Конфліктно-керовані системи

Приклади розв'язування типових задач

Заняття № 1-2. Матричні ігри. Складання матриці гри. Визначення стратегій гравців. Біматричні ігри. Складання матриці гри. Гра з природою

1.1. У грі беруть участь два гравці. Кожен гравець може записати незалежно один від одного цифру 1, 2 або 3. У цьому разі: 1) якщо різниця між цифрами, що записали 1-й та 2-й гравці, додатна, то 1-й гравець виграє кількість очок, що дорівнює різниці між числами; 2) якщо різниця від'ємна, то виграє 2-й гравець; 3) якщо різниця між числами дорівнює нулю, то гра закінчується внічию.

Розв'язання. У 1-го гравця 3 стратегії:

x_1 – записати цифру 1;

x_2 – записати цифру 2;

x_3 – записати цифру 3.

У 2-го гравця теж 3 стратегії:

y_j – записати цифру j $\{j = 1, 2, 3\}$.

Матриця гри у цьому випадку має вигляд:

$X \quad Y$	$y_1 = 1$	$y_2 = 2$	$y_3 = 3$
$x_1 = 1$	0	-1	-2
$x_2 = 2$	1	0	-1
$x_3 = 3$	2	1	0

1.2. Дотримання угоди. Нехай дві країни, які займаються рибальством в одних і тих самих водах, домовились на взаємне обмеження лову для того, щоб зберегти рибні запаси. При цьому сторони не контролюють одна одну. Це виключає санкції за порушення угоди. Стратегії сторін полягають у тому, щоб дотримуватися угоди чи ні. Стратегії сторін:

С – дотримуватись договору;

Н – не дотримуватись договору.

Правила гри: 1) якщо обидві сторони дотримуються угоди, то вони отримують прибуток у 10 одиниць; 2) якщо вони не дотримуються угоди, то їх прибуток зменшиться до 6 одиниць; 3) якщо перша дотримується, а друга не дотримується, то перша одержить 5 одиниць, а друга (яка порушила) - 11 одиниць.

Розв'язання. Це біматрична гра. Вона може бути представлена двома матрицями:

Матриця 1-ї країни

1 – й гравець	*2 – й гравець* C	H
C	10	11
H	5	6

Матриця 2-ї країни

1 – й гравець	*2 – й гравець* C	H
C	10	5
H	11	6

Але цю гру можна записати також і у вигляді однієї матриці:

1 – й гравець	*2 – й гравець* C	H
C	10, 10	5, 11
H	11, 5	6, 6

Заняття № 3. Матрична гра з сідловою точкою. Розв'язання гри у чистих стратегіях. Верхня і нижня ціна гри. Визначення чистої ціни гри та оптимальних стратегій гравців

3.1. Нехай матриця гри має вигляд

$$L(x,y)=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Запишемо цю матрицю таблицею стратегій:

	y_1	y_2	y_3
x_1	8	4	2
x_2	3	3	4
x_3	2	2	7

В цій таблиці x_i - *i*-та стратегія 1-го гравця; y_j - *j*-та стратегія 2-го гравця.

Звідси, для 1-ї стратегії 1-го гравця (x_1), виграшами будуть значення: 8, 4, 2 в залежності від вибраної стратегії 2-го гравця. Тоді, для стратегії x_1, тобто для $L(x_1,y)=\{8,4,2\}$, число 2 є гарантованим виграшем; це найменший елемент множини виграшів 1-го гравця.

Для стратегії x_2, тобто для $L(x_2,y)=\{3, 3, 4\}$, гарантований виграш дорівнює 3. Для стратегії x_3, тобто для $L(x_3,y)=\{2, 2, 7\}$, гарантований виграш дорівнює 2.

Отже, гарантований виграш $A(x_k)$ для стратегії x_k - це найменший елемент множини $L(x_k, y)$:

$$A(x_k) = \min_y L(x_k, y).$$

Але 1-й гравець повинен вибрати таку стратегію (x_1, x_2, x_3), щоб гарантований виграш $A(x_k)$ був найбільшим, тобто

$$\alpha = \max_{x_k} A(x_k) = \max_{x_k} \min_y L(x_k, y),$$

де α - максимальний гарантований виграш. Тобто α - це нижня чиста ціна гри.

Так само повинен поводити себе 2-й гравець. Відміна для 2-го гравця від 1-го у тому, що він вибирає стратегію відносно програшу. А саме, для стратегії y_1, тобто для $L(x, y_1) = \{8, 3, 2\}$, гарантованим максимальним програшем є значення 8.

Для стратегії y_2, тобто для $L(x, y_2) = \{4, 3, 2\}$, гарантований програш дорівнює 4. Для стратегії y_3, тобто для $L(x, y_3) = \{2, 4, 7\}$, гарантований програш дорівнює 7.

Отже, гарантований програш $B(y_k)$ для стратегій y_k - це найбільший елемент множини $L(x, y_k)$:

$$B(y_k) = \max_x L(x, y_k).$$

Тоді, щоб гарантований програш 1-го гравця був мінімальним, необхідно, щоб

$$\beta = \min B(y_k) = \min_{y_k} \max_x L(x, y_k),$$

де β - мінімальний гарантований програш 2-го гравця. Тобто β - це верхня чиста ціна гри.

Таблицю, яка містить розглянуті гарантовані виграші 1-го гравця та гарантовані програші 2-го гравця, можна записати у вигляді:

	y_1	y_2	y_3	$A(x_k)$
x_1	8	4	2	2
x_2	3	3	4	3^*
x_3	2	2	7	2
$B(y_k)$	8	4^*	7	

Зірочками у таблиці позначені нижня чиста ціна гри та верхня чиста ціна гри.

Для α та β справедливі наступні твердження:

1) Нижня ціна гри не перевищує верхню ціну гри.

2) Виграш, який може забезпечити собі 1-й гравець, не перевищує програш, яким може обмежитись 2-й гравець.

3.2. Задана матриця гри:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Визначити стратегії гравців та ціну гри.

Розв’язання.

Таблиця вибору стратегій має вигляд:

	y_1	y_2	y_3	y_4	$A(x)$
x_1	8	3	6	1	1
x_2	1	2	2	3	1
x_3	6	$\boxed{3}$	3	4	3^*
x_4	5	1	2	7	1
$B(y)$	8	3^*	6	7	

Це гра із сідловою точкою. Ціна гри:

$$c = \alpha^* = \beta^* = 3.$$

Оптимальною стратегією 1-го гравця є його третя стратегія x_3. Оптимальною стратегією 2-го гравця є його друга стратегія y_2.

Заняття № 4-5. Матрична гра, яка не має сідлової точки. Визначення виграшів гравців. Перевірка оптимальності стратегій гравців. Розв'язання матричної гри у змішаних стратегіях

4.1. Визначити виграш 1-го гравця у грі, яка задана матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

якщо: $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ та $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Виграш 1-го гравця визначається за формулою:

$$L(\xi,\eta)=E\cdot A\cdot H^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ 0\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{17}{12}.$$

Відповідь. Виграш 1-го гравця дорівнює $\frac{17}{12}$.

4.2. Знайти розв'язок матричної гри, яка задана матрицею:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Запишемо нерівності, які визначають оптимальну змішану стратегію 1-го гравця:

$$EA_j \geq C,$$

де

$$E=(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ A_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}.$$

Для нашого випадку:

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\geq C;\qquad (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\geq C;\qquad (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}\geq C,$$

і кінцевий запис має вигляд:

$$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \geq C,$$
$$-\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 \geq C,$$
$$-\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 \geq C.$$

2. Нерівностями, що визначають оптимальну змішану стратегію 2-го гравця, є:

$$A_i H^{*T} \leq C,$$

де

$$H^*=(\eta_1, \eta_2, \eta_3),\ A_1=(1\ \ -1\ \ -1),\ A_2=(-1\ \ -1\ \ 3),\ A_3=(-1\ \ 2\ \ -1),$$

Тоді відповідні нерівності запишуться у вигляді:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\leq C;\quad \begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\leq C;\quad \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\leq C,$$

або

$$\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 \le C,$$
$$-\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3 \le C,$$
$$-\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 \le C.$$

Врахуємо також додаткові умови:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1,$$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1.$$

Для того, щоб розв'язати задачу, нерівності замінюємо рівняннями. Отже, для 1-го гравця маємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - C &= 0,\\
-\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - C &= 0,\\
-\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 - C &= 0,\\
\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 1,
\end{aligned}$$

розв'язки якої дорівнюють: $\xi_1 = \frac{6}{13}$, $\xi_2 = \frac{3}{13}$, $\xi_3 = \frac{4}{13}$, $C = -\frac{1}{13}$.

Для 2-го гравця маємо:

$$\begin{aligned}
\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - C &= 0,\\
-\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3 - C &= 0,\\
-\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 - C &= 0,\\
\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 1,
\end{aligned}$$

звідки отримаємо розв'язок: $\eta_1 = \frac{6}{13}$, $\eta_2 = \frac{4}{13}$, $\eta_3 = \frac{3}{13}$, $C = -\frac{1}{13}$.

Відповідь. Ціна гри $C = -\frac{1}{13}$; оптимальні змішані стратегії гравців дорівнюють: $\xi_1 = \frac{6}{13}$, $\xi_2 = \frac{3}{13}$, $\xi_3 = \frac{4}{13}$, $\eta_1 = \frac{6}{13}$, $\eta_2 = \frac{4}{13}$, $\eta_3 = \frac{3}{13}$.

4.3. Перевірити, чи є стратегії: $\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ оптимальними у грі з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Нехай $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$, $\mathrm{E}^* = \mathrm{E}$.

Виграш 1-го гравця (як і програш 2-го гравця) дорівнює:

$$E^* \cdot A \cdot H^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = 3$$

Перевіримо нерівності ситуації рівноваги, тобто з'ясуємо, чи виконуються наступні умови:

1) $A_i \cdot \mathrm{H}^{*T} \le \mathrm{E}^* \cdot A \cdot \mathrm{H}^{*T}$, де i=1,2, A_i - рядки матриці.

$$A_1 \cdot H^{*T} \le E^* \cdot A \cdot H^{*T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \le 3;$$

$$A_2 \cdot H^{*T} \le E^* \cdot A \cdot H^{*T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \le 3.$$

Як бачимо, нерівності виконуються.

2) $\mathrm{E}^* \cdot A \cdot \mathrm{H}^{*T} \le \mathrm{E}^* \cdot A_j$, де j=1,2,3 ; A_j - стовпці матриці.

$$E^* \cdot A \cdot H^{*T} \le E^* \cdot A_1 \Leftrightarrow E^* \cdot A_1 \ge E^* \cdot A \cdot H^{*T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \ge 3 \text{ - невірно;}$$

$$E^* \cdot A \cdot H^{*T} \le E^* \cdot A_2 \Leftrightarrow E^* \cdot A_2 \ge E^* \cdot A \cdot H^{*T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{5} \ge 3 \text{ - невірно;}$$

$$E^* \cdot A \cdot H^{*T} \le E^* \cdot A_3 \Leftrightarrow E^* \cdot A_3 \ge E^* \cdot A \cdot H^{*T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \ge 3 \text{ - невірно.}$$

Нерівності не виконуються.

Відповідь. Задані стратегії не є оптимальними стратегіями.

Заняття № 6. Розв'язання матричної гри порядку 2×2. Аналітична та матрична форма запису. Спрощення матриці гри. Співвідношення переваги. Розширення змішаної стратегії. Домінування стратегій гравців

6.1. Знайти стратегії гравців та ціну матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{11}=1, \quad A_{12}=-4, \quad A_{21}=-2, \quad A_{22}=1.$$

Відповідно $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ - матриця, союзна до матриці A, тобто її елементи дорівнюють алгебраїчним доповненням транспонованої матриці A.

Обчислимо

$$J \cdot A^* \cdot J^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-4),$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7, \qquad |J \cdot A^* \cdot J^T| = |(-4)| = -4,$$

$$A^* \cdot J^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad J \cdot A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^{*T} = \frac{A^* \cdot J^T}{|J \cdot A^* \cdot J^T|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{E}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Тобто $\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

$$H^* = \frac{J \cdot A^*}{|J \cdot A^* \cdot J^T|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тобто $\eta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ та $C = \dfrac{|A|}{|J \cdot A^* \cdot J^T|} = \dfrac{-7}{-4} = \dfrac{7}{4}$.

Відповідь: $C = \dfrac{7}{4}$, $\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

6.2. Знайти змішані стратегії гравців у грі з матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Для заданої матриці 2-й стовбець домінує 4-й (усі елементи 2-го стовпця менше відповідних елементів 4-го стовпця), тобто 2-й гравець не буде використовувати 4-ту стратегію, і на неї можна не звертати уваги. Отже, матрицю можна розглядати у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці 3-ій рядок домінує 1-й (усі елементи 3-го рядка більше відповідних елементів 1-го рядка), тобто 1-й гравець не буде використовувати свою першу стратегію і на неї можна не звертати уваги. Отже, тепер матрицю можна розглядати у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

У цій матриці 2-й стовбець домінує 3-й (усі елементи 2-го стовпця менше відповідних елементів 3-го стовпця), тобто 2-й гравець не буде використовувати третю стратегію, і на неї можна не звертати уваги. Отже, матрицю можна розглядати у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, використовуючи співвідношення переваги, задана спочатку матриця перетворена у матрицю: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ми вже розглядали цю матрицю на попередньому занятті. Розв'язок відповідної гри має вигляд: $\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Використовуючи уявлення розширення змішаних стратегій, для заданої матриці гри

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

одержимо: $\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ (перша стратегія 1-м гравцем не використовувалась); $\eta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (третя та четверта стратегії 2-м гравцем не використовувались).

Ціна гри $C = \frac{7}{4}$.

Відповідь. $\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \frac{7}{4}$.

6.3. Знайти розв'язок гри, використовуючи спрощення елементів для заданої матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 100 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Запишемо нову матрицю, для якої:

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} + \mu, \text{ де } \lambda=0.01,\ \mu=-1.$$

Тоді матриця B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Для цієї матриці обчислимо:

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

$$J \cdot B^* \cdot J^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}, \qquad \left| J \cdot B^* \cdot J^T \right| = |-6| = -6$$

$$B^* \cdot J^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$J \cdot B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xi^T = \frac{B^* \cdot J^T}{\left| J \cdot B^* \cdot J^T \right|} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\eta = \frac{J \cdot B^*}{\left| J \cdot B^* \cdot J^T \right|} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C_B = \frac{|B|}{\left| J \cdot B^* \cdot J^T \right|} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}.$$

Визначимо ціну гри з матрицею A:

$$C_A = \frac{C_B - \mu}{\lambda} = \frac{\frac{5}{3} + 1}{0.01} = \frac{800}{3}$$

Відповідь. Ціна гри $C_A = \dfrac{800}{3}$; оптимальні змішані стратегії: $\xi = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Заняття № 7. Розв'язання матричних ігор розміром 2×n та m×2 графічним методом. Симплекс метод розв’язання задач

7.1. Знайти розв’язок гри, яка задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Для заданої гри:

$$C_1 = \left(a_{21} - a_{11}\right) \cdot \xi_2 + a_{11} = 2 \cdot \xi_2 + 2,$$

$$C_2 = \left(a_{22} - a_{12}\right) \cdot \xi_2 + a_{12} = -2 \cdot \xi_2 + 3,$$

$$C_3 = (a_{23} - a_{13}) \cdot \xi_2 + a_{13} = 5 \cdot \xi_2 + 1,$$
$$C_4 = (a_{24} - a_{14}) \cdot \xi_2 + a_{14} = -5 \cdot \xi_2 + 5.$$

Побудуємо ці прямі (див. рис. 7.1).

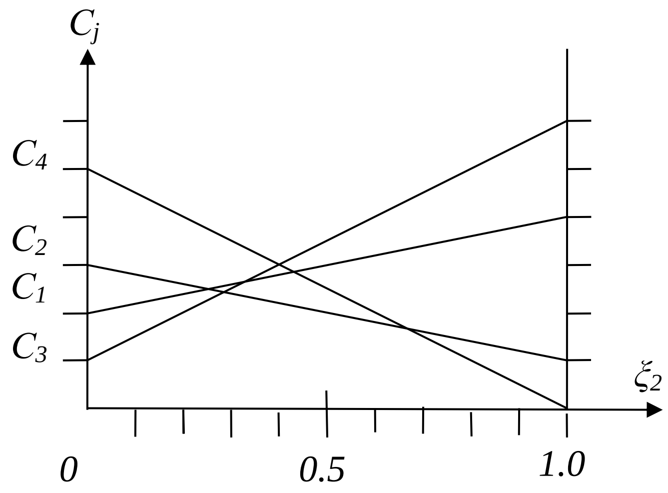


Рис. 7.1. Графіки функцій цін

Візуально видно, що для цього малюнка максимін - це точка перетину прямих C_3 та C_2. Тобто

$$5 \cdot \xi_2 + 1 = -2 \cdot \xi_2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = \frac{2}{7},$$

а відповідно $\xi_1 = 1 - \xi_2 = \frac{5}{7}$.

При цьому ціна гри $C = C_2\left(\xi_2 = \frac{2}{7}\right) = C_3\left(\xi_2 = \frac{2}{7}\right) = -2 \cdot \frac{2}{7} + 3 = 5 \cdot \frac{2}{7} + 1 = \frac{17}{7}$.

Відповідь. $C = \frac{17}{7}$, $\xi_1 = \frac{5}{7}$, $\xi_2 = \frac{2}{7}$.

Заняття № 8. Симплекс-метод розв’язання задач

8.1. Знайти стратегії гравців для гри з матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Для стратегій 1-го гравця і ціни гри виконуються умови:

$\xi_1 + 4\xi_2 > C$

$2\xi_1 + \xi_2 > C$

де $\xi_1 + \xi_2 = 1$.

Розділимо кожне рівняння на ціну гри:

$$\frac{\xi_1}{C}+4\frac{\xi_2}{C}>1$$
$$2\frac{\xi_1}{C}+\frac{\xi_2}{C}>1$$

Введемо нові змінні $t_1=\frac{\xi_1}{C}$ і $t_2=\frac{\xi_2}{C}$, тоді отримаємо

$$t_1+4t_2>1$$
$$2t_1+t_2>1$$

Для переходу до рівностей додаємо зліва до виразів фіктивні змінні $z_1\geq 0$ і $z_2\geq 0$. Отримаємо рівняння вигляду:

$$t_1+4t_2-z_1=1$$
$$2t_1+t_2-z_2=1$$

В якості функції мети вибираємо $F=t_1+t_2=\frac{\xi_1}{C}+\frac{\xi_2}{C}=\frac{\xi_1+\xi_2}{C}=\frac{1}{C}\to min$.

Постановка задачі.

Для рівнянь

$$t_1+4t_2-z_1=1$$
$$2t_1+t_2-z_2=1$$

визначити t_1 і t_2 такі, щоб $\Phi=t_1+t_2\to min$.

При цьому $t_1\geq 0$ і $t_2\geq 0$.

Розв'язання. 1-й метод.

Розв'язуємо рівняння

$$t_1+4t_2-z_1=1$$
$$2t_1+t_2-z_2=1$$

відносно t_1 і t_2:

$$\begin{matrix} t_1+4t_2-z_1=1 \\ 2t_1+t_2-z_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t_1+4t_2=1+z_1 \\ 2t_1+t_2=1+z_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2t_1+8t_2=2+2z_1 \\ 2t_1+t_2=1+z_2 \end{matrix}$$

Звідки $7t_2=1+2z_1-z_2 \Rightarrow t_2=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}z_1-\frac{1}{7}z_2$.

Отже,

$$t_1+4t_2-z_1=1 \Rightarrow t_1=1-4t_2+z_1 \Rightarrow t_1=1-4\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}z_1-\frac{1}{7}z_2\right)+z_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1=1-\frac{4}{7}-\frac{8}{7}z_1+\frac{4}{7}z_2+z_1 \Rightarrow t_1=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}z_1+\frac{4}{7}z_2.$$

Тоді

$$F=t_1+t_2=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}z_1+\frac{4}{7}z_2+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}z_1-\frac{1}{7}z_2=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}z_1+\frac{3}{7}z_2.$$

Для найменшого значення F приймаємо $z_1=0$ і $z_2=0$.

Отже, функція мети: $F = \frac{4}{7}$, але $F = \frac{1}{C} = \frac{4}{7}$. Звідки $C = \frac{7}{4}$.

Знаючи ціну гри, визначимо змішані стратегії 1-го гравця:

$$t_1 = \frac{3}{7} \Rightarrow t_1 = \frac{\xi_1}{C} = \frac{3}{7} \Rightarrow \quad \xi_1 = t_1 \cdot C = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{3}{4},$$

$$t_2 = \frac{1}{7} \Rightarrow t_2 = \frac{\xi_2}{C} = \frac{1}{7} \Rightarrow \quad \xi_2 = t_2 \cdot C = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

2-й метод (з використанням перетворення Гауса).

Зробимо усі попередні перетворення (як при розв'язанні задачі 1-м методом).

Розв'язання.

Побудуємо таблицю щодо заданих даних у вигляді:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	a_{11}	a_{12}	1	0
z_2	1	a_{21}	a_{22}	0	1
F	0	-1	-1	0	0

У даному випадку це

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	1	4	1	0
z_2	1	2	1	0	1
F	0	-1	-1	0	0

Вибираємо опорну клітину. Для цього:

1. У рядку F вибираємо від'ємне значення. Тут два негативних значення -1, тому вибираємо перший стовпець з t_1.

2. Рядок вибирається той, у якому число, отримане як частка від ділення коефіцієнта при B на значення t_1 буде найменше. В даному випадку для першого рядку маємо 1, а для другого - $\frac{1}{2}$. Тому вибираємо другий рядок. В цьому випадку опорною клітиною є $a_{21} = 2$:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1	1	1	4	1	0
z_2	1	○ 2	1	0	1
F	0	-1	-1	0	0

3. Рядок з опорним елементом ділимо на значення клітинки (2), а в стовпці записуємо нулі:

	B	t_1	t_2	z_1	z_2
z_1		0			
z_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
F		0			

4. Використовуючи перетворення Жордана, заповнюємо порожні клітинки.

Заняття № 9-11. Позиційні ігри.

9.1. Гра складається з трьох ходів, які роблять два гравці.

<u>Перший хід</u>. Робить 1-й гравець. Вибирає x з $\{1,2\}$.

<u>Другий хід</u>. Робить 2-й гравець. Знаючи x, він вибирає y з $\{1,2\}$.

<u>Третій хід</u>. Робить 1-й гравець. Не знаючи x і не знаючи y, вибирає z з $\{1,2\}$.

Отже, на третьому ході 1-й гравець не знає, як походив 2-й гравець і як походив 1-й гравець на першому ході. Це можна представити так, що 1-й гравець представлений командою з двох гравців, що знаходяться ізольовано в двох кімнатах.

Гра закінчується, і 2-й гравець платить 1-му виграш, який представлено у табл. 9.1.

x	y	z	L
1	1	1	-2
1	1	2	-1
1	2	1	3
1	2	2	-4
2	1	1	5
2	1	2	2
2	2	1	2
2	2	2	6

Табл. 9.1

Розв'язання.

Дерево гри можна представити у вигляді, який представлений на рис. 9.1.

У цьому прикладу усі 4 вузли третього рівня утворюють інформаційну множину. Тому вони обкреслені пунктирною лінією.

Виграш 1-го гравця за рахунок 2-го характеризується такими значеннями:

$L_1(t_1)=6$, $L_1(t_2)=2$, $L_1(t_3)=2$, $L_1(t_4)=5$,

$L_1(t_5)=-4$, $L_1(t_6)=3$, $L_1(t_7)=-1$, $L_1(t_8)=-2$.

Для 2-го гравця маємо 4 стратегії:

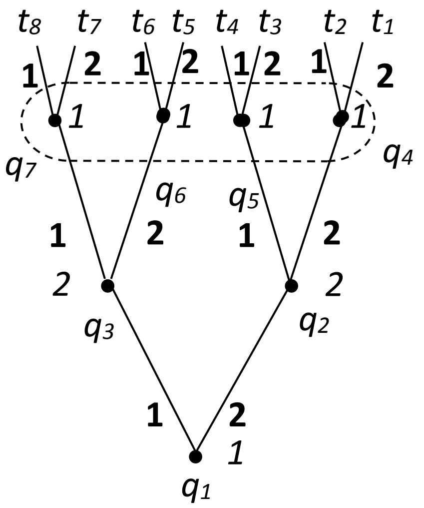


Рис. 9.1 – Дерево гри

$S_1 : y = 1$ для любого *x*;

$S_2 : y = 2$ для любого *x*;

$S_3 : y = x$;

$$S_4 : y = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x = 2 \\ 2 & \text{при} \quad x = 1 \end{cases}$$

Стратегією 1-го гравця є пара чисел *(x, z)*, тобто його вибір:

а) *x* дорівнює 1 або 2 на 1-му ході;

б) *z* дорівнює 1 або 2 на 3-му ході.

Отже, 1-й гравець має 4 стратегії: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), і матриця гри має вигляд:

S_i (x_1, z)	S_1 $y=\mathbf{1}$	S_2 $y=\mathbf{2}$	S_3 $y=x$	S_4 $y \neq x$
(1,1)	$L(t_8)$	$L(t_6)$	$L(t_8)$	$L(t_6)$
(1,2)	$L(t_7)$	$L(t_5)$	$L(t_7)$	$L(t_5)$
(2,1)	$L(t_4)$	$L(t_2)$	$L(t_2)$	$L(t_4)$
(2,2)	$L(t_3)$	$L(t_1)$	$L(t_1)$	$L(t_3)$

Численні її значення дорівнюють:

$$\begin{array}{c|ll} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} \\ \\ * \\ * \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 6 & 5 \\ * & & & * \end{array} & & \end{array}$$

Отримана матриця не має сідловидної точки. Задачу у цьому випадку треба розв'язувати, використовуючи змішані стратегії. Ми не приводимо процес розв'язання цієї гри, а тільки приводимо результати рахунку.

Відповідь. Ціна гри: $c = \frac{26}{7}$. Оптимальні змішані стратегії: для 1-го гравця $\xi = \left(0,0,\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$, для 2-го гравця $\eta = \left(\frac{4}{7},\frac{3}{7},0,0\right)$.

Заняття № 12. Нескінченні ігри.

12.1. Нехай на квадраті $[0,..,1]$ задана функція

$$L(x,y) = 2x^2 - y^2.$$

Визначити сідлову точку.

Розв'язання. Визначимо

$$\max_x \min_y\left(2x^2 - y^2\right) = \max_x\left(\min_y\left(2x^2 - y^2\right)\right) = |y=1| = \max_x\left(2x^2 - 1\right) = |x=1| = 1$$

$$\min_y \max_x\left(2x^2 - y^2\right) = \min_y\left(\max_x\left(2x^2 - y^2\right)\right) = |x=1| = \min_y\left(2 - y^2\right) = |y=1| = 1$$

Отже, це гра з чистими стратегіями, з сідловою точкою. Нижня чиста ціна гри дорівнює $\alpha = \max_x \min_y\left(2x^2 - y^2\right) = 1$. Верхня чиста стратегія гри дорівнює $\beta = \min_y \max_x\left(2x^2 - y^2\right) = 1$. Чиста ціна гри $c = 1$. Сідлова точка $(1,1)$.

12.2. Нехай на квадраті $[0,..,1]$ задана функція:

$$L(x,y) = (x-y)^2.$$

Визначити сідлову точку.

Розв'язання.

$$\max_x \min_y\left((x-y)^2\right) = \max_x\left(\min_y\left((x-y)^2\right)\right) = |y=1| = \max_x\left((x-1)^2\right) = |x=0| = 1$$

$$\min_y \max_x\left((x-y)^2\right) = \min_y\left(\max_x\left((x-y)^2\right)\right) = |x=1| = \min_y\left((1-y)^2\right) = |y=1| = 0$$

Отже, сідлова точка відсутня.

Відзначимо, що для функції $L(x,y) = (x-y)^2$ частинні похідні дорівнюють відповідно:

$$L'_x = 2(x-y) \text{ та } L'_y = -2(x-y).$$

З умови рівності нулю частинних похідних маємо, що локальні екстремуми розміщені на прямій $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

12.3. Нехай на відкритому інтервалі $(0,..,1)$ задана функція

$$L(x,y)=x+y.$$

Визначити сідлову точку.

Розв'язання. Якщо S_1 та S_2 були б замкнутими інтервалами $[0,..,1]$, то

$$\max_x \min_y (x+y)=\max_x\left(\min_y(x+y)\right)=|y=0|=\max_x(x)=|x=1|=1$$

$$\min_y \max_x (x+y)=\min_y\left(\max_x(x+y)\right)=|x=1|=\min_y(1+y)=|y=0|=1$$

Оскільки інтервал відкритий, то $L\left(x,y^*\right)$ та $L\left(x^*,y\right)$ не існують. Отже, у цьому випадку можна говорити, що перший гравець повинен прагнути до 1, а другий до 0.

12.4. Обчислити виграш першого гравця в грі на квадраті з функцією виграшу

$$M(x,y)=\frac{1}{4x\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}},$$

якщо гравці виберуть стратегії $F(x)=x^2$ і $G(y)=y^2$.

Розв'язання.

$$M^*(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)dF(x)dG(y)=\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{4x\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}d\left(x^2\right)d\left(y^2\right)=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}dxdy=-\int_0^1 dx\left.\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^{1/2}}\right|_0^1=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}dx=$$

$$=\left.ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right|_0^1-\left.ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)\right|_0^1=ln\left(1+\sqrt{2}\right)-ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=ln\left(1+\sqrt{2}\right)-ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2}}\right)=ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

12.5. Задано функцію виграшу $M(x,y)=sin2\pi(x-y)$ на квадраті. Перевірити, чи є змішані стратегії $F(x)=x$ і $G(y)=y$ оптимальними.

Розв'язання.

Для заданої задачі:

$$M(x,y)=sin2\pi(x-y) \text{ та } M(y,x)=-sin2\pi(y-x),$$

тобто $M(x,y)=-M(y,x)$. Отже: $c=0$.

Перевіряємо рівняння:

$$\max_x M^*\left(x^*,G\right)=\min_y M^*\left(F,y^*\right)$$

$$M^*\left(x^*,G\right)=\int_0^1 M\left(x,y\right)dG\left(y\right)=\int_0^1 \sin 2\pi\left(x-y\right)d\left(y\right)=\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(x-y\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(x-1\right)-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\sin\pi\left(2x-1\right)\sin\pi=0,$$

$$M^*\left(F,y^*\right)=-\int_0^1 \sin 2\pi\left(x-y\right)d\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(x-y\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(1-y\right)-\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\left(y\right)=\frac{1}{\pi}\sin\pi\cdot\sin\pi\left(2y\text{-}1\right)=0.$$

Тобто $\max_x M^*\left(x^*,G\right)=\max_x\left(\int_0^1 \sin 2\pi\left(x-y\right)d\left(y\right)\right)=0,$

$$\min_y M^*\left(F,y^*\right)=\min_y E\left(-\int_0^1 \sin 2\pi\left(x-y\right)d\left(x\right)\right)=0.$$

Отже,

$$\max_x M^*\left(x^*,G\right)=\min_y M^*\left(F,y^*\right),$$

і стратегії $F\left(x\right)=x$ та $G\left(y\right)=y$ є оптимальними.

Заняття № 13. Ігри з опуклими функціями.

13.1. На квадраті $\left[0...1\right]$ задана функція

$$M\left(x,y\right)=\sin\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}.$$

Визначити стратегії гравців.

Розв’язання.

Оскільки для $x\in\left[0...1\right]$ та $y\in\left[0...1\right]$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}=$$

$$=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}<0,$$

то відповідно $M\left(x,y\right)$ строго ввігнута по x для любого y.

Отже,

$$C=\max_x\min_y\sin\frac{\pi\left(x+y\right)}{2}.$$

Необхідно відзначити, що

при $0 < x \leq 0{,}5$ має місце $\min\limits_{0<y<1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi x}{2}\Big|_{y=0}$,

при $0.5 < x \leq 1$ має місце $\min\limits_{0<y<1} \sin\frac{\pi(x+y)}{2} = \sin\frac{\pi(x+1)}{2}\Big|_{y=1}$.

Отже,

$$C = \max\left[\max_{0<x<0.5}\min_{0<y<1}\sin\frac{\pi(x+y)}{2}, \max_{0.5<x<1}\min_{0<y<1}\sin\frac{\pi(x+y)}{2}\right] =$$

$$= \max\left[\max_{0<x<0.5}\sin\frac{\pi x}{2}, \max_{0.5<x<1}\sin\frac{\pi(x+1)}{2}\right] = \max\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

тобто $M(x,y) = -M(y,x)$. Тому $C = 0$.

Остаточно

$$\max_x M^*\left(x^*, G\right) = \min_y M^*\left(F, y^*\right).$$

13.2. Нехай $M(x,y) = (x-y)^2$. Визначити ціну та стратегії гри.

Розв'язання.

А) Функція неперервна по x та y, тому розв'язок існує.

Б) $M''_{yy} = \left(-2(x-y)\right)'_y = 2 > 0$.

Отже, $M(x,y)$ випукла по y, а ціна гри визначається із співвідношення:

$C = \min\limits_y \max\limits_x M(x,y)$.

Другий гравець має чисту оптимальну стратегію y_0 яка визначається за формулою:

$$\max_x M(x, y_0) = c.$$

Тоді

$$C = \min_y \max_x (x-y)^2 = \min_y \max_x \left(y^2, (1-y)^2\right) = \frac{1}{4},$$

$$y_0 \to \max\left({y_0}^2, (1-y_0)^2\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.$$

Оптимальні стратегії першого гравця визначаються з умови

$$0 < y_0 < 1.$$

У цьому випадку

$$M(x, y_0) = c \Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Тоді $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Визначимо α - ймовірність використання чистої стратегії x_1:

$$\alpha \cdot M'_y\left(0,\frac{1}{2}\right)+(1-\alpha)\cdot M'_y\left(1,\frac{1}{2}\right)=0$$

$$M'_y=-2\cdot(x-y), \qquad M'_y\left(0,\frac{1}{2}\right)=1, \qquad M'_y\left(1,\frac{1}{2}\right)=-1,$$

$$\alpha-(1-\alpha)=0, \quad 2\alpha=1, \quad \alpha=\frac{1}{2}=0.5.$$

13.3. Нехай $M(x,y)=(x-y)^2$. Визначити оптимальні стратегії.

Розв'язання.

А) Функція неперервна по x та y, тому рішення існує.

Б) $M''_{xx}=2>0$, тобто $M(x,y)$ випукла по x і має ціну гри.

Розглянемо множини значень x та y:

$$x=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}, \qquad y=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}.$$

Оскільки $M(x,y)=(x-y)^2$, то можна побудувати матрицю гри у вигляді:

Y\X	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	
0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0
1	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	

Отже, ціна гри $c=\frac{1}{4}$, а оптимальна стратегія першого гравця $x_0=\frac{1}{2}$.

Цю ж ціну можна було отримати з умови

$$C=\min_y \max_x (x-y)^2.$$

Так як $\left((x-y)^2\right)'_x=2(x-y)=0 \Rightarrow x=y$ для $y=0$ і $y=1$, то одержимо

$$C=\min_y\left(x^2,(x-1)^2\right).$$

Причому повинна виконуватись умова $x^2 = (x-1)^2$.
Тоді

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{2},$$

$$c = \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Оскільки $0 < x_0 < 1$, то ймовірність α використання стратегій $y_1 = 0$ та $y_2 = 0$ визначаємо з рівняння:

$$\alpha \cdot M'_x\left(0, \frac{1}{2}\right) + (1-\alpha) \cdot M'_x\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$M'_x = 2 \cdot (x - y), \qquad M'_x\left(0, \frac{1}{2}\right) = -1, \qquad M'_x\left(1, \frac{1}{2}\right) = 1.$$

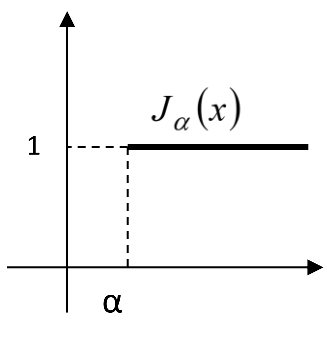
Одержимо

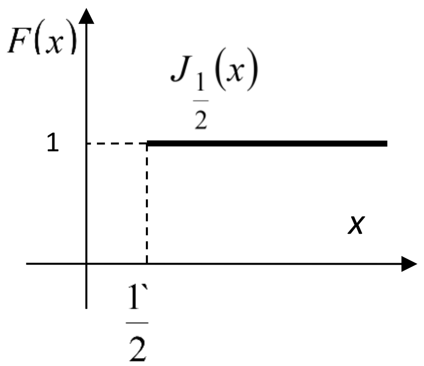
$$-\alpha + (1-\alpha) = 0, \qquad 2\alpha = 1, \qquad \alpha = \frac{1}{2} = 0.5.$$

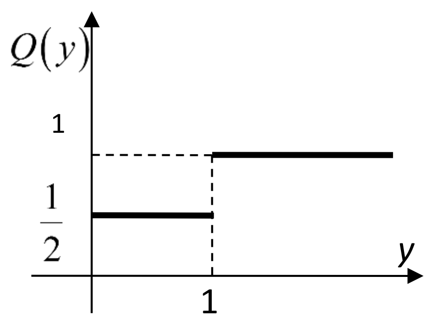
Отже, змішані стратегії другого гравця

$$Q(y) = \frac{1}{2} \cdot J_0(y) + \frac{1}{2} \cdot J_1(y),$$

а першого гравця - $F(x) = J_{\frac{1}{2}}(x)$, де $J_\alpha(x)$ - одинична функція.





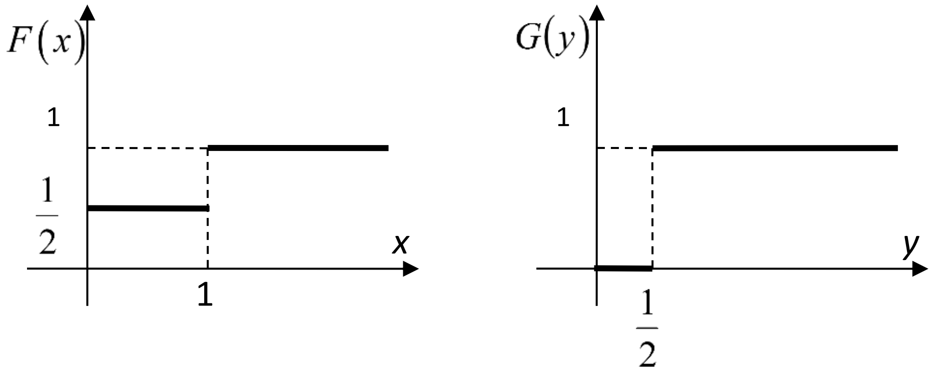


Відповідно змішані стратегії першого гравця:

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\eta(x)+\frac{1}{2}\cdot\eta(x-1),$$

а другого - $G(y)=\eta\left(y-\frac{1}{2}\right)$.

Тобто



13.4. Задано гру на квадраті з ядром

$$A(x,y)=-2x^2+y^2+3xy-x-2y.$$

Знайти оптимальні стратегії.

Розв'язання. Для цієї функції другі похідні (які визначають випуклість функції) дорівнюють:

$$A_{xx}=-4,\ A_{yy}=2.$$

Тому це угнуто-випукла гра.

Перша частинна похідна по x: $\quad A_x=-4x+3y-1.$

Прирівнявши першу похідну нулю, знайдемо критичну точку

$$x=\frac{3y-1}{4}.$$

Це значення x максимізує A. Але воно не завжди лежить у одиничному інтервалі, будучи від'ємним при $y<1/3$. Для цього випадку ми одержимо максимум, вважаючи $x=0$. Отже,

$$\psi(y)=\begin{cases} 0, & якщо \quad y\le 1/3, \\ (3y-1)/4, & якщо \quad y\ge 1/3. \end{cases}$$

По аналогії $\quad A_y=2y+3x-2,$

звідки випливає, що

$$\phi(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\ge 2/3, \\ (2-3x)/2, & якщо \quad x\le 2/3. \end{cases}$$

Звідки знаходимо оптимальні стратегії та значення гри:

$$\bar{x}=4/17,\ \bar{y}=11/17,\ v=13/17.$$

Заняття № 14. Ігри з вибором моменту часу.

14.1. Гра «**Тиха дуель**».
Умова гри:

1)Два гравця у момент $t=0$ починають йти назустріч один одному.

2) Гравці зустрічаються у момент $t=1$.

3) Кожен гравець має пістолет лише з однією кулею і може вистрілити в будь-який момент часу.

4) Якщо гравцеві вдалося вразити супротивника, а сам він неушкоджений, то гра припиняється, і той, хто вистрілив успішно, є переможцем.

5) Якщо обидва гравця промахнулися, то дуель закінчується внічью.

6) Якщо обидва гравця стріляли одночасно, і кожен вразив противника, то гра закінчилася внічию.

Розв'язання. Зроблені припущення:

1) влучність пострілу при зближенні гравців зростає таким чином, що якщо гравець вистрілив у момент t, то ймовірність ураження противника дорівнює t.

2) гравець не знає, що його противник вистрілив, якщо той промахнувся (умова, яку визначає назву «тиха дуель»).

Знайдемо ядро цієї гри.

Якщо 1-й гравець обирає момент x, а 2-й гравець — момент $y>x$, то 1-й гравець з ймовірністю x потрапляє у противника (у цьому випадку його виграш дорівнює $+1$);

якщо 1-й гравець промахнувся (з ймовірністю $1-x$), то він буде вражений з ймовірністю y (одержить виграш -1).

Отже,

$$K(x,y)=x-y+xy.$$

Гра симетрична, тому

$$L(x,y)=x-y-xy$$

і

$$\varphi(x)=0.$$

Крім цього,

$$K_y(x,y)=-1+x, \qquad L_y(x,y)=-1-x$$

і

$$L(y,y)-K(y,y)=-2y^2.$$

Зроблено допущення, що оптимальна стратегія є неперервною функцією розподілення F з додатною похідною у інтервалі (a,b). Тоді

$$-2y^2F'(y)=\int_a^y(-1+x)F'(x)dx+\int_y^b(-1-x)F'(x)dx.$$

Продиференціював це рівняння, одержимо диференційне рівняння вигляду

$$-4yF'-2y^2F''=(y-1)F'+(y+1)F',$$

Спрощуючи це рівняння, одержимо

$$yF'' = -3F'.$$

Розв’язок рівняння:

$$F'(y) = ky^{-3}.$$

Визначимо a, b та k.

1.Зробимо допущення, що $b < 1$. Для всіх $y \in (a,b)$ значення гри

$$E(F,y) = 0.$$

Але функція $E(F,y)$ неперервна по y, звідки одержимо, що значення гри для b

$$E(F,b) = 0.$$

Отже,

$$\int_a^b (x - b + bx)\,dF(x) = 0.$$

Але якщо $b < 1$, то

$$\int_a^b (x - 1 + x)\,dF(x) < 0,$$

і тому $E(F,1) < 0$, що суперечить умові, тобто допущення $b < 1$ невірно.

2. Зробимо допущення $b = 1$.

Так як $b = 1$, то $E(F,1) = 0$. Згідно цього,

$$k\int_a^1 \frac{2x-1}{x^3}dx = 0.$$

Звідки виходить, що

$$3a^2 - 4a + 1 = 0.$$

Рівняння має два розв’язка: $a = 1$ і $a = 1/3$. Значення $a = 1$ не підходить, отже,

$$a = 1/3.$$

Оскільки F — стратегія, то

$$\int_{1/3}^1 \frac{k}{x^3}dx = 1,$$

і тому

$$k = 1/4.$$

Отриманий результат визначає оптимальну стратегію кожного з двох гравців. Ця стратегія є безперервною функцією розподілу вигляду:

$$F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 1/3, \\ 1/4x^3, & \text{если} \quad x > 1/3. \end{cases}$$

14.2. Гра «**Гучна дуель**». Умова гри аналогічні попередньої, за одним винятком: дуель тепер буде гучної, тобто гравець знає, що його противник вистрілив і влучив.

Розв’язання. Гравець у цьому випадку не стріляє до моменту $t = 1$, коли він попадає безперечно.

Якщо 1-й гравець вибрав x, а 2-й гравець вибрав $y > x$, то 1-й гравець з ймовірністю x перемагає і з ймовірністю $1 - x$ програє.

Отже,

$$K(x,y) = 2x - 1,$$
$$L(x,y) = 1 - 2y,$$
$$\varphi(x) = 0.$$

Ця гра має сідлову точку у чистих стратегіях. Дійсно:

$$A(1/2, y) = L(x,y) = 1 - 2y > 0, \text{ якщо } y < 1/2,$$
$$A(1/2, y) = \varphi(1/2) = 0, \text{ якщо } y = 1/2,$$
$$A(1/2, y) = K(1/2, y) = 0, \text{ якщо } y > 1/2,$$

і тому $1/2$ — оптимальна чиста стратегія.

Заняття № 15. Багатокрокові ігри.

15.1. Гра інспектування.

Умови гри:

Нехай гравець 1 – порушник, він виконує незаконну дію; гравець 2 – інспектор, він перевіряє вибраний період часу на наявність там незаконної дії 1-го гравця. Задано N періодів часу, в які незаконна дія може бути здійснена. 1-й гравець, вибираючи один з періодів часу, виконує дію. 2-й гравець проводить дослідження одного з періодів часу з метою виявити дію 1-го гравця.

Результат гри:

– дія 1-го гравця відбувається і не виявляється: гравець виграє +1.

– дію 1-го гравця виявлено (порушник спійманий): 1-й гравець отримує –1.

– якщо 1-й гравець нічого не робить, його виграш дорівнює 0.

Знайти розв’язок гри.

Формалізація гри:

На першому кроці гри кожен гравець має дві альтернативи.

1-й гравець - може почати дію або не вжити.

2-й гравець - може почати дію або не вжити.

А) Якщо 1-й гравець діє, 2-й гравець діє і виявляє дію 1-го гравця, то виграш -1.

Б) Якщо 1-й гравець діє, а 2-й гравець не діє, то виграш 1-го гравця +1.

В) Якщо 1-й гравець не діє, а 2-й гравець діє, то 1-й гравець може почати дію в наступний період часу (всього періодів часу N) І виграш 1-го гравця +1.

Г) Якщо 1-й гравець не діє, і 2-й гравець не діє, то виконується перехід до наступного кроку гри, який відрізняється від попереднього тільки тим, що до кінця гри залишається менше періодів часу.

Отже матрицю 1-го кроку можна записати як:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{N-1} \end{pmatrix},$$

де:

1-й рядок - відповідає виграшу 1-го гравця, якщо він застосовує 1-ю стратегію (виконати дію).

2-й рядок - відповідає другий стратегії 1-го гравця (дія не виконає).

1-й стовпець - відповідає виграшу 1-го гравця, якщо 2-й гравець використовував 1-ю стратеги ю (виконав дію).

2-й стовпець - відповідає тому, коли 2-й гравець використовував 2-ю стратег (не виконав дію).

Γ_{N-1} - означає, що потрібно провести гру $N-1$.

Якщо гра має $N-1$ періодів часу, то вона характеризується значенням гри C_{N-1}, і справедливо наступне рекурентне співвідношення:

$$C_N = val\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & C_{N-1} \end{pmatrix},$$

де $val\ A$ позначає значення гри з матрицею A.

Так як $C_{N-1} < 1$, гра з цією матрицею не має сідлової точки і можна знайти оптимальні змішані стратегії:

$$\varepsilon = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2);$$
$$\eta = (\eta_1,\ \eta_2)$$

відповідно 1-го і 2-го гравців і ціну гри C_N.

Складаємо рівняння:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 + \quad\quad \varepsilon_2 &= C_N \\ \varepsilon_1 + C_{N-1}\cdot\varepsilon_2 &= C_N \\ \varepsilon_1 + \quad\quad \varepsilon_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\eta_1 + \quad\quad \eta_2 &= C_N \\ \eta_1 + C_{N-1}\cdot\eta_2 &= C_N \\ \eta_1 + \quad\quad \eta_2 &= 1 \end{aligned}$$

З цих рівнянь випливає:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 + \quad\quad \varepsilon_2 - C_N &= 0 \\ \varepsilon_1 + C_{N-1}\cdot\varepsilon_2 - C_N &= 0 \\ \varepsilon_1 + \quad\quad \varepsilon_2 \quad\quad &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\eta_1 + \quad\quad \eta_2 - C_N &= 0 \\ \eta_1 + C_{N-1}\cdot\eta_2 - C_N &= 0 \\ \eta_1 + \quad\quad \eta_2 \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

Отже,

$$\varepsilon_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & C_{N-1} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & C_{N-1} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ C_{N-1} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ C_{N-1} & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 + C_{N-1}}{-1 + C_{N-1} - 1 - 1} = \frac{1 - C_{N-1}}{3 - C_{N-1}},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & C_{N-1} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ C_{N-1} & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 - 1}{-1 + C_{N-1} - 1 - 1} = \frac{2}{3 - C_{N-1}},$$

$$C_N = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & C_{N-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & C_{N-1} & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & C_{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ C_{N-1} & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-C_{N-1} - 1}{-1 + C_{N-1} - 1 - 1} = \frac{1 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}}.$$

За аналогією отримуємо: $\eta_1 = \frac{1 - C_{N-1}}{3 - C_{N-1}}$, $\eta_2 = \frac{2}{3 - C_{N-1}}$.

Вираз $C_N = \frac{1 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}}$ являє собою рівняння, яке з початковою умовою $C_1 = 0$ визначає C_N.

Пояснення. У грі з одним періодом часу $N = 1$ при 2-й стратегії 1-го гравця він отримає виграш 0, і матриця виграшів першого гравця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ця матриця має сідлову точку (елемент a_{21}) і ціну гри $C_1 = 0$. Це приймається за початкову умову.

Для розв'язання $C_N = \frac{1 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}}$ можна використовувати перетворення:

$$C_N = \frac{1 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}} \Rightarrow C_N - 1 = \frac{1 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}} - 1 \Rightarrow C_N - 1 = \frac{1 + C_{N-1} - 3 + C_{N-1}}{3 - C_{N-1}}$$

$$\Rightarrow C_N - 1 = \frac{-2 + 2C_{N-1}}{3 - C_{N-1}} \Rightarrow \frac{1}{C_N - 1} = \frac{3 - C_{N-1}}{-2 + 2C_{N-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_N - 1} = \frac{1 - C_{N-1} + 2}{-2 + 2C_{N-1}} \Rightarrow \frac{1}{C_N - 1} = \frac{1 - C_{N-1}}{-2 + 2C_{N-1}} + \frac{2}{-2 + 2C_{N-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_N - 1} = \frac{1}{C_{N-1} - 1} - \frac{1}{2}.$$

Введемо нові змінні:

$$t_N = \frac{1}{C_N - 1},\ t_{N-1} = \frac{1}{C_{N-1} - 1}.$$

Отримаємо нове різницеве рівняння:

$$t_N = t_{N-1} - \frac{1}{2},\ t_1 = -1, \text{ при } C_1 = 0.$$

Для цього розв’язку маємо:

$$t_1 = -1,\quad t_2 = t_1 - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{2+1}{2} = -\frac{3}{2},\quad t_3 = t_2 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3+1}{2} = -\frac{4}{2},$$

$$t_4 = t_3 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{4+1}{2} = -\frac{5}{2},\ ....,\ t_N = t_{N-1} - \frac{1}{2} = -\frac{N}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{N+1}{2}.$$

Звідки, так як $t_N = \frac{1}{C_N - 1}$, отримуємо

$$C_N - 1 = \frac{1}{t_N} \Rightarrow C_N = \frac{1}{t_N} + 1 \Rightarrow C_N = -\frac{2}{N+1} + 1 = \frac{-2 + N + 1}{N+1} = \frac{N-1}{N+1}.$$

Отже, значення гри на кожному кроці одне: $C_N = \frac{N-1}{N+1}$.

При цьому отримуємо $C_{N-1} = \frac{N-2}{N}$.

Матриця гри тепер приймає вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & C_{N-1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{N-2}{N} \end{pmatrix}.$$

Наведені вище залежності дають можливість визначити оптимальні стратегії на N-му кроці:

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - C_{N-1}}{3 - C_{N-1}} = \frac{1 - \dfrac{N-2}{N}}{3 - \dfrac{N-2}{N}} = \frac{N - N + 2}{3N - N + 2} = \frac{2}{2N + 2} = \frac{1}{N+1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{3 - C_{N-1}} = \frac{2}{3 - \dfrac{N-2}{N}} = \frac{2N}{2N + 2} = \frac{N}{N+1}.$$

Отже, $x^N = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right)$. Аналогічно $y^N = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\right)$.