.

12.1.1. 1-й гравець вибирає $x\in[0,1]$, 2-й гравець вибирає $y\in[0,1]$. Виграш 1-го гравця дорівнює $M(x,y)=2x-y$. Визначити верхню та нижню ціни гри та з'ясувати, чи має ця гра розв'язок у чистих стратегіях.

12.1.2. 1-й гравець вибирає $x\in(0,1)$, 2-й гравець вибирає $y\in(0,1)$. Виграш 1-го гравця дорівнює $M(x,y)=x+y$. Визначити верхню та нижню ціни гри та з'ясувати, чи має ця гра розв'язок у чистих стратегіях. Відповідь порівняти в результатом задачі 12.1.1.

12.1.3. Полковник Блотто хоче атакувати дві рівноцінні позиції A і B, пославши частину свого полку x к A, а іншу частину $1-x$ – до B. Його противник, захисник цих позицій, має в своєму розпорядженні тільки частину полку α $(0<\alpha<1)$, яку він повинен розподілити між A і B. Він виділяє y своїх сил на A та $1-y$ - на B, тобто αy обороняються в A та $(1-y)\alpha$ - в B. Усі битви смертельні. Обидві сторони втрачають однакове число людей – число, що дорівнює чисельності меншого загону, а позиції в результаті захоплює більший загін. Для кожної позиції виграшем переможця вважається сама позиція (оцінюється в один полк) плюс число уцілілих солдатів. Якщо ніхто не захопив позицію, виграші дорівнюють нулю. Визначити сідлову точку.

12.1.4. Функція виграшу для нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті визначена так:

$$M(x,y)=10xy-5x-y,$$

якщо $x\neq 0.1$, $M(0.1,y)=-y$.

Знайти ціну гри C. Яка стратегія першого гравця гарантує йому отримання виграшу не менше, ніж $C-\varepsilon$?

12.1.5. Знайти оптимальні стратегії нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті, що має функцію виграшу

$$M(x,y)=xy-x/3-y/2.$$

12.1.6. Перевірити, чи має сідлову точку у чистих стратегіях нескінченна антагоністична гра на одиничному квадраті з функцією виграшу

$$M(x,y)=\frac{1}{1+2(x-y)^2}.$$

12.1.7. Нехай на квадраті $[0,1]$ задано функцію:

$$M(x,y)=3x^2-2y^2.$$

Визначити сідлову точку.

12.1.8. Нехай на відкритому інтервалі $(0,1)$ задано функцію:

$$M(x,y)=2x+y.$$

Визначити, чи існує сідлова точка.

Завдання для домашньої роботи.

12.2.1. 1-й гравець вибирає $x\in[0,1]$, 2-й гравець вибирає $y\in[0,1]$. Виграш 1-го гравця дорівнює $M(x,y)=x+y-0.5$. Визначити верхню та нижню ціни гри та з'ясувати, чи має ця гра розв'язок у чистих стратегіях.

12.2.2. 1-й гравець вибирає $x\in(0,1)$, 2-й гравець вибирає $y\in(0,1)$. Виграш 1-го гравця дорівнює $M(x,y)=x-y+0.1$. Визначити верхню та нижню ціни гри та з'ясувати, чи має ця гра розв'язок у чистих стратегіях. Відповідь порівняти в результатом задачі 12.2.1.

12.2.3. Нехай на квадраті $[0,1]$ задана функція:

$$M(x,y)=(x-y)^2.$$

Визначити сідлову точку.

12.2.4. Для нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті задано функцію виграшу

$$M\left(x,y\right)=8xy-3x-y,$$

якщо $x\neq 0.2$, $M\left(0.2,y\right)=-y$.

Знайти ціну гри. Яку стратегію повинен використати перший гравець для того, щоб його виграш був не менш, ніж $C-\varepsilon$, де C - ціна гри.

12.2.5. Знайти оптимальні стратегії нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті, що має функцію виграшу

$$M\left(x,y\right)=xy-{}^{x}\!/_{4}-{}^{y}\!/_{3}.$$

12.2.6. Перевірити, чи має сідлову точку у чистих стратегіях нескінченна антагоністична гра на одиничному квадраті з функцією виграшу

$$M\left(x,y\right)=\frac{1}{1+\left(2x-y\right)^{2}}.$$

12.2.7. Нехай на квадраті $[0,1]$ задано функцію:

$$M\left(x,y\right)=5x^{2}-4y^{2}.$$

Визначити сідлову точку.

12.2.8. Нехай на відкритому інтервалі $\left(0,1\right)$ задано функцію:

$$M\left(x,y\right)=x+2y.$$

З'ясувати, чи існує сідлова точка.

Заняття № 13. Нескінченні ігри. Ігри з опуклими функціями.

Завдання для аудиторної роботи.

13.1.1. Доведіть, що функція $\sum_{i=1}^{m} z_i^2$ строго випукла.

13.1.2. Нехай на квадраті $[0,1]$ задана функція

$$M\left(x,y\right)=\sin\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}.$$

Визначити, чи є ця функція опуклою, та знайти оптимальні стратегії гравців.

13.1.3. Нехай функція виграшей у нескінченній антагоністичній грі задана на одиничному квадраті і дорівнює $M\left(x,y\right)=\left(x-y\right)^{2}$. Визначити, чи є ця функція опуклою, та знайти оптимальні стратегії гравців.

13.1.4. Знайти розв'язок нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті з функцією виграшу

$$M\left(x,y\right)=80y^{8}-5xy+x^{2}.$$

13.1.5. Задано гра на квадраті з ядром

$$A(x, y) = -x^2 + 4xy - 5y^2 + 3x - 2y.$$

Знайти оптимальні стратегії.

Завдання для домашньої роботи.

13.2.1. Знайти розв'язок нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті з функцією виграшу

$$M\left(x,y\right) = 16y^6 - 3xy + x^2.$$

13.2.2. Знайти оптимальні стратегії нескінченної антагоністичної гри на одиничному квадраті з функцією виграшу

$$M\left(x,y\right) = \frac{1}{1+\lambda\left(x-y\right)^2},$$

де $0 < \lambda \le 4/3$.

13.2.3. Задано гра на квадраті з ядром

$$A(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2.$$

Знайти оптимальні стратегії.

13.2.4. Задано гра на квадраті з ядром

$$A(x, y) = -x^2 + y^3 + xy^2 - 4y.$$

Знайти оптимальні стратегії.

13.2.5. Навести приклад нескінченної антагоністичної гри з випуклою функцією виграшу, у якому відображені економічні інтереси двох країн.

Заняття № 14. Ігри з вибором моменту часу.

Завдання для аудиторної роботи.

14.1.1. Гра «тиха дуель». Умови гри:

1) Два гравця у момент $t = 0$ починають йти назустріч один одному.

2) Гравці зустрічаються у момент $t = 1$.

3) Кожен гравець має пістолет лише з однією кулею і може вистрілити у будь-який момент часу.

4) Якщо гравцеві вдалося вразити супротивника, а сам він неушкоджений, то гра припиняється, і той, хто вистрілив успішно, є переможцем.

5) Якщо обидва гравця промахнулися, то дуель закінчується внічию.

6) Якщо обидва гравця стріляли одночасно, і кожен вразив противника, то гра закінчилася внічию.

Знайти розв’язок гри.

14.1.2. Гра «гучна дуель». Умови гри аналогічні умовам гри 14.1.1 за одним винятком: дуель є гучною, тобто гравець знає, що його противник вистрілив і влучив. Знайти розв’язок гри.

14.1.3. Знайти сідлову точку

$$A(x,y)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4 & 0 \le x < 1/2 \\ c(x) & 1/2 \le x \le 1 \\ 1 & 1 < x < +\infty \end{cases},$$

де $c(x)$ є неспадною диференційованою функцією, що визначена на відрізку $\left[1/2,1\right]$ та задовольняє умовам: $c\left(1/2\right)=1/2$ та $c(1)=1$.

Завдання для домашньої роботи.

14.2.1. Формалізувати конфліктну ситуацію, подібну грі 14.1.1, з тою різницею, що фірма, яка зробила успішно свій вклад раніш за другу фірму, виграє вдвічі більше (дві одиниці), ніж вона виграє, якщо зробить успішно свій вклад після невдалого, но раніш зробленого вкладу іншої фірми. Знайти розв’язок гри.

14.2.2. Знайти розв’язок гри, аналогічній грі 14.1.1, з тою різницею, що кожна фірма може зробити другий вклад, якщо виявилося, що перший вклад був зроблений нею невдало.

14.2.3. Формалізувати конфліктну ситуацію, подібну грі 14.1.1, з тою різницею, що друга фірма може зробити ще один вклад, якщо вона невдало зробила свій перший вклад. При цьому перша фірма може зробити свій вклад тільки один раз. Знайти розв’язок гри.

14.2.4. Формалізувати конфліктну ситуацію, подібну грі 14.1.2, з тою різницею, що кожна фірма може робити другий вклад, якщо виявилось, що перший вклад зроблений нею невдало. Знайти розв’язок гри.

Заняття № 15. Багатокрокові ігри.

Завдання для аудиторної роботи.

15.1.1. Гра інспектування.
Умови гри:
Нехай гравець 1 – порушник, він виконує незаконну дію; гравець 2 – інспектор, він перевіряє вибраний період часу на наявність там незаконної дії 1-го гравця.

Задано N періодів часу, в які незаконна дія може бути здійснена. 1-й гравець, вибираючи один з періодів часу, виконує дію. 2-й гравець проводить дослідження одного з періодів часу з метою виявити дію 1-го гравця.
Результат гри:
– дія 1-го гравця відбувається і не виявляється: гравець виграє +1.
– дію 1-го гравця виявлено (порушник спійманий): 1-й гравець отримує –1.
– якщо 1-й гравець нічого не робить, його виграш дорівнює 0.
Знайти розв'язок гри.

Завдання для домашньої роботи.

15.2.1. Навести приклад конфліктної ситуації з економіки, яка формалізується у вигляді гри інспектування. Знайти розв'язок гри.